

مقارنة لأهم الطرائق لحل معادلة ليابونوف المصفوفية تحليلياً

³ د. هبه اصلان

² أ.د. سامح العرجه

¹ بكر صالح

الملخص

ندرس في هذه البحث الحل التحليلي لمعادلة ليابونوف المصفوفية المستمرة $A^T P + P A = -Q$ باستخدام خمس طرائق مختلفة من الناحية البنيوية (جاء كرونكر، التحليل الطيفي، الحل التكاملي، شكل جوردان، جاء هادامارد)، ومقارنة هذه الطرائق من حيث الصياغة الرياضية والتعقيد الحسابي ونطاق التطبيق، حيث تم تطبيق الطرائق الخمس السابقة على ست حالات (مصفوفة حقيقية مستقرة، مصفوفة عقدية مستقرة، مصفوفة غير قابلة للتقطير، مصفوفة غير مستقرة، مصفوفة متغيرة الزمن، مصفوفة قيمها ذاتية على المحور التخيلي)، وقمنا ببرمجة الطرائق السابقة باستخدام برنامج MATLAB ، والمقارنة بين جميع الطرائق من حيث زمن التنفيذ والدقة والتخزين عبر الابعاد

من $n=3$ إلى $n=500$ ، حيث تم تحديد الطريقة المثلى لحل معادلة ليابونوف المصفوفية وفق الحالات المدروسة من خلال شجرة القرار، ودلت النتائج على أن لكل طريقة نطاقاً عملياً محدداً لا نستطيع الخروج عنه.

الكلمات المفتاحية: معادلة ليابونوف المصفوفية ، جاء كرونكر، التحليل الطيفي، الحل التكاملي ، شكل جوردان، جاء هادامارد.

¹ طالب ماجستير، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة حمص

² عضو هيئة تدريسية، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة حمص

³ عضو هيئة تدريسية، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة حمص

A Comparison Study of main Analytical Methods for Solving the Martix lyapunov Equation

Bakr Salh ¹

Dr. Sameh Arjeh ²

Dr. Hiba Aslan ³

Abstract

In this research, we study the analytical solution of the continuous matrix Lyapunov equation $A^T P + P A = -Q$ using five structurally different methods (Kronecker product, spectral analysis, integral solution, Jordan form, Hadamard product). These methods are compared in terms of mathematical formulation, computational complexity, and scope of application. The five methods are applied to six cases (real stable matrix, complex stable matrix, non-diagonalizable matrix, unstable matrix, time-varying matrix, matrix with eigenvalues on the imaginary axis). We implemented the aforementioned methods using MATLAB and compared them in terms of execution time, accuracy, and storage requirements for dimensions ranging from $n=3$ to $n=500$. The optimal method for solving the matrix Lyapunov equation, according to the studied cases, was determined using a decision tree. The results indicate that each method has a specific practical range beyond which it cannot be applied."

Keywords: matrix Lyapunov equation, Kronecker product, Spectral decomposition, Jordan form, Hadamard product.

¹ Master Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Homs University

² faculty member, Department of Mathematics, Faculty of Science, Homs University

³ faculty member, Department of Mathematics, Faculty of Science, Homs University

1. المقدمة:

تُعَدُّ معادلة لياپونوف المصفوفية المستمرة $A^T P + P A = -Q$ الأداة الأساسية في تحليل استقرار الأنظمة الديناميكية الخطية $\dot{X} = AX$ ، وحجر الزاوية في تصميم متحكمات LQR ومرشحات كالمان، وتخفيض رتبة النموذج

[1، 2، 10، 11]. وقد برهن لياپونوف (1892) على أن النظام مستقرٌ آسِياً إذا وفقط إذا وُجدت لكل $Q > 0$ مصفوفة $P > 0$ تحقق هذه المعادلة [1]، فأصبحت موضوعاً تتقاطع فيه ثلاثة فروع: تحليل المصفوفات [4، 15، 16]، والتحليل العددي [5، 12، 14]، ونظرية التحكم [2، 10، 11]. ورغم أن الطرائق التحليلية الكلاسيكية تأسست منذ عقود [3، 4، 5]، فإن معظم الأبحاث الحديثة — حتى الصادرة في 2024 و 2025 — اتجهت نحو الطرائق العددية للأنظمة كبيرة البعد، كأساليب كري洛夫 [18] وإطارات ADI-كري洛夫 المتكاملة المبنية على طريقة Smith منخفضة الرتبة [17، 20]، إضافةً إلى مراجعاتٍ شاملة تربط المعادلة بالاتجاهات الناشئة كالمنهجيات المعتمدة على البيانات والحوسبة الكمومية [19]. غير أن الدراسة التحليلية تبقى أساسيةً لفهم البنية الرياضية للمعادلة، وإثبات وجود الحلّ و وحدانيته، والتحقق من صحة الخوارزميات العددية، وتفسير حدودها على الحالات الحديثة.

تفتقر الأدبيات — وخاصةً العربية، إذ لم تَطَّلِع المراجعة الشاملة للأبحاث المنشورة بالعربية على دراسة سابقة تجمع الطرائق التحليلية الخمس في إطار موحد — إلى دراسة مرجعية موحدة تجمع الاشتقاق الدقيق للطرائق التحليلية الخمس (كرونيكر، الطيفي، التكامل، جوردان، هادامارد) مع تحققٍ عدديٍ مقارنة لنطاقاتها. يَسَدُّ هذا البحث الفجوة عبر عرضٍ موحدٍ لهذه الطرائق، مُطبَّقةً على ست حالاتٍ تُغطّي الطيف الكامل لسلوك المصفوفة A ، مع تحققٍ عدديٍ في MATLAB عبر أبعاد $n = 3$ حتى $n = 500$ ، وينتهي إلى مصفوفة توافقٍ صريحة وشجرة قرارٍ تربط بنية A بالطريقة المثلى، ويُثبت تجريبياً أن الحالة الحديثة (قيم ذاتية تخيلية صرفة) تُمثِّل حدَّ النظرية الكلاسيكية وبداية النظريات المعممة كنظرية [13] LaSalle.

2. مشكلة البحث:

بالرغم من وجود العديد من الطرائق التحليلية لحل معادلة ليابونوف المصفوفية ، إذ تظهر مشكلة البحث في صعوبة اختيار طريقة تحليلية واحدة مناسبة لجميع الحالات المدروسة ضمن معادلة ليابونوف ، مما يجعل اختيار الطريقة المثلى مسألة غير محسومة ، وصعوبة تحديد الحدود العملية لكل طريقة من حيث أبعاد المصفوفة التي يمكن معالجتها والذاكرة والزمن الحسابي اللازم عند التشغيل على الأجهزة الشخصية العادية. تتمحور أيضاً مشكلة البحث حول صعوبة تطبيق الطرائق التحليلية بزيادة بُعد المصفوفة، حيث تفقد الدقة والكفاءة الحسابية بين الطرائق. مما تستدعي هذه المشكلة إيجاد دراسة شاملة تجمع بين العرض الرياضي الدقيق للطرائق التحليلية الخمس والتطبيق البرمجي الموثق لكل طريقة. والمقارنة المنهجية بين هذه الطرائق من حيث الدقة، السرعة، استهلاك الذاكرة[3، 4، 5، 14].

3. أهمية البحث:

تستمد هذه الدراسة أهميتها من الناحية النظرية، بأنها تُقدّم عرضاً موحّداً يجمع خمس طرائق تحليلية مختلفة مع البرهان الرياضي وتحليل التعقيد الحسابي لكل طريقة، مما يُعزّز الفهم النظري لمعادلة ليابونوف ويبيّن العلاقة بين الطرائق المختلفة، أما من الناحية التطبيقية، فيتم تطبيق نتائج الدراسة مباشرةً في تصميم متحكمات LQR ومرشحات كالمان في نظرية التحكم[10، 11]، ويتم تشخيص استقرار الأنظمة الكهربائية والميكانيكية من خلال شجرة قرار الاختيار وذلك في مجال تحليل هكذا أنظمة. تغطي هذه الدراسة فجوة في المكتبة العربية بتقديم مرجع شامل يجمع: (أ) النظرية، (ب) التطبيق، (ج) التحقق البرمجي، (د) المقارنة المنهجية. وتُمثّل أداة تعليمية للطلاب وأداة مرجعية للباحثين في الرياضيات التطبيقية ونظرية التحكم.

4. مواد البحث:

4.1. معادلة ليابونوف:

لتكن $n \times n$ ، A مصفوفة النظام، و $n \times n$ ، $Q = Q^T > 0$ مصفوفة متناظرة وموجبة التحديد. بحيث توجد $n \times n$ ، P مصفوفة متناظرة وموجبة التحديد تحقق:

$$A^T P + P A = - Q \quad (4.1)$$

4.2. شرط الوجود والوحداية:

تمتلك المعادلة (4.1) حلاً وحيداً P لكل مصفوفة Q إذا وفقط إذا تحقق الشرط الطيفي [3]، [4]:

$$I_i + I_j^{-1} > 0 \quad ; i, j = 1, 2, \dots, n$$

وهذا الشرط يتحقق تلقائياً إذا كانت A مصفوفة هوفيتز Hurwitz (جميع القيم الذاتية تمتلك أقسام حقيقية سالبة)، لأن

مجموع أي عددين أقسامهما الحقيقية سالبة لا يمكن أن يكون صفراً [2]، [3]..

4.3. طريقة جداء كرونكر (Kronecker Product):

تعريف معامل التكديس (vec):

لتكن المصفوفة $m \times n$ ، A من الرتبة $m \times n$ يعرف معامل التكديس بأنه ينقل المصفوفة A إلى متجه عمودي وذلك عن طريق ترتيب أعمدة المصفوفة فوق بعضها واحداً فوق الآخر بشكل عمودي:

$$vec(A) = \begin{bmatrix} a_{11}^T \\ a_{21}^T \\ \vdots \\ a_{n1}^T \end{bmatrix} \quad ; \quad m \times n$$

حيث أن $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ هي أعمدة المصفوفة A ، و a_i^T أصبحت أسطر بعد أخذ المنقول فنحصل على مصفوفة سطرية من الشكل $m.n$ 1' ثم نأخذ المنقول للمصفوفة السطرية فنحصل على مصفوفة عمود من الشكل $1.m.n$. تعتمد هذه الطريقة على تحويل المعادلة المصفوفية إلى نظام جبري خطي عبر معامِل التكديس $vec(\cdot)$ وخواص جداء كرونكر [4]. بتطبيق التكديس على طرفي المعادلة (4.1)، نجد:

$$vec(A^T P) + vec(PA) = -vec(Q)$$

نعيد كتابة طرفي العلاقة:

$$\begin{aligned} vec(A^T P) &= (I_n \text{ و } A^T) vec(P) \\ vec(PA) &= (A^T \text{ و } I_n) vec(P) \\ K &= I \text{ و } A^T + A^T \text{ و } I \text{ ، } n^2 \times n^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

والتي تكتب بالصيغة الآتية:

$$K vec(P) = -vec(Q) \quad (4.3)$$

حيث المصفوفة $n^2 \times n^2$ ، K ، و القيم الذاتية لـ K هي $I_i(A) + I_j(A)$ ، وهذا يضمن وجود K^{-1} وبالتالي يوجد حل وحيد حين تكون A مستقرة [4]. وفي الحالة العقدية نستبدل A^* بـ A^T (المرافق الهرميتي) في الحد الأول في المعادلة (4.2)، فتصبح:

$$K = I \text{ و } A^* + A^T \text{ و } I$$

وذلك لأن

$$\begin{aligned} vec(A^* P I) &= (I_n^T \text{ و } A^*) vec(P) \\ vec(I P A) &= (A^T \text{ و } I_n) vec(P) \end{aligned}$$

التعقيد الحسابي: $O(n^4)$ لتشكيل المعادلة (4.2)، و $O(n^6)$ لحل الجملة (4.3) لحلّ النظام الجبري الخطي حجمه n^2 ، أن طريقة كرونكر الأعمّ تطبيقاً وأكثر الطرائق مباشرةً في برهان الوجود والوحدانية في الحالة العامة، إذ لا تشترط قابلية تقطير المصفوفة A ولا أيّ بنية خاصة، لكنها غير عملية للأبعاد الكبيرة ($n > 30$). الحدّ العملي تقريباً $n \approx 30$ ، ويصلّ إلى $n \approx 100$ على أجهزة ذات ذاكرة 32 جيجابايت مع تحمّل بطء كبير [3، 4، 5، 15]..

4.4. طريقة التحليل الطيفي (al DecompositionSpectr):

إذا كانت المصفوفة A قابلة للتقطير أي تحقق $A = VL V^{-1}$ حيث V^{-1} ، V مصفوفة المتجهات الذاتية و

$L = \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_n)$ مصفوفة قطرية، فإنها تملك تحليلاً طيفياً [3]، [4]، [5]: لنفرض أن:

$$\tilde{P} = V^T P V, \tilde{Q} = V^T Q V, P = V^{-T} \tilde{P} V^{-1} \quad (4.4)$$

من خواص التقطير نعلم أن $AV = VL$ ومنه يكون $V^{-1}AV = L$ ، وبأخذ المنقول

$$V^T A^T V^{-T} = L$$

وهذه هي الصيغة الاساسية لإيجاد صيغة الحل الطيفي بالتعويض في

$$\text{المعادلة (4.1)،}$$

$$\begin{aligned} V^{-T} L V^T \times V^{-T} P V^{-1} + V^{-T} P V^{-1} \times V L V^{-1} &= -Q \\ V^{-T} L P V^{-1} + V^{-T} P L V^{-1} &= -Q \\ V^{-T} (L P + P L) V^{-1} &= -Q \end{aligned}$$

بضرب اليسار في V^T واليمين في V ، تتحول معادلة ليابونوف إلى صيغة قطرية:

$$L P + P L = -Q \quad (4.5)$$

ولأن L قطرية فإنها تعطي معادلة مستقلة لكل عنصر: $P_{ij} = -\frac{Q_{ij}}{I_i + I_j}$ ، الآن نوجد P بدلالة P وذلك بضرب العلاقة $P = V^T P V$ بـ V^{-T} من اليسار و بـ V^{-1} من اليمين فنحصل على التحويل العكسي

$$P = V^{-T} P V^{-1}$$

وفي الحالة العقديّة الحل P يكون هرميتياً.

التعقيد: $O(n^3)$ للتقطير + $O(n^2)$ لحساب P ، مما يجعل الطريقة فعالةً للأبعاد المتوسطة

والكبيرة (حتى $n \approx 500$) [9، 14، 18]

4.5. طريقة الحل التكاملي (Integral Representation):

إذا كانت A مستقرة (Hurwitz) و Q موجبة التحديد فإن الحل التكاملي يُعطى بالصيغة [3]:

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^* t} Q e^{A t} dt \quad (4.6)$$

إذا كانت $A = A(t)$ مصفوفة متغيرة، تُعمّم الصيغة (4.6) باستخدام مصفوفة الانتقال $F(t, s)$

المعرفة بالنظام التفاضلي [8]:

$$\frac{\partial F(t, s)}{\partial t} = A(t)F(t, s) , F(s, s) = I$$

عندئذ يُعطى الحل التكامل بالصيغة:

$$P(t) = \int_t^{\infty} F(t, s)^T Q F(t, s) ds$$

حيث تم استبدال e^{At} بمصفوفة الانتقال $F(t, t)$ الأعم وتعدّ هذه الطريقة الوحيدة القابلة للتطبيق المباشر في الحالة المصفوفة متغيرة الزمن، وقد كان محور أعمال Hached و Jbilou (2018) في حالة الحدّ منخفض الرتبة. التعقيد الحسابي تقريباً $O(n^2)$ لحساب الأسّي مضافاً إليه جهد التكامل العددي. الطريقة دقيقة لكنها أبطأ، وتُستخدم حتى $n \approx 200$ [9]،

4.6. طريقة شكل جوردان القانوني (Jordan Form):

إذا كانت A مصفوفة غير قابلة للتقطير (التكرار هندسي أصغر من التكرار الجبري لقيمة ذاتية) أي أن المتجهات الذاتية غير مستقلة خطياً، تفشل طريقة التحليل الطيفي و هادامارد في إيجاد الحل، نحول المصفوفة A إلى شكل جوردان القانوني [3]، [4]، [5]:

$$A = M J M^{-1} , M^{-1} A M = J$$

حيث J مصفوفة جوردان و M مصفوفة التحويل أعمدها المتجهات الذاتية المعممة،

ومن خواص التقطير نعلم أن $A M = M J$ ومنه يكون $M^{-1} A M = J$ ، وبأخذ المنقول

$$M^T A^T M^T = J^T$$

$$A^T M^T = M^T J^T \text{ ويفرض أن}$$

$$\mathcal{Q} = M^T Q M, \mathcal{P} = M^T P M, P = M^T \mathcal{P} M^{-1}, \quad (4.1)$$

$$M^T J^T M^T \times M^T \mathcal{P} M^{-1} + M^T \mathcal{P} M^{-1} \times M J M^{-1} = -Q$$

$$M^T J^T \mathcal{P} M^{-1} + M^T \mathcal{P} g M^{-1} = -Q$$

$$M^T (J^T \mathcal{P} + \mathcal{P} g) M^{-1} = -Q$$

بضرب اليسار في M^T واليمين في M ، نجد:

$$J^T \mathcal{P} + \mathcal{P} g = -\mathcal{Q} \quad (4.5)$$

الآن نوجد P بدلالة $\mathcal{P}$ وذلك بضرب العلاقة $\mathcal{P} = M^T P M$ بـ M^{-T} من اليسار و بـ

M^{-1} من اليمين فنحصل على التحويل العكسي $P = M^T \mathcal{P} M^{-1}$ إذا كانت كتلة جوردان:

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

نُحلّ المعادلة كتلةً بكتلة بالتعويض التراجعي، فإن جملة المعادلة المصفوفية

$$J_k^T \mathcal{P}_k + \mathcal{P}_k J_k = -\mathcal{Q}_k$$

$$2l \bar{p}_{11} + \bar{p}_{21} = -\bar{q}_{11}$$

$$2l \bar{p}_{12} + \bar{p}_{22} + \bar{p}_{11} = -\bar{q}_{12} \quad (4.8)$$

$$2l \bar{p}_{22} = -\bar{q}_{22}$$

نوجد أولاً $\bar{p}_{22}$ ، ثم $\bar{p}_{11}$ و $\bar{p}_{21}$ ، ثم $\bar{p}_{12}$

تعتبر هذه الطريقة دقيقة عندما يفشل التقطير لكن حساب شكل جوردان حساس عددياً جداً وذلك لأن أي تغيير بسيط جداً في A قد يُغيّر بنيته. فهي غير ملائمة للأبعاد الكبيرة [4، 5، 16] الحدّ العملي $n \approx 50$.

4.7 . طريقة جداء هادامارد (Hadamard Product):

تعتمد هذه الطريقة على التعبير عن الحل باستخدام جداء هادامارد (الجداء العنصري) المرمّز بـ $\circ$. وقد عرّضها Gajic و Qureshi ضمن إطار موحدّ للحلول التحليلية لمعادلة ليايونوف [3]، [4] إذا كانت $A = VL V^{-1}$ ، فإن حل معادلة ليايونوف يُكتب بالشكل المختصر:

$$P = V^{-T} (F \circ Q) V^{-1}$$

حيث: $V^T Q V = Q$ هي المصفوفة المحوّلة. F هي مصفوفة كوشي (Cauchy matrix)

$$F_{ij} = - \frac{1}{(l_i + l_j)} \quad (F \circ Q)_{ij} = F_{ij} \times Q_{ij}$$

المعرّفة بـ $(F \circ Q)_{ij} = F_{ij} \times Q_{ij}$ هو الجداء عنصرياً

بعنصر.

تُعدّ هذه الصيغة مكافئة رياضياً للطريقة الطيفية، إذ تلتقي مع طريقة التحليل الطيفي بالصيغة

$$\bar{P} = F \circ \bar{Q} \quad \bar{P}_{ij} = - \frac{\bar{q}_{ij}}{(l_i + l_j)} = F_{ij} \times \bar{q}_{ij}$$

$$P = V^{-*} (F \circ Q) V^{-1}, \quad \bar{Q} = V^* Q V \quad F_{ij} = - \frac{1}{l_i + l_j}$$

إعادة كتابة منظّمة للمعادلة (4.5) [4]. التعقيد الحسابي $O(n^3)$ ، والميزة العملية تكمن في الاستفادة من العمليات العنصرية المتّجهة (vectorized) في MATLAB.

4.8. التحقق البرمجي:

تُفُذت جميع التجارب باستخدام برنامج MATLAB R2024b على جهاز HP Omnibook7 1TB SSD RAM 32GB. تولّد لكل بُعد n مصفوفة عشوائية A ثم تُزاح طيفياً لجعلها مستقرة، وتُؤخذ $I_n = Q$. أما المثال للحالة الأولى فيستخدم مصفوفات A و Q ثابتة لسهولة التحقق اليدوي. يُقاس الزمن باستخدام tic/toc، ويُحسب الخطأ النسبي بـ:

$$e = \frac{\|A^T P + PA + Q\|}{\|Q\|}$$

حيث الابعاد التي تم التحقق منها هي

$$\{3, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 75, 100, 150, 200, 300, 500\} \text{ خ } n$$

5. النتائج ومناقشتها:

5.1. الحالة الأولى: A مصفوفة حقيقية مستقرة:

نحلّ معادلة ليايونوف المصفوفية المستمرة $A^T P + PA = -Q$ حيث نختار مصفوفة A من الرتبة الثالثة (3×3) بحيث تكون غير متناظرة وغير قطرية وغير مثلثية.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

عندئذ القيم الذاتية للمصفوفة A هي:

$$I_1 \gg -1.6753, \quad I_{2,3} \gg -3.6624 \pm 0.5623i$$

نلاحظ أن القسم الحقيقي للقيم الذاتية سالب فإن المصفوفة A مستقرة ، وبالتالي توجد مصفوفة P وحيدة موجبة التحديد ومتناظرة تحقق معادلة ليابونوف [2]، [3]. والقيم الذاتية لـ Q تساوي تقريباً $\{1, 2, 4\}$ مما يؤكد أن $Q > 0$.

الحل باستخدام الطرائق التي تم عرضها سابقاً

الطريقة 1 — كرونكر:

نحسب I_3 و $A^T + A^T$ و $K = I_3$ وهي مصفوفة 9×9 ، نكدس أعمدة Q فوق بعضها (ترتيب عمودي):

نحل الجملة $vec(Q) = -K vec(P)$ أي:

$$vec(P) = -K^{-1} vec(Q)$$

بحل هذه الجملة (بطريقة حذف غاوس أو أي طريقة مباشرة أخرى) ، ثم نعيد ترتيب المتجه $vec(P)$ إلى مصفوفة من المرتبة الثالثة:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5560 & 0.3607 & 0.1121 \\ 0.3607 & 0.6202 & 0.2475 \\ 0.1121 & 0.2475 & 0.3119 \end{pmatrix}$$

الطريقة 2 — التحليل الطيفي:

إذا كانت A قابلة للتقطير (أي لها n شعاع ذاتي مستقل خطياً)، نحسب كل من:

$$A = VL V^{-1} , \quad V^T Q V = \mathcal{Q}$$

المعادلة $\dot{P} = -PQ - Q^T P + L$ المحولة بدلالة العناصر:

$$(I_i + I_j) \dot{p}_{ij} = -q_{ij} \quad \text{ق} \quad \dot{p}_{ij} = - \frac{q_{ij}}{(I_i + I_j)}$$

لنوجد $\dot{p}_{11}$:

$$\dot{p}_{11} = - \frac{-2.8014}{(-1.6753) + (-1.6753)} \gg 0.8361$$

وينفس الطريقة نوجد كلا من $\dot{p}_{13}, \dot{p}_{12}, \dot{p}_{23}$ بعد إيجاد المصفوفة المحولة نأخذ التحويل العكسي

$$P = V^{-T} \dot{P} V^T$$

نجد:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5560 & 0.3607 & 0.1121 \\ 0.3607 & 0.6202 & 0.2475 \\ 0.1121 & 0.2475 & 0.3119 \end{bmatrix}$$

الطريقة 3 — الحل التكاملية:

إذا كانت A مستقرة (أن جميع القيم الذاتية القسم الحقيقي لها سالبة)، فإن الحل الوحيد لمعادلة

ليابونوف يعطى بالصيغة التكاملية:

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^* t} Q e^{A t} dt$$

ثم حساب المصفوفة الأسية $e^{A t}$ ثم نحسب التكامل عددياً عنصراً بعنصر:

$$P_{ij} = \int_0^{\infty} (e^{A^*t} Q e^{At})_{ij} dt$$

يمكن استخدام طرائق التكامل العددي لحساب كل عنصر. وبما أن $0 \leq t \leq \infty$ ، $\|e^{At}\|^{3/4} \leq \frac{3}{4} \frac{3}{4} \frac{3}{4} \frac{3}{4}$ ، يكفي عملياً التكامل حتى $t \approx 10$ بدقة عالية، فإن الحل هو:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5560 & 0.3607 & 0.1121 \\ 0.3607 & 0.6202 & 0.2475 \\ 0.1121 & 0.2375 & 0.3119 \end{bmatrix}$$

الطريقة 4 — جوردان:

بما أن القيم الذاتية الثلاث لـ A متميزة:

$$I_1 \gg -1.6753, I_{2,3} \gg -3.6624 \pm 0.5623i$$

فإن التكرار الجبري يساوي التكرار الهندسي لكل قيمة ذاتية يساوي الواحد ، وبالتالي لا توجد كتل جوردان غير بسيطة. شكل جوردان هو المصفوفة القطرية:

$$J = \begin{bmatrix} 1.6753 & 0 & 0 \\ 0 & -3.6624 + 0.5623i & 0 \\ 0 & 0 & -3.6624 - 0.5623i \end{bmatrix}$$

ومصفوفة التحويل $M = V$ (مصفوفة المتجهات الذاتية المحسوبة سابقاً)، مكافئة للحالة الطيفية

ويأخذ التحويل العكسي:

$$P = M^{-1} M^T$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.5560 & 0.3607 & 0.1121 \\ 0.3607 & 0.6202 & 0.2475 \\ 0.1121 & 0.2475 & 0.3119 \end{pmatrix}$$

الطريقة 5 — هادامارد:

أولاً نحسب مصفوفة كوشي F بحساب كل عنصر $F_{ij} = -\frac{1}{(I_i + I_j)}$ لايجاد مصفوفة كوشي،

في مثالنا نوجد F_{11} :

$$F_{11} = -\frac{1}{(-1.6753) + (-1.6753)} \gg 0.2985$$

وبنفس الطريقة نوجد F_{12}, F_{13}, F_{23} ثم نوجد $K = V^T Q V$ ومن بعدها نحسب $Q \circ F$ وفي

الخطوة الأخيرة نحسب التحويل العكسي $P = V^{-T} (F \circ Q) V^{-1}$

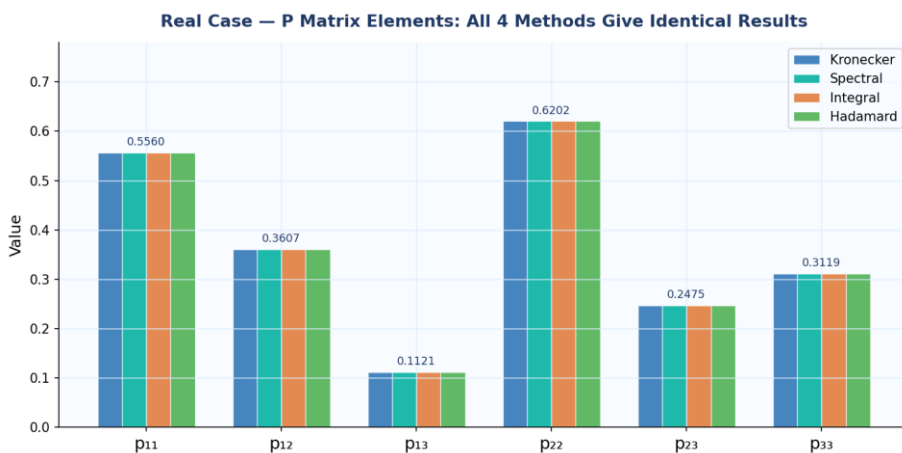
$$P = \begin{pmatrix} 0.5560 & 0.3607 & 0.1121 \\ 0.3607 & 0.6202 & 0.2475 \\ 0.1121 & 0.2475 & 0.3119 \end{pmatrix}$$

الطريقة	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{22}	P_{23}	P_{33}
كرونيكر	0.5560	0.3607	0.1121	0.6202	0.2475	0.3119
التحليل الطيفي	0.5560	0.3607	0.1121	0.6202	0.2475	0.3119

0.3119	0.2475	0.6202	0.1121	0.3607	0.5560	الحل التكاملي
0.3119	0.2475	0.6202	0.1121	0.3607	0.5560	جوردون
0.3119	0.2475	0.6202	0.1121	0.3607	0.5560	هادا مارد

الجدول (1): مقارنة الحل التحليلي بتطبيق الطرائق الخمس على الحالة الأولى.

نتحقق من الخطأ النسبي $\|A^T P + PA + Q\| \times 10^{-14}$ لكل الطرائق حيث أن القيم الذاتية للمصفوفة P هي $\{0.143, 0.302, 1.043\} > 0$ وكلها موجبة وبالتالي هي مصفوفة موجبة التحديد مما يُؤكّد تكافؤها الرياضي رغم اختلاف بنائها الحسابية



الشكل ١: مقارنة عناصر P عبر الطرائق الأربع على الحالة الحقيقية — تطابق تام

5.2 الحالة الثانية: A مصفوفة عقدية:

إذا كانت المصفوفة A عقدية، تصبح معادلة ليابونوف بالشكل: $A^*P + PA = -Q$ حيث $A^* = \bar{A}^T$ هي المرافقة الهرميتية (Conjugate Transpose) للمصفوفة A ، و Q مصفوفة هرميتية موجبة التحديد (أي $Q = Q^*$ و $Q > 0$).

نختار المصفوفة العقدية التالية:

$$A = \begin{bmatrix} -2+i & 1+0.5i & 0 \\ 0 & -3+i & 1-0.5i \\ 1+0.5i & 0 & -4+2i \end{bmatrix}$$

القيم الذاتية لـ A :

$$I_1 \gg -4.1039 + 2.3119i, I_2 \gg -1.6576 + 1.2365i \\ I_3 \gg -3.2385 + 0.4516i$$

جميع القيم الذاتية لها أجزاء حقيقية سالبة:

$$\text{Re}(I_1) \gg -4.1, \text{Re}(I_2) \gg -1.66, \text{Re}(I_3) \gg -3.24$$

أي أن المصفوفة A مستقرة، وبالتالي توجد مصفوفة P هرميتية وحيدة وموجبة التحديد تحقق معادلة ليابونوف

نختار مصفوفة هرميتية موجبة التحديد:

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 1+i & 0 \\ 1-i & 4 & 1+0.5i \\ 0 & 1-0.5i & 3 \end{bmatrix}$$

طريقة كرونكر في الحالة العقدية، المعادلة $A^*P + PA = -Q$ تتحول باستخدام عملية التكديس إلى:

$$(I - A^* \quad A^T \quad I) \text{vec}(P) = \text{vec}(Q)$$

نستبدل المصفوفة A^T بـ A^* في الحد الأول (مرافقة هرميتية)

أما في طريقة التحليل الطيفي وهادامارد في الحالة العقدية نستخدم $\bar{I}_i$ (المرافق) في مصفوفة

$$\text{كوشي: } F_{ij} = -\frac{1}{(\bar{I}_i + I_j)} \text{ و } V^*QV = \bar{Q} \text{ (مرافق هرمتي وليس منقول).}$$

أما طريقة الحل التكاملي في الحالة العقدية $P = \int_0^\infty e^{A^*t} Q e^{At} dt$ حيث أن $(e^{At})^*$ مرافق
هرميتي المصفوفة e^{At} عقدية تحقق $0 \leq \|e^{At}\| \leq \frac{3}{4}$

النتيجة المشتركة

$$P = \begin{pmatrix} 0.8329 & 0.4190 + 0.2473i & 1.644 - 0.0030i \\ 0.4190 - 0.2473i & 0.8476 & 0.2816 + 0.0390i \\ 1.644 + 0.0030i & 0.2816 - 0.0390i & 0.4405 \end{pmatrix}$$

جدول التحقق من الهرميتية

العنصر	Re	Im	هرميتي	ملاحظة
--------	----	----	--------	--------

مقارنة لأهم الطرائق لحل معادلة ليايونوف المصفوفية تحليلياً

قطري حقيقي	-	0	0.8329	P_{11}
هرميتي	$P_{12} = \bar{P}_{21}$	$m0.2473i$	0.4190	P_{12}
قطري حقيقي	-	0	0.8476	P_{22}
هرميتي	$P_{23} = \bar{P}_{32}$	$m0.0390i$	0.2816	P_{23}
قطري حقيقي	-	0	0.4405	P_{33}

نتحقق $\|A^*P + PA + Q\| \leq 10^{-14}$ حيث أن القيم الذاتية للمصفوفة P هي

$$\{0.224, 0.476, 1.421\} > 0$$

5.3 مصفوفة غير قابلة للتقطير

نختار المصفوفة A

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -2.5 \end{pmatrix}$$

إن القيم الذاتية لهذه المصفوفة هي $I_1 = -3$ و $I_2 = -2$ و $I_3 = -3$ مكررة ومنه فإن التكرار الهندسي أصغر من التكرار الجبري أي أن المتجهات غير مستقلة خطياً وبالتالي لا يمكن تقطير المصفوفة فهنا تفشل طريقة التحليل الطيفي وتبرز أهمية طريقة جوردان [4]، [3]. التي تعمل في هذه الحالة كما نستطيع أيضاً تطبيق طريقة الحل التكاملي وكرونكر

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ نأخذ } Q \text{ موجبة التحديد ومتناظرة ونحول شكل جوردن}$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ ونوجد أيضا}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ نحل المعادلة المحولة } Qg = -J^T Pg \text{ وبأخذ التحويل العكسي}$$

$$P = M^{-T} Q M^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.3289 & 0.1024 & -0.0755 \\ 0.1024 & 1.2164 & 0.4443 \\ 0.0755 & 0.4443 & 0.4889 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن $\|A^*P + PA + Q\| \leq 10^{-14}$ حيث أن القيم الذاتية للمصفوفة P هي

$$\{1.43, 0.42, 0.19\} > 0$$

5.4 الحالة الرابعة: A مصفوفة غير مستقرة

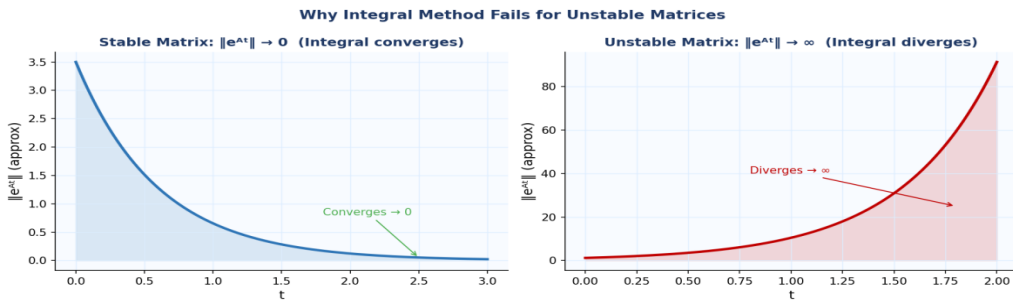
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ولنأخذ } Q = I \text{ فإن القيم الذاتية}$$

للمصفوفة

$$I_1 \gg 2.7, \quad I_2 \gg 0.78, \quad I_3 \gg -2.9$$

إن المصفوفة غير مستقرة وذلك لأن القيم الذاتية بعضها موجب عند حلها بطريقة كرونكر تكون K قابلة للقلب لأن مجموع القيم الذاتية لا يساوي الصفر وبالتالي نحصل على مصفوفة الحل متناظرة وتحقق المعادلة لكنها ليست موجبة التحديد $P > 0$. أما بطريقة الحل التكاملي فإن التكامل يتباعد وذلك بسبب القيم الذاتية الموجبة أما بقية الطرائق تعطي حلاً غير موجب التحديد وهذه يؤكد أنها غير مستقرة، وفق عكس مبرهنة ليابونوف على أن انعدام موجبية P يثبت عدم استقرار النظام مباشرةً [2]، [3].

$$P = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.9 & 0.2 \\ 0.9 & 0.8 & 2 \\ 0.2 & 2 & -1.5 \end{pmatrix} \quad \text{حيث أن قيمها الذاتية } \{-2.71, -1.37, 2.19\}$$



الشكل (5): سلوك $\|e^{At}\|$: يتلاشى للمستقرة (التكامل يتقارب) ويتضخم لغير المستقرة (التكامل

يتباعد)

5.5 القيم الذاتية للمصفوفة A على المحور التخيلي

نختار مصفوفة لها قيم ذاتية على المحور التخيلي $\text{Re}(I_i) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ولتكن } I_{12} = \pm i, I_3 = -2 \text{ هي القيم الذاتية عندئذ تكون}$$

$$I_1 + I_2 = 0$$

عندئذ نقول عن المصفوفة أنها مستقرة حدياً لا تقاربياً وهي تمثل الحدّ النظري الذي تعجز عنده النظرية الكلاسيكية أي أن عندما القيم الذاتية على المحور التخيلي تفشل نظرية ليبانوف لأن شرطها أن تكون القيم الذاتية على يسار المحور التخيلي

عند تطبيق طريقة كرونكر المصفوفة K يكون لها $I_1 + I_2 = 0$ وبالتالي تكون شاذة [4]، وبالتالي إما لا يملك النظام حلاً، أو يملك عدداً غير منتهٍ من الحلول. وفي الطريقة الطيفية، تتضمن الصيغة (4.5) القسم على $(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$ ، فنحصل على صيغة غير معروفة. كذلك تفشل طريقة جوردان للسبب نفسه. أما الحل التكاملي، فيتباعد لأن $\|e^{At}\|$ لا يسعى إلى الصفر عندما $t \rightarrow \infty$. تمثل هذه الحالة الحدّ الفاصل لنظرية ليبانوف الكلاسيكية

5.6 معادلة ليبانوف التفاضلية المصفوفية متغيرة الزمن:

$$P'(t) + A^*(t)P(t) + P(t)A(t) = -Q(t)$$

حيث المصفوفة $A(t)$ متغيرة مع الزمن:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & -t \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ونختار $Q = I_2$ (مصفوفة الوحدة) المصفوفة $A(t)$ مثلثية عليا، وبالتالي قيمها الذاتية هي عناصرها القطرية:

$$I_1 = -1, \quad I_2 = -2$$

وهذه القيم ثابتة ولا تتغير مع الزمن رغم أن $A(t)$ متغيرة، وكلاهما سالب، فإن النظام

$$\dot{X} = A(t)X \quad \text{مستقر بالتساوي (Uniformly Stable).}$$

ملاحظة: رغم ثبات القيم الذاتية، فإن العنصر $a_{12}(t) = -t$ يتزايد بالقيمة المطلقة مع الزمن، مما يجعل مصفوفة الحل $P(t)$ متغيرة ولا يمكن اختزالها إلى معادلة جبرية كما في الحالة الثابتة [8]. إن طريقة الحل التكاملي هي الطريقة الوحيدة التي تطبق مباشرة في هذه الحالة عبر مصفوفة الانتقال حيث أن الطرائق الأخرى تتطلب تحديثاً لحظياً للقيم الذاتية والمتجهات الذاتية.

نحسب مصفوفة الانتقال $\Phi(\tau, s)$

$$F(t, s) = \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} & (t+1)e^{-2(t-s)} - (s+1)e^{-(t-s)} \\ 0 & e^{-2(t-s)} \end{pmatrix}$$

حساب عناصر $P(t)$ تحليلياً

$$P(t) = \int_t^\infty F(t, \tau)^T F(\tau, t) d\tau \quad \text{نحسب} \quad Q = I \quad \text{حان}$$

النتيجة التحليلية الكاملة

$$P(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3t+1}{18} \\ \frac{3t+1}{18} & \frac{(t+1)^2}{12} - \frac{7(t+1)}{72} + \frac{9}{32} \end{pmatrix}$$

القيم العددية عند بعض النقاط الزمنية

t	p_{11}	p_{12}	p_{22}	$\det(P)$
0	0.5000	-0.0556	0.2674	0.1306
0.5	0.5000	-0.1389	0.3229	0.1422
1.0	0.5000	-0.2222	0.4201	0.1607
2.0	0.5000	-0.3889	0.7396	0.2186
3.0	0.5000	-0.5556	1.2257	0.3042
5.0	0.5000	-0.8889	2.6979	0.5587

المقارنة مع الحل العددي BDF-2

للتحقق تُقارن الحل التحليلي مع طريقة BDF-2 (نتراجع الفرق الخلفية من الرتبة الثانية):

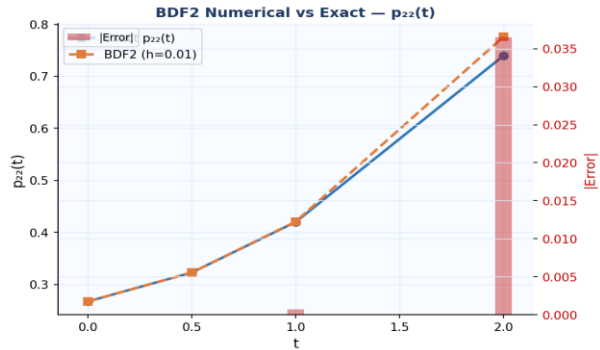
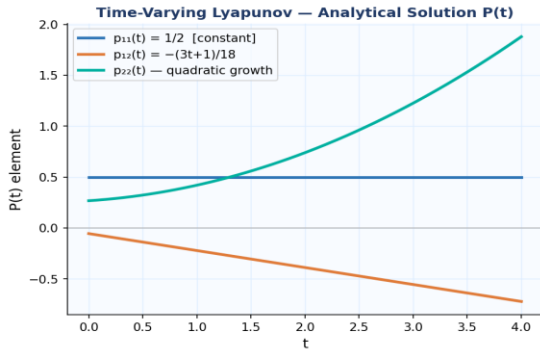
الجدول (3): مقارنة الحل التحليلي مع BDF-2 ($p_{22}(t)$)

الخطأ	$2-BDF p_{22}$	p_{22}	p_{12}	p_{11}	t
0	0.2674	0.2674	-0.0556	0.5	0
10×10^{-5}	0.3230	0.3229	-0.1389	0.5	0.5

مقارنة لأهم الطرائق لحل معادلة ليايونوف المصفوفية تحليلياً

$4^{-10 \times 6.7}$	0.4208	0.4201	-0.2222	0.5	1
$2^{-10 \times 3.7}$	0.7761	0.7396	-0.3889	0.5	2

Time-Varying Lyapunov: $A(t) = [[-1, -t], [0, -2]]$, $Q = I_2$



ملخص نتائج الحالات الست

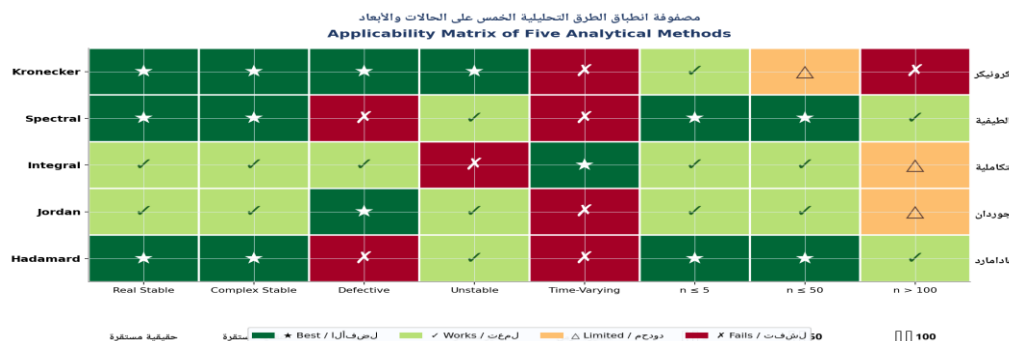
يتضمن الجدول الآتي نتائج تطبيق الطرائق الخمس على جميع الحالات المدروسة:

هادامارد	جوردان	الحل التكاملي	الطيفية	كرونيكر	الحالة
✓	✓	✓	✓	✓	(1) حقيقية مستقرة
✓	✓	✓	✓	✓	(2) عقدية مستقرة
✗	✓	✓	✗	✓	(3) غير قابلة للتقطير (Defective)
✓	✓	✗	✓	✓	(4) غير مستقرة
✗	✗	✓	✗	✗	(5) متغيرة بالزمن

هـادامارد	جوردان	الحل التكاملي	الطيفية	كرونكر	الحالة
X	X	X	X	X	(6) درجة (محور تخيلي)

6 . مصفوفة التوافق (الانطباق) الكاملة

بدمج جميع الحالات والأبعاد في تمثيل واحد، يُقدّم الشكل (3) مصفوفة التوافق التي تكشف عن ثلاث حقائق رئيسية: (أ) لا توجد طريقة "فضلى" مطلقة بل لكل حالة طريقة مُثلى، (ب) الطرائق الخمس متكاملة وليست متنافسة، (ج) الحالة الحرجة تُمثّل لون "الفضل الموحّد" لأنها خارج نطاق نظرية لبانوف.



الشكل (3): مصفوفة انطباق الطرائق التحليلية الخمس على الحالات والأبعاد

7. نتائج القياس عبر الأبعاد

تُلخّص النتائج التجريبية المرصودة على جهاز HP OmniBook 7 + MATLAB R2024b زمن التنفيذ الفعلي لكل طريقة عبر الأبعاد:

مقارنة لأهم الطرائق لحل معادلة ليايرونوف المصفوفية تحليلياً

هادا مارد	جوردن	الحل التكاملي	الطيفية	كرونيك	n
3.8ms	37.9ms	96.5ms	19.9ms	4.3ms	3
521ms	2.9ms	8.7ms	730ms	2.5ms	5
226ms	5.6ms	12.4ms	3.4ms	6.5ms	10
502ms	8ms	11.4ms	837ms	286ms	15
1.4ms	7.2ms	10.6ms	8.3ms	4.4ms	20
411ms	2.1ms	9.9ms	673ms	13.4ms	25
744ms	2ms	14.2ms	3.3ms	262.4ms	30
2ms	5.5ms	73.9ms	9.6ms		50
3.2ms		153.4ms	4.1ms		75
6.5ms		186.9ms	7.5ms		100
23.3ms		671.5ms	21.4ms		150
39.1ms		1.01s	42.1ms		200
62.4ms			63.8ms		300
155.6ms			166.8ms		500

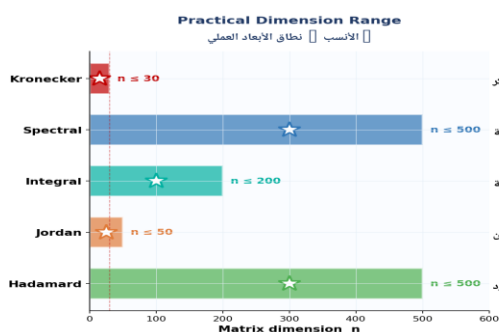
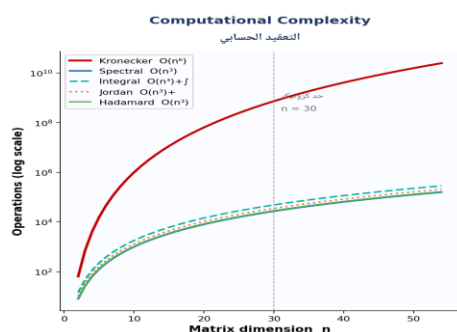
جدول زمن التنفيذ المرصود تجريبياً (MATLAB R2024b، HP OmniBook 7).

تؤكد النتائج التحليل النظري للتعقيد الحسابي: تُحقّق الطريقتان الطيفية وهادامارد $O(n^3)$ فعلياً، وتعملان حتى

$n = 500$. أما طريقة كرونكر فتبدأ بتجاوز قدرات الذاكرة العملية عند $n > 100$ ، وتُفشل تماماً عند $n > 150$. الطريقة التكاملية تعمل حتى $n \approx 200$ ، وطريقة جوردان حتى $n \approx 50$ نظراً لحساسيتها العددية المرتفعة

نطاقات الأبعاد العملية

يُجمع الشكل (4) بين منحنى التعقيد الحسابي النظري بمقياس لوغاريتمي (يساراً) ونطاقات الأبعاد الفعلية المرصودة على الجهاز المُستهدف (يميناً). يتضح أن منحنى كرونكر $O(n^6)$ ينفصل عن باقي الطرائق التي تتجمع في نطاق $O(n^3)$.



الشكل (4): التعقيد الحسابي ونطاقات الأبعاد العملية

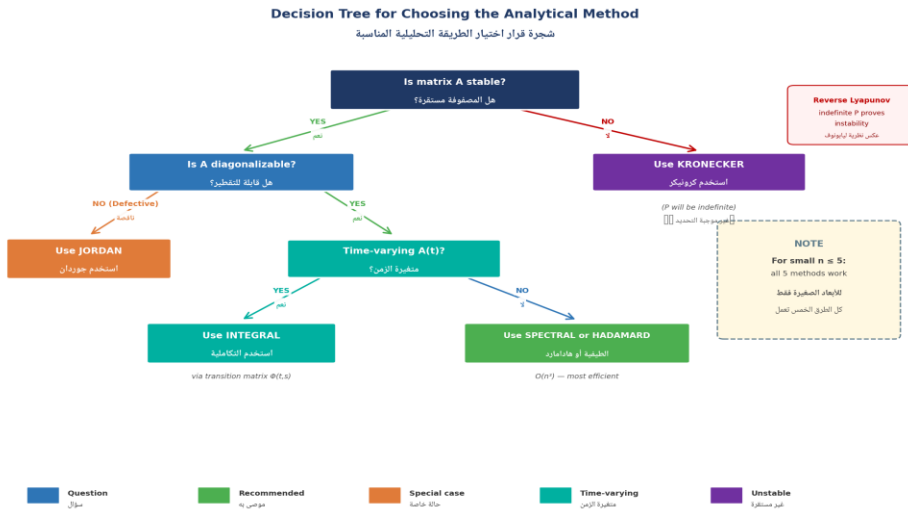
8 شجرة قرار اختيار الطريقة

بناءً على التحليل المنهجي السابق، نُلخص قرار اختيار الطريقة المناسبة في صورة شجرة قرار تبدأ بالسؤال الجذري عن استقرار A ، ثم تتفرّع إلى مسارات بناءً على قابلية التقطير والاعتماد الزمني، مُنتهيةً إلى توصية صريحة بطريقة محدّدة:

- إذا كانت A مستقرة وقابلة للتقطير، $n \leq 500$ ← التحليل الطيفي ★ (البديل:

هادامارد).

- إذا كانت A غير قابلة للتقطير ← جوردان ★ (البديل: كرونكر).
- إذا كانت A غير مستقرة (لإثبات عدم الاستقرار) ← كرونكر ★ (البديل: الطيفية).
- إذا كانت A متغيرة بالزمن ← الحل التكاملي ★ (لا بديل تحليلياً مباشراً).
- إذا كانت A حرجة (محور تخيلي) ← نقشل الطرائق الخمس، ويُستعاض بنظريات معممة (LaSalle).



الشكل (5): شجرة قرار اختيار الطريقة التحليلية المناسبة

9. الاستنتاجات والتوصيات

(١) تكافؤ الطرائق الصحيحة: تُعطي الطرائق الخمس نتائج مُتطابقة بدقة تفوق 10^{-14} لأي مصفوفة مستقرة قابلة للتقطير، مما يؤكد التكافؤ الرياضي رغم اختلاف بنائها الحسابية.

(٢) لكل طريقة نطاقها الأنسب: جوردان للحالة غير قابلة للتقطير (لا بديل تحليلي)، الحل التكاملي وحيدة للحالة المتغيرة بالزمن، كرونكر الأشمل نظرياً ($O(n^6)$) وتتج في غير المستقرة بينما نقشل

طريقة الحل التكاملي ، والطيفية وهادامارد الأكفاً للحالات القياسية. الطرائق الأربع (عدا التكاملية) تعمل في الحالة غير المستقرة لكن المصفوفة P الناتجة لا تكون موجبة التحديد، وهو ما يُثبت عدم الاستقرار وفقاً لعكس مبرهنة ليايونوف.

(٣) حالة المصفوفة التي لها قيم ذاتية على المحور التخيلي هي حد النظرية: عند وجود قيم ذاتية على المحور التخيلي ($\lambda = \pm i\omega$) نقسّل الطرائق الخمس نظرياً، وهذا انعكاسٌ مباشر لنظرية الوجدانية ولشروط شور –Sylvester.

(٤) عكس ليايونوف موثّق برمجياً: في حالة عدم الاستقرار، انعدام موجبية P يُثبت عدم الاستقرار مباشرةً ويُكافئ الشرط النظري الكلاسيكي.

(٥) مطابقة النظرية للممارسة: التحقق العددي عبر MATLAB أكّد بدقة كاملة كل الادعاءات النظرية، مما يعزّز الثقة العلمية في المقارنة المُقدّمة

10 المراجع

- [1] LYAPUNOV, A.M., 1892- The General Problem Of The Stability Of Motion, Kharkov Mathematical Society, Russia. (English translation: International Journal of Control, 55(3): 531-773, 1992).
- [2] KHALIL, H.K., 2002- Nonlinear Systems, Prentice Hall 3rd Edition, USA.
- [3] GAJIC, Z. and QURESHI, M.T.J., 1995- Lyapunov Matrix Equation In System Stability And Control, Academic Press, USA.
- [4] HORN, R.A. and JOHNSON, C.R., 2013- Matrix Analysis, Cambridge University 2nd Edition, UK.

- [5] LANCASTER, P. and TISMENETSKY, M., 1985- The Theory Of Matrices, Academic Press 2nd Edition, USA.
- [6] GOLUB, G.H. and VAN LOAN, C.F., 2013- Matrix Computations, Johns Hopkins University 4th Edition, USA.
- [7] BARTELS, R.H. and STEWART, G.W., 1972- Algorithm 432: Solution Of The Matrix Equation $AX + XB = C$, Communications of the ACM, 15(9): 820-826.
- [8] HAMMARLING, S.J., 1982- Numerical Solution Of The Stable Non-Negative Definite Lyapunov Equation, IMA Journal of Numerical Analysis, 2(3): 303-323.
- [9] HACHED, M. and JBILOU, K., 2018- Numerical Solutions To Large-Scale Differential Lyapunov Matrix Equations, Numerical Algorithms, 79(1): 741-757.
- [10] SIMONCINI, V., 2007- A New Iterative Method For Solving Large-Scale Lyapunov Matrix Equations, SIAM Journal on Scientific Computing, 29(3): 1268-1288.
- [11] ANDERSON, B.D.O. and MOORE, J.B., 1990- Optimal Control: Linear Quadratic Methods, Prentice Hall, USA.
- [12] ANTSAKLIS, P.J. and MICHEL, A.N., 2006- Linear Systems, Birkhäuser 2nd Edition, USA.
- [13] SAAD, Y., 2003- Iterative Methods For Sparse Linear Systems, SIAM 2nd Edition, USA.
- [14] LASALLE, J.P., 1976- The Stability Of Dynamical Systems, SIAM, USA.
- [15] SIMONCINI, V., 2016- Computational Methods For Linear Matrix Equations, SIAM Review, 58(3): 377-441.
- [16] BHATIA, R., 1997- Matrix Analysis, Springer Graduate Texts in Mathematics 169, USA.
- [17] BENNER, P., PALITTA, D. and SAAK, J., 2023- On An Integrated Krylov-ADI Solver For Large-Scale Lyapunov Equations, Numerical Algorithms, 92(1): 35-63.
- [18] NIE, S. and DAI, H., 2025- A Global Rational Krylov Subspace Algorithm For Solving Large-Scale Lyapunov Matrix Equation, Numerical Linear Algebra with Applications, 32(2): e70027.

- [19] CHACHA, C.S., 2025- A Comprehensive Review Of Matrix Equations In Dynamical Systems And Control Theory, Journal of Applied Mathematics, 2025(1): 3745816.
- [20] PENZL, T., 2000- A Cyclic Low-Rank Smith Method For Large Sparse Lyapunov Equations, SIAM Journal on Scientific Computing, 21(4): 1401-1418.

