حلول تحليلية لمعادلة فريدمان الأولى في نموذج كون مادي فقط وتطبيقاتها على العمر والمصير الكوني

د. جبُور نوفل جبُور [1]
د. جهاد كامل ملحم [2]
سعادة جرجس ديوب[3]

ملخص

يقدّم هذا البحث دراسة تحليلية وعددية لمعادلة فريدمان الأولى في نموذج مبسط يعتمد على كون مادي فقط دون إشعاع أو طاقة مظلمة. بالاستناد إلى الصياغة الكلاسيكية لفريدمان ولوميتر، يتم تحليل أثر معاملات الكثافة على تطور عامل القياس، وشكل الكون، وعمره، ومصيره المستقبلي.

تُظهر الحلول التحليلية أن الكون يبدأ من حالة تفرد عند a=0، ويستمر في التمدد إلى ما لا نهاية عندما تكون كثافة المادة أقل من الكثافة الحرجة. كما تشير الحسابات العددية إلى أن عمر الكون في هذا النموذج يبلغ نحو 10.38 مليار سنة، وهي قيمة أقل من العمر الرصدي المعتمد (13.8 مليار سنة وفق أرصاد Planck 2018) ، وذلك بسبب إهمال مساهمة الطاقة المظلمة والإشعاع.

يركّز هذا العمل على المستقبل الكوني، ويقدّم معالجة تعليمية مبسطة للحلول التحليلية، مع جداول ومنحنيات توضّح اعتماد الزمن على عامل المقياس ومعاملات الكثافة. وتُعد هذه الدراسة خطوة تمهيدية لفهم تأثير كل مركبة كونية على مصير الكون ضمن نماذج أكثر شمولًا.

كلمات مفتاحية: معادلات أينشتاين في النسبية العامة، معادلات فريدمان، شكل الكون، تضخم الكون، إنحناء الكون، عمر الكون

([1]) أستاذ في قسم الفيزياء – كلية العلوم– جامعة اللاذقية – اللاذقية – سورية.
([2]) أستاذ في قسم الفيزياء – كلية العلوم – جامعة اللاذقية – اللاذقية – سورية.
([3]) طالب دراسات عليا (دكتوراه) – اختصاص فيزياء إشعاعية – قسم الفيزياء – كلية العلوم – جامعة اللاذقية – اللاذقية – سورية.

Analytical solutions to the first Friedmann equation in a matter-only universe model and their applications to the cosmic age and fate.

Dr. Jabbour Noufal Jabbour[4]
Dr. Jehad Kamel Mulhem[5]
Saadeh Jerjose Daiyoub[6]

ABSTRACT

This research presents analytical and numerical solutions to the first Friedmann equation within a simplified cosmological model that assumes a matter-only universe, neglecting radiation and dark energy. Building on the classical formulations of Friedmann and Lemaître, the work examines how density parameters influence the evolution of the scale factor, the geometry of the universe, its age, and its future behavior.

The analytical solutions show that the universe originates from a singular state at a=0 and expands indefinitely when the matter density is below the critical value. Numerical calculations yield an age of approximately 10.38 billion years, lower than the observational estimate of 13.8 billion years from Planck 2018, due to the omission of dark-energy and radiation contributions.

This study provides an accessible educational treatment of analytical solutions, supported by tables and plots illustrating the dependence of cosmic time on the scale factor, offering a foundation for more comprehensive cosmological models.

([4]) Professor, Physics Department, Faculty of Science, Lattakia University, Lattakia, Syria.
([5]) Professor, Physics Department, Faculty of Science, Lattakia University, Lattakia, Syria.
([6]) Postgraduate Student, Radiation Physics, Department of Physics, Faculty of Science, Lattakia University, Lattakia, Syria.

Keywords: Einstein's equations of general relativity, Friedmann equations, shape of the universe, inflation of the universe, curvature of the universe, age of the universe

1- مقدمة:

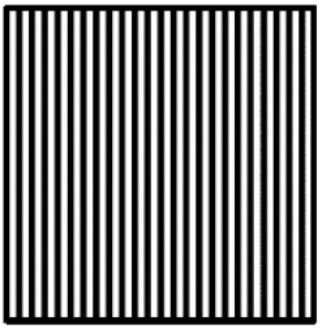
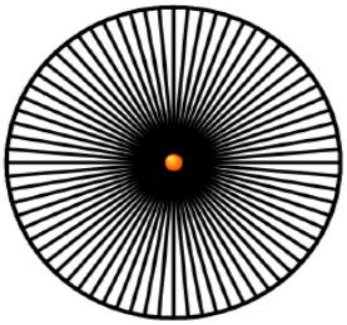
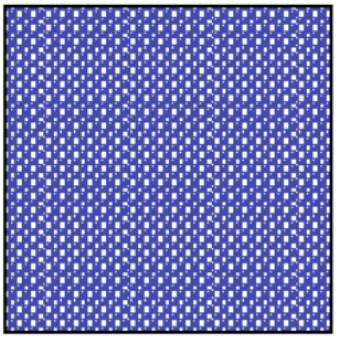
ما هي معادلات فريدمان؟

تُعرف معادلات فريدمان (أو معادلات فريدمان–لوميتر–روبرتسون–ووكر) بأنها الصياغة الكونية لمعادلات أينشتاين في النسبية العامة، وذلك عندما يُفترض أن الكون متجانس ومتساوي المناحي على المقاييس الكبيرة [1، 2]. صِيغت هذه المعادلات لأول مرة من قبل الفيزيائي الروسي ألكسندر فريدمان عام 1922 [3]، ثم طورها بشكل مستقل الفيزيائي البلجيكي جورج لوميتر عام 1927 [4]. وهي تصف تطور عامل المقياس الكوني (Scale Factor) بدلالة الزمن، معتمدة على محتوى الكون من المادة والإشعاع والطاقة المظلمة، وكذلك على هندسته (مسطح، مغلق أو مفتوح).[6]

تكمن الأهمية الجوهرية لهذه المعادلات في قدرتها على وصف تمدد الكون. فباستخدام قانون هابل التجريبي، الذي ينص على أن المجرات تبتعد عنا بسرعة تتناسب مع بعدها [7]، تتنبأ المعادلات بأن الكون كان أصغر حجماً وأعلى كثافة في الماضي، مما أدى إلى نشوء نظرية الانفجار العظيم (Big Bang).

وقد تم تأكيد هذا التمدد من خلال العديد من الأرصاد، أبرزها إشعاع الخلفية الكونية الميكروي (CMB) [8]، والذي يُعتبر "الصورة" الحرارية للكون عندما كان عمره 380,000 سنة فقط. على الرغم من النجاحات الهائلة لنموذجΛCDM ، تبقى معادلات فريدمان الإطار الأساسي لفهم تاريخ الكون وتطوره [5].

أنماط التجانس وتساوي المناحي موضحة في الشكل (1). تمثل هذه الأنماط الخصائص الهندسية الأساسية للكون على المقاييس الكبيرة، وهي الافتراضات الرئيسية التي تقوم عليها معادلات فريدمان.

		
Homogenous but not isotropic **متجانس لكن غير متساوي المناحي**	**Isotropic at the center but not Homogenous** **متساوي المناحي في المركز** **لكن غير متجانس**	**Homogenous and isotropic** **متجانس ومتساوي المناحي**

شكل (1): يوضح مفهوم التجانس وتساوي المناحي.

1-2- معادلات فريدمان كلاسيكياً (انطلاقاً من مفاهيم نيوتن):

تكتب معادلات فريدمان الثلاثة، انطلاقاً من مفاهيم ميكانيك نيوتن على الشكل:

المعادلة الأولى لفريدمان	$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}$
المعادلة الثانية لفريدمان	$\frac{a''}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho$
معادلة مائع كوني لفريدمان	$\frac{d\rho}{dt} + 3H\rho = 0$

حيث ρ يرمز لكثافة مادة الكون، G يرمز لثابت الجاذبية، و K يرمز لانحناء الكون. ونرمز لمعامل أو لثابت هابل بـ H، بينما نرمز للعامل السلمي بـ a ولمشتقه بـ a''.

1-3- معادلات فريدمان النسبية:

إن المعادلات النسبية الثلاث لفريدمان هي:

المعادلة الأولى لفريدمان	$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K.c}{a^2}$
المعادلة الثانية لفريدمان	$\frac{a''}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3\frac{P}{c^2}\right)$
معادلة مائع كوني لفريدمان	$\frac{d\rho}{dt} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0$

تشبه هذه المعادلات نظيراتها الكلاسيكية، إلا أنها تأخذ في الاعتبار طبيعة الكتلة–الطاقة في النسبية العامة، حيث تختلف الكثافات العطالية والثقالية الفعالة وغير الفعالة بحسب الحالة الفيزيائية. وتُعد حالة المائع الكامل الحالة التي يمكن فيها تحديد هذه الكثافات بدقة. وبافتراض أن الكون مملوء بمائع متجانس يضم المادة والإشعاع والمجرات، وأن درجة الحرارة والكثافة والضغط موحدة في كل مكان، يمكن استخدام المعادلات الكلاسيكية بعد إجراء الاستبدالات المناسبة.

2- هدف البحث:

تهدف هذه الدراسة إلى تحليل معادلة فريدمان الأولى وتقديم حلول تحليلية وعددية لها في حالات خاصة تعتمد على نموذج كوني مبسّط مكوّن من المادة فقط، وذلك بهدف استكشاف تأثير معاملات الكثافة على تطور عامل المقياس وشكل الكون وعمره ومصيره المستقبلي، سواء من حيث التمدد غير المحدود أو الانهيار نحو حالة الانسحاق الكبير (الانكماش الى نقطة).

3- طرائق البحث ومواده:

يرتكز هذا العمل على منهج تحليلي وعددي لدراسة معادلة فريدمان الأولى ضمن نموذج كوني مبسّط يعتمد على المادة فقط، مع استخدام المعاملات الكونية القياسية وافتراض التجانس وتماثل المناحي. وقد جرى تحليل الحلول رياضيًا، ثم استكمالها عددياً عبر جداول ومنحنيات توضّح اعتماد الزمن على عامل المقياس ومعاملات الكثافة.

3-1- الصياغة البارامترية لمعادلة فريدمان الأولى:

أدخلت في علم الكون مفاهيم أساسية مثل **تمدد الكون** و**العامل السلمي**، مما يسمح بكتابة معادلة فريدمان الأولى التي تصف تغير عامل المقياس $a(t)$ بدلالة الزمن وبحسب محتوى الكون من المادة والإشعاع والطاقة المظلمة. كما تُستخدم العلاقات التي تربط الكثافة بتطور الزمن ومحتوى الكون. بوضع هذه المفاهيم معًا، تُكتب معادلة فريدمان–لوميتر الأولى على الشكل:

$$H^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \qquad (1)$$

حيث ρ يرمز للكثافة لمختلف المركبات التي يمكن أن تكون المركبة المتعلقة بالمادة أو المتعلقة بالإشعاع بشكل رئيسي. الحد $\frac{kc^2}{a^2}$ يمثل انحناء الزمكان، حيث $(k = +1, 0, -1)$، بحسب انحناء الزمكان بجهة أو بجهة أخرى أو أن يكون مسطح. الحد $\frac{\Lambda c^2}{3}$ يمثل الثابت الكوني.

تُعطى العلاقات التي تصف تطور كثافة المادة والإشعاع بالعلاقات [9–16]:

$$\rho_m = \rho_m^0\, a^{-3} \quad , \quad \rho_r = \rho_r^0\, a^{-4}$$

واصطلاحاً، نفرض أن العامل السلمي اليوم أي في اللحظة الحالية (ليس في بداية الزمن ولكن في اللحظة الحالية) أي من أجل $t = 0$ يساوي الواحد $a = 1$.

سنهتم هنا بحل المعادلة التفاضلية السابقة في بعض الحالات الخاصة، حيث ليس لتلك المعادلة حل عام. ومن أجل ذلك سنعتمد المصطلحات الآتية المعتمدة عادة في علم الكون.

سنعرف أولاً بما يُدعى بالكثافة الحرجة (critic density) والتي تُعطى بالعلاقة:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c$$

حيث H_0 ثابت هابل الحالي (في تلك اللحظة). والتفسير الفيزيائي لتلك العلاقة هو أن الكثافة الحرجة لكون هي الكثافة لكون مسطح (دون انحناء $k = 0$) ودون ثابت كوسمولوجي أي $\Lambda = 0$. وتبلغ قيمتها تقريباً: $\rho_c \sim 10^{-26} kg.m^{-3}$ أو $\rho_c \sim 6\, m_p m^{-3}$، حيث m_p ترمز لكتلة البروتون، أي ما يعادل 6 بروتونات بالمتر المكعب. بقسمة المعادلة (1) على H_0^2 نجد أن:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_c} - \frac{3kc^2}{8\pi G\rho_c}a^{-2} + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho_c} \qquad (2)$$

ونكتب الكثافة على شكل مجموع كثافة المادة وكثافة الإشعاع: $\rho = \rho_m + \rho_r$. والعلاقة (2) تصبح على النحو الآتي:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_m}{\rho_c} + \frac{\rho_r}{\rho_c} - \frac{3kc^2}{8\pi G\rho_c}a^{-2} + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho_c} \qquad (3)$$

وهنا نعتمد اصطلاحات خاصة حيث نرمز لكل من المقادير بـ:

$$\frac{\rho_m}{\rho_c} \equiv \Omega_m \ , \ \frac{\rho_r}{\rho_c} \equiv \Omega_r \ , \ \Omega_k = -\frac{3kc^2}{8\pi G\rho_c}a^{-2} \ , \ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho_c}$$

وهـذه المعـاملات الأربعـة يُطلق عليهـا اسـم "**معـاملات كوسـمولوجيـة– Cosmological parameters**" تصـف مسـاهمة كل مركبة من المركبات: مادة، إشـعاع، انحناء، والثابت الكوسمولوجي المحتواة في الكون بالنسبة للكثافة الحرجة. وبما أن:

$$\rho_m = \rho_m^0 a^{-3}$$

فنكتب:

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{\rho_m^0}{\rho_c} a^{-3} \ , \ \Omega_m^0 \equiv \frac{\rho_m^0}{\rho_c}$$

ونقوم بنفس العملية من أجل بقية المعاملات فنجد:

$$\Omega_m = \Omega_m^0 a^{-3} \ , \ \Omega_r = \Omega_r^0 a^{-4} \ , \ \Omega_k = \Omega_k^0 a^{-2}$$

وبالتعويض في المعادلة (3) نحصل على:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m^0 a^{-3} + \Omega_r^0 a^{-4} + \Omega_k^0 a^{-2} + \Omega_\Lambda \qquad (4)$$

الملاحظة الأولى أن هذه المقادير (ليس لها واحدة). وهذه المعادلة تُظهر المركبات الحالية للكون. إن المقادير: Ω_m^0، Ω_r^0، Ω_k^0، المركبات الحالية للمادة، للإشـعاع، وللانحناء على التوالي. بينما Ω_Λ تمثل مركبة الثابت الكوني. ونريد الآن حل هذه المعادلة التفاضـلية (الشـكل التفاضـلي لمعادلة فريدمان الأولى) في بعض الحالات الخاصة:

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m^0 a^{-3} + \Omega_r^0 a^{-4} + \Omega_k^0 a^{-2} + \Omega_\Lambda \qquad (5)$$

نسـتعرض هنا بعض الحالات الخاصـة التي يمكن فيها الحصـول على حلول تحليلية لمعادلة فريدمان الأولى.

3-2- حلول خاصة لمعادلة فريدمان الأولى:

تُكتب المعادلة السابقة على الشكل:

$$a' = \pm H_0 \{\Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_r^0 a^{-2} + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda a^2\}^{1/2} \qquad (6)$$

يتم فصل المتحولات للحصول على صيغة قابلة للتكامل، لتصبح المعادلة كمايلي:

$$\frac{da}{\sqrt{\{\Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_r^0 a^{-2} + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda a^2\}}} = \pm H_0 dt \qquad (7)$$

حيث قيم Ω ثوابت بينما المتحول هو a. في الحالة العامة ليس هناك معادلة تحليلية للمعادلة السابقة أي ليس هناك حل تحليلي ولكن يمكن حلها عددياً بمساعدة برنامج على الكومبيوتر، حيث يتم برمجة تلك المعادلة ومن ثم حلها. والذي يهمنا هو إيجاد وضع أو أوضاع فيزيائية مهمة حيث يمكننا حل تلك المعادلة التفاضلية. ونركّز فيما يلي على معالجة رياضية للحالات التي تسمح بحلول تحليلية.

سنهتم بأوضاع حيث بعض قيم Ω تكون معدومة علماً أن هذه القيم غير مستقلة عن بعضها البعض. إذا أخذنا حدود المعادلة:

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m^0 a^{-3} + \Omega_r^0 a^{-4} + \Omega_k^0 a^{-2} + \Omega_\Lambda \qquad (5)$$

في اللحظة الحالية أي عند $t = 0$، فقيمة العامل السلمي $a = 1$ فيكون لدينا:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m^0 + \Omega_r^0 + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda \qquad (8)$$

وإن مجموع المركبات الكونية في اللحظة الحالية (شرط الاتزان الكوني):

$$\Omega_m^0 + \Omega_r^0 + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda = 1 \qquad (9)$$

وبالتعويض في المعادلة (7) ينتج:

$$\frac{da}{\sqrt{\Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_r^0 a^{-2} + (1 - \Omega_m^0 - \Omega_r^0 - \Omega_\Lambda) + \Omega_\Lambda a^2}} = \pm H_0 dt \qquad (10)$$

3-3-حل خاص لمعادلة فريدمان الأولى من أجل $(\Omega_r^0 = \Omega_\Lambda = 0)$:

الوضع الفيزيائي الأول الذي سنهتم به هو أن مساهمة الإشعاع معدومة وبالتالي الثابت الكوني معدوم، وهذا يوافق كون لا يوجد فيه إلا المادة. والمعادلة تصبح على الشكل:

$$\frac{da}{\sqrt{\Omega_m^0 a^{-1} + (1 - \Omega_m^0)}} = \pm H_0 dt \qquad (11)$$

وبإعادة ترتيب الحدود، يمكن كتابة المعادلة على الشكل:

$$\frac{da}{\sqrt{a^{-1} + \frac{1 - \Omega_m^0}{\Omega_m^0}}} = \pm H_0 \sqrt{\Omega_m^0}\, dt \qquad (12)$$

ونلجأ لتغيير المتحولات حيث سنرمز بـ b للمقدار:

$$b \equiv \frac{1 - \Omega_m^0}{\Omega_m^0}$$

ويسهّل هذا التغيير عملية التكامل لاحقاً.

4- النتائج ومناقشتها:

نستعرض في هذا القسم النتائج المستخلصة من الحلول التحليلية والعددية، مع مناقشة سلوك العامل السلمي والزمن الكوني.

4-1- من أجل القيم الموجبة لـ $b > 0$ أي أن $(\Omega_m^0 < 1)$:

وتمثل الحالة b>0 كونًا تكون فيه كثافة المادة أقل من الكثافة الحرجة. ومنه فإن:

$$\frac{da}{\sqrt{a^{-1}+b}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\, dt \qquad (13)$$

ولإجراء التكامل، نستخدم طريقة مناسبة تعتمد على تغيير المتحولات فمثلاً نضرب ونقسم الطرف الأيسر بـ $\sqrt{a}$ نكتب:

$$\frac{\sqrt{a}\, da}{\sqrt{1+ab}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\, dt \qquad (14)$$

ومن ثم نغير المتحولات بفرض أن: $ab = sinh^2 u$ بشرط أن يكون b موجب(وهذا التغيير شائع في الحلول التحليلية لمعادلات فريدمان) وإلا يجب القيام بشيء آخر. ومنه فإن:

$$ab = sinh^2 u \rightarrow a = \frac{1}{b}\, sinh^2 u \rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{b}} sinh\, u$$
$$\rightarrow da = \frac{2}{b}\sinh u \cosh u\, du$$

وبالتبديل في العلاقة (14) ينتج:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{b}}\sinh u \times \frac{2}{b}\, \sinh u \cosh u\, du}{\sqrt{1+sinh^2 u}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\, dt$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{b}}\sinh u \times \frac{2}{b}\, \sinh u \cosh u\, du}{\cosh u} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\, dt \qquad (15)$$

وبعد التبسيط نجد:

$$\frac{2}{b^{3/2}}\sinh^2 u du = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\, dt \qquad (16)$$

علماً أن:

$$\int sinh^2 u\, du = \frac{1}{4}\sinh 2u - \frac{u}{2}$$

وبالمكاملة نجد:

$$\int \frac{2}{b^{3/2}}\sinh^2 u du = \int \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\, dt \qquad (16')$$

$$\frac{1}{2b^{3/2}}[\sinh 2u - 2u] = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\,[t] \qquad (17)$$

ونأخذ حدود التكامل الموافقة لـــــ $t = 0$، أي الآن، وإلى قيمة أخرى هي t لا على التعيين. ومن أجل $t = 0$ فإن قيمة u الموافقة هي من أجل قيمة للعامل السلمي تساوي الواحد $a = 1$، أي أن:

$$t = 0 \to a = 1 \to ab = \sinh^2 u \to \sqrt{ab} = \sinh u \to \sqrt{b} = \sinh u$$
$$\to u = \operatorname{arc}\sinh\sqrt{b}$$
$$cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

ومن أجل قيمة لا على التعيين لـــــ a فإن قيمة $u = \operatorname{arc}\sinh\sqrt{ab}$، ومنه تصبح المعادلات كما يلي:

$$\frac{1}{2b^{3/2}}[\sinh 2u - 2u]_{\operatorname{arc}\sinh\sqrt{b}}^{\operatorname{arc}\sinh\sqrt{ab}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\,[t]_0^t \qquad (18)$$

ولكن $\sinh 2u = 2\sinh u\cosh u$ فيكون لدينا:

$$\frac{1}{b^{3/2}}[\sinh u\cosh u - u]_{\operatorname{arc}\sinh\sqrt{b}}^{\operatorname{arc}\sinh\sqrt{ab}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\,[t]_0^t \qquad (19)$$

وبما أن:

$$\sinh u = \sinh\left[\operatorname{arc}\sinh\sqrt{ab}\right] = \sqrt{ab}$$
$$\cosh u = \sqrt{1+\sinh^2 u} = \sqrt{1+ab}$$

وبعد التعويض بحدود التكامل في الطرف الأيسر للعلاقة (19) نجد:

$$\frac{1}{b^{3/2}}\left[\sqrt{ab}\sqrt{1+ab} - \operatorname{arc}\sinh\sqrt{ab} - \sqrt{b}\sqrt{1+b} + \operatorname{arc}\sinh\sqrt{b}\right]$$
$$= \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\,[t]_0^t$$
$$\pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\,[t]_0^t = \frac{1}{b^{\frac{3}{2}}}\left[\sqrt{ab}\sqrt{1+ab} - \operatorname{arc}\sinh\sqrt{ab} - \sqrt{b}\sqrt{1+b} + \operatorname{arc}\sinh\sqrt{b}\right] \quad (20)$$

وبتعويض $b \equiv \frac{1-\Omega_m^0}{\Omega_m^0}$ بقيمتها نجد:

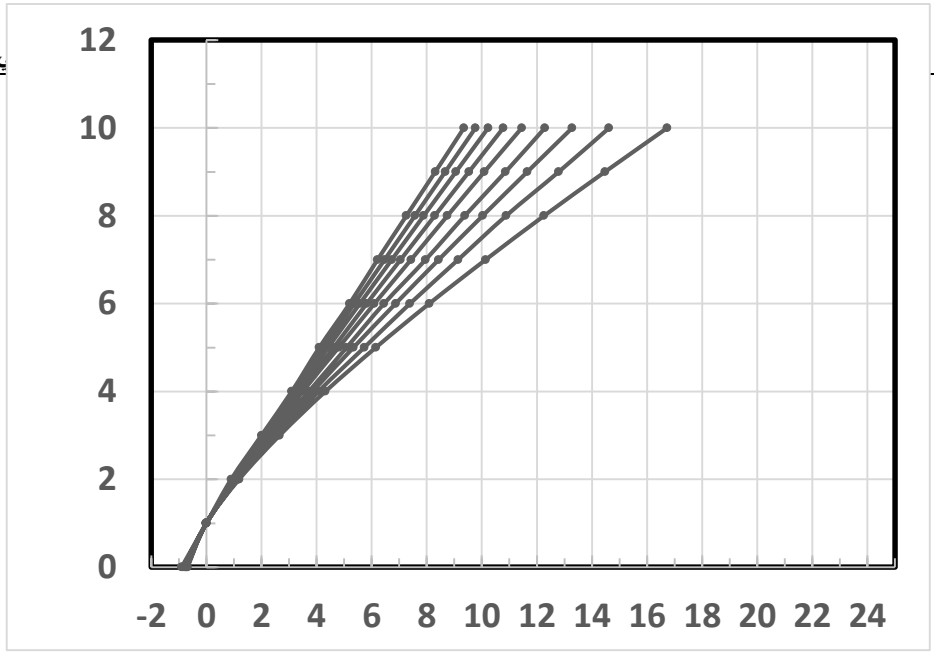
$$\pm H_0 t = \frac{\Omega_m^0}{(1-\Omega_m^0)^{\frac{3}{2}}}\left[\sqrt{ab}\sqrt{1+ab} - \operatorname{arc\,sinh}\sqrt{ab} - \sqrt{b}\sqrt{1+b} + \operatorname{arc\,sinh}\sqrt{b}\right] \quad (21)$$

وهذه العلاقة تعطينا علاقة الزمن بالعامل السـلمي: $t = f(a)$. وتم إعطاء عدة قيم لكل من العامل السلمي a والمقدار Ω_m^0، ومن ثم تم استنتاج القيم الموافقة للزمن، أو بالأحرى لـــــ $H_0 t$. تلك القيم معطاة في الجدول (1) والمنحنيات الموافقة على الشكل (2).

جدول (1): نرفق في هذا الجدول القيم المختلفة لكل من a، و $H_0\ t$ من أجل عدة قيم لـ Ω_m^0 تتراوح ما بين $\Omega_m^0 = 0,1$ و $\Omega_m^0 = 0,9$.

$\Omega_m^0 = 0,1$		$\Omega_m^0 = 0,2$		$\Omega_m^0 = 0,3$		$\Omega_m^0 = 0,4$		$\Omega_m^0 = 0,5$	
$H_0\ t$	a	$H_0\ t$	a	$H_0\ t$	a	$H_0\ t$	a	$H_0\ t$	a
−0,89	0	−0,85	0	-0.81	0	−0,78	0	−0,75	0
0,00	1	0,00	1	0,00	1	0,00	1	0,00	1
0,89	2	1,04	2	1,05	2	1,07	2	1,09	2
2,05	3	1,50	3	2,15	3	2,22	3	2,28	3
3,08	4	3,18	4	3,27	4	3,41	4	3,53	4
4,13	5	4,27	5	4,42	5	4,62	5	4,81	5
5,17	6	5,37	6	5,57	6	5,82	6	6,11	6
6,21	7	6,47	7	6,73	7	7,05	7	7,43	7
7,26	8	7,57	8	7,89	8	8,29	8	8,75	8
8,31	9	8,67	9	9,06	9	9,53	9	10,09	9
9,35	10	9,77	10	10,23	10	10,00	10	11,45	10

$\Omega_m^0 = 0,6$		$\Omega_m^0 = 0,7$		$\Omega_m^0 = 0,8$		$\Omega_m^0 = 0,9$	
$H_0\ t$	a	$H_0\ t$	a	$H_0\ t$	a	$H_0\ t$	a
-0,73	0	-0,71	0	-0,71	0	−0,68	0



$H_0 t$

0,00	1	0,00	1	0,00	1	0,00	1
1,13	2	1,14	2	0,48	2	1,19	2
2,37	3	2,45	3	2,59	3	2,66	3
3,72	4	3,86	4	4,07	4	4,32	4
5,09	5	5,34	5	5,73	5	6,15	5
6,45	6	6,87	6	7,39	6	8,09	6
7,96	7	8,43	7	9,14	7	10,14	7
9,38	8	10,03	8	10,88	8	12,26	8
10,86	9	11,65	9	12,79	9	14,47	9
12,29	10	13,28	10	14,62	10	16,73	10

شكل (2): يمثل تغير العامل السلمي a بتابعية المقدار $H_0 t$ أي بتابعية الزمن من أجل قيم مختلفة لـ Ω_m^0.

إن نقطة الانطلاق هي من أجل $t = 0$، فإن $a = 1$ حيث نجد منحنيات لها الشكل (2). حيث رسمنا المنحنيات من أجل زمن موجب. ويمكننا رؤية ماذا يكون لدينا من أجل زمن سالب $t < 0$. ونصادف فعلاً أن هذه المنحنيات ستمتد وستتجه نحو القيم الصغيرة للعامل السلمي a حتى

قيمة معدومة له $a = 0$. بتعبير آخر، فإنه يوجد قيمة للزمن حيث العامل السلمي معدوم. ومما سبق نرى أنه يوجد زمن معين نرمز له بـــــ t_0 حيث $a = 0$. وإذا عوضنا $t = t_0$ حيث $a = 0$ في العلاقة (21) نجد:

$$H_0 t_0 = \frac{\Omega_m^0}{(1-\Omega_m^0)^{3/2}}\left[\text{arc sinh}\sqrt{b} - \sqrt{b}\sqrt{1+b}\right] \qquad (22)$$

وباختيار قيمة لـ Ω_m^0 وتعويضها في العلاقة السابقة نستطيع حساب t_0، وهذا الزمن يأخذ قيمة سالبة $(-t_0)$ كما موضح في الشكل السابق، نُطلق عليها اسم "**عمر الكون**". وهذا النموذج للكون مع $(b > 0)$ يمتلك عمر منتهي كما هو مبين في الشكل السابق (الجزء السالب للزمن أي قيمة $H_0 t$). وإن هذا الذي يسميه علماء الكون بـــــ (**الانفجار العظيم – The big bang**) هي اللحظة البدائية (اللحظة الفريدة) التي من أجلها $(t = t_0)$.

إن هذه الأشكال هي من أجل القيم الموجبة للزمن $t > 0$، أي من أجل قيم الموجبة لـــ b وذلك لأن $\Omega_m^0 < 1$:

$$b \equiv \frac{1-\Omega_m^0}{\Omega_m^0}$$

أي أن كثافة المادة أقل من الكثافة الحرجة. وهكذا فإن التابع يستمر بأخذ القيم الكبيرة حتى اللانهاية عندما يتناهى الزمن إلى اللانهاية. وهذا النموذج هو يبدأ أو ينطلق من القيمة $a = 0$، ومن ثم يتمدد بشكل غير محدد أو غير معرف.

حساب "عمر الكون":

إذا أخذنا القيمة التالية لـ $H_0\ t = -0{,}7531$ [9–16]، وبما أن:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c$$

فيمكننا استنتاج أو حساب ρ_0 بأخذ القيمة الآتية لثابت التجاذب العام $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\left[N\left(\frac{m}{kg}\right)^2\right]$:

$$\rightarrow {H_0}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \rightarrow \rho_0 = \frac{3{H_0}^2}{8\pi G}$$

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \frac{3 \times (7 \times 10^1)^2}{8 \times 3{,}14 \times 6{,}67 \times 10^{-11}\left[N\left(\frac{m}{kg}\right)^2\right]}\left[\frac{km}{s.Mpc}\right]^2 = \frac{14700}{167.64}\frac{1}{\left[\left(\frac{kg.m}{s^2}\right)\left(\frac{m}{kg}\right)^2\right]}\left[\frac{km}{s.Mpc}\right]^2 =$$

$$= 87.69 \times 10^{-11}\left[\left(\frac{kg}{m^3}\right)\right] \times \left[\frac{10^3 m}{3{,}083 \times 10^{22}\, m}\right]^2 = 9{,}23 \times 10^{-38} \times 10^{+11}\left[\left(\frac{kg}{m^3}\right)\right]$$

$$= 9{,}23 \times 10^{-27}\left[\left(\frac{kg}{m^3}\right)\right] \approx 10^{-29}\left[\left(\frac{g}{cm^3}\right)\right]$$

وبما أن $\rho_m = \rho_m^0 a^{-3}$، فنكتب أن:

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{\rho_m^0}{\rho_c} a^{-3} \ , \ \Omega_m^0 \equiv \frac{\rho_m^0}{\rho_c}$$

ومن أجل $\Omega_m^0 \equiv \frac{\rho_m^0}{\rho_c} = 0{,}5$ فإن $H_0\, t = -0{,}7531$ فنجد أن:

$$H_0\, t = -0{,}7531 \rightarrow t = -\frac{0{,}7531}{H_0} = -\frac{0{,}7531}{2{,}3 \times 10^{-18}\, s^{-1}}$$

$$= -0.3274 \times 10^{18}\, s$$

$$\rightarrow t = -0.3274 \times 10^{+18}\, s = -\frac{0.3274 \times 10^{+18}}{365 \times 24 \times 60 \times 60}\, s$$

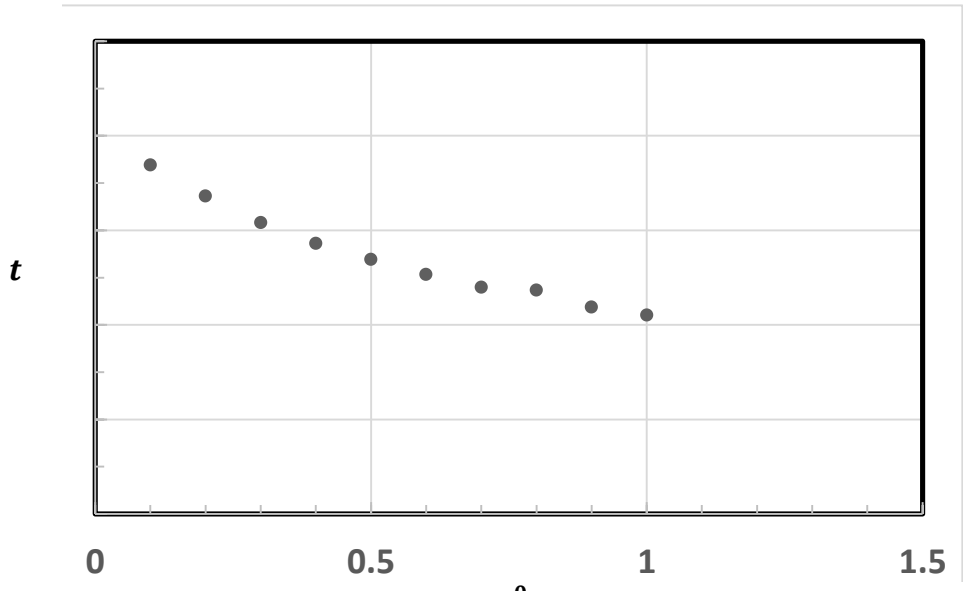
$$= -1.038e - 8 \times 10^{-18} s = -1{,}038 \times 10^{-8} \times 10^{+18} s$$

$$= -1{,}038 \times 10^{+10}\, years = 10{,}38 \times 10^{+9}\, yr$$

أي أن عمر الكون يساوي 10,38 مليار سنة. وتم حساب عمر الكون من أجل قيم مختلفة لـــ Ω_m^0، حيث الجدول (3) يبين مختلف القيم مع القيم الموافقة لـ $H_0\, t$.

جدول (2): نُعطي في الجدول القيم المختلفة Ω_m^0 مع القيم الموافقة لعمر الكون،

Ω_m^0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1
$H_0\, t$	−0,90	−0,85	−0,81	−0,78	−0,75	−0,73	−0,71	−0,71	−0,68	−0,6
t $\times 10^{+9}\, years$	12,38	11,72	11,16	10,72	10,38	10,06	9,79	9,73	9,37	9,20



وذلك من أجل $H_0 = 2,3 \times 10^{-18}\ s^{-1}$.

شكل (3): يمثل تغير عمر الكون t بتابعية الكثافة Ω_m^0.

4-2- من أجل القيم السالبة لـ $b < 0$ أي أن $(\Omega_m^0 > 1)$:

يمكننا الآن القيام بالحسابات السابقة من أجل القيم السالبة لـ b، وذلك من أجل $\Omega_m^0 > 1$، ونقول في هذه الحالة أن الكون هو في حالة (ما فوق الحرجة – over critical)، أي كثافته أكبر من الكثافة الحرجة. في الحالة الســـابقة ندعوه بالحالة (ما تحت الحرجة – under critical). إن الذي يتغير في تلك الحسابات هو الآتي:

$$ab = -sin^2u \ \rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{-b}}\sin u \rightarrow da = -\frac{2}{b}\sin u \cos u \ du$$

$$sin^2u + cos^2u = 1 \rightarrow -ab + cos^2u = 1 \rightarrow 1 + ab = cos^2u \rightarrow \sqrt{1+ab} = \cos u$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\frac{\sqrt{a}da}{\sqrt{1+ab}} = -\frac{2}{b}\sin u\cos u\ du \times \frac{1}{\sqrt{-b}}\sin u \times \frac{1}{\cos u} = \frac{2}{(-b)^{\frac{3}{2}}} sin^2u\ du$$

$$\frac{\sqrt{a}da}{\sqrt{1+ab}} = -\frac{2}{b}\sin u\cos u\ du \times \frac{1}{\sqrt{-b}}\sin u \times \frac{1}{\cos u} = \frac{2}{(-b)^{\frac{3}{2}}} sin^2u\ du$$

$$\frac{2}{(-b)^{\frac{3}{2}}} sin^2u\ du = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\ dt$$

علماً أن:

$$\int sin^2u\ du = \frac{u}{2} - \frac{1}{4}\sin 2u$$

وبالمكاملة نجد:

$$\frac{2}{(-b)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{u}{2} - \frac{1}{4}\sin 2u\right] = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\ [t]$$

ونأخذ حدود التكامل الموافقة لـــــ $t = 0$، أي الآن، وإلى قيمة أخرى هي t لا على التعيين. ومن أجل $t = 0$ فإن قيمة u الموافقة هي من أجل قيمة للعامل السلمي تساوي الواحد $a = 1$، أي أن:

$$t = 0 \to a = 1 \to ab = -\sin^2 u \to \sqrt{-ab} = \sin u \to \sqrt{-b} = \sin u \to u = \arcsin\sqrt{-b}$$

ومن أجل قيمة لا على التعيين لـ a فإن قيمة $u = \arcsin\sqrt{-ab}$، ومنه فحدود التكامل هي:

$$\frac{1}{2(-b)^{\frac{3}{2}}}[2u - \sin 2u]_{\arcsin\sqrt{-b}}^{\arcsin\sqrt{-ab}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\ [t]_0^t$$

ولكن $\sin 2u = 2\sin u\cos u$ فيكون لدينا:

$$\frac{1}{2(-b)^{\frac{3}{2}}}[2u - 2\sin u\cos u]_{\arcsin\sqrt{-b}}^{\arcsin\sqrt{-ab}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\ [t]_0^t$$

$$\frac{1}{(-b)^{\frac{3}{2}}}[u - \sin u\cos u]_{\arcsin\sqrt{-b}}^{\arcsin\sqrt{-ab}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\ [t]_0^t$$

$$\frac{1}{(-b)^{\frac{3}{2}}}\left[\arcsin\sqrt{-ab}-\sin\arcsin\sqrt{-ab}\cos\arcsin\sqrt{-ab}-\arcsin\sqrt{-b}\right.$$
$$\left.+\sin\arcsin\sqrt{-b}\cos arc\ sin\ \sqrt{-b}\right]=\pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\,[t]_0^t$$

وبما أن:

$$\sin u=\sin\left[\arcsin\sqrt{-ab}\right]=\sqrt{-ab}$$
$$\sin^2 u+\cos^2 u=1\rightarrow\cos u=\sqrt{1-\sin^2 u}=\sqrt{1+ab}$$

وبعد التعويض بحدود التكامل في الطرف الأيسر للعلاقة السابقة، وبتعويض $b\equiv\frac{1-\Omega_m^0}{\Omega_m^0}$ بقيمتها نجد:

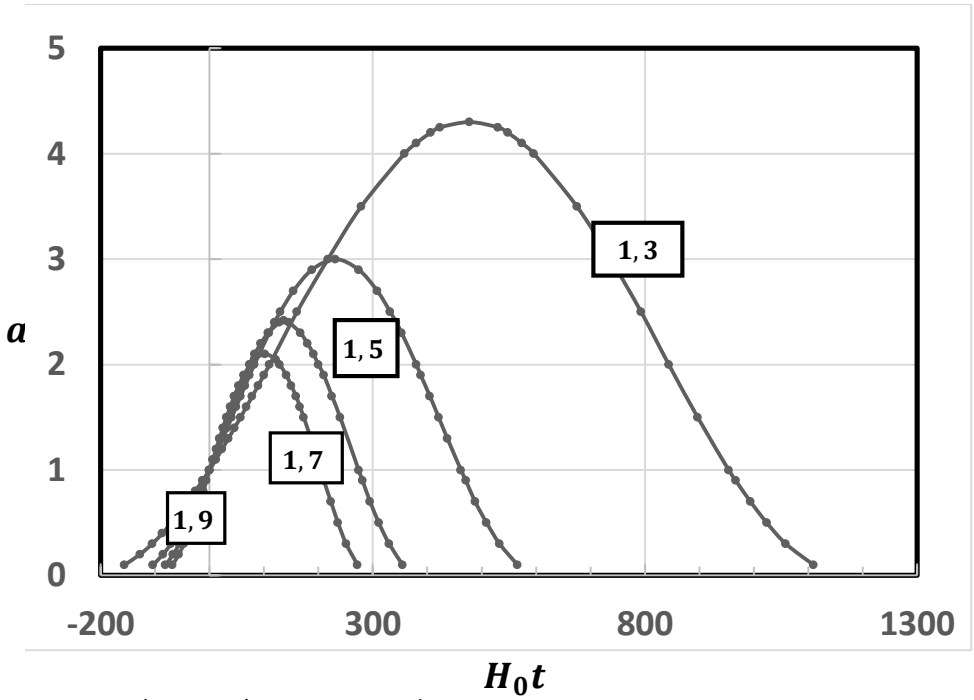
$$\frac{\Omega_m^0}{(\Omega_m^0-1)^{3/2}}\left[\arcsin\sqrt{-ab}\right.$$
$$-\sin\arcsin\sqrt{-ab}\cos\arcsin\sqrt{-ab}-\arcsin\sqrt{-b}$$
$$\left.+\sin\arcsin\sqrt{-b}\cos\arcsin\ \sqrt{-b}\right]=\pm H_0[t]_0^t$$
$$\frac{\Omega_m^0}{(\Omega_m^0-1)^{\frac{3}{2}}}\left[\arcsin\sqrt{-ab}-\arcsin\sqrt{-b}-\sqrt{-ab}\sqrt{1+ab}+\sqrt{-b}\sqrt{1+b}\right]$$
$$=\pm H_0[t]_0^t$$
$$\frac{\Omega_m^0}{(\Omega_m^0-1)^{\frac{3}{2}}}\left[\arcsin\sqrt{-ab}-\arcsin\sqrt{-b}-\sqrt{-ab}\sqrt{1+ab}+\sqrt{-b}\sqrt{1+b}\right]$$
$$=\pm H_0[t]_0^t$$
$$H_0\,t=\frac{\Omega_m^0}{(\Omega_m^0-1)^{3/2}}\left[\left[\arcsin\sqrt{-ab}-\arcsin\sqrt{-b}-\sqrt{-ab}\sqrt{1+ab}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sqrt{-b}\sqrt{1+b}\right]\right]$$

وتم حساب قيم H_0t من أجل قيم مختلفة لـــــــ Ω_m^0، وهذه القيم معطاة في الجدول (3)، والتمثيل البياني لتلك القيم معطى في الشكل (4).

جدول (3): ادرج في هذا الجدول القيم المختلفة لكل من a، و H_0t من أجل عدة قيم لـ Ω_m^0 تتراوح ما بين $\Omega_m^0 = 1,10$ و $\Omega_m^0 = 1,90$.

$\Omega_m^0 \rightarrow$	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
$a \downarrow$	H_0t	H_0t	H_0t	H_0t	H_0t
0,10	−407,34	−156,34	−104,07	−80,96	−68,18
0,20	−335,26	−127,86	−85,54	−66,77	−56,43
0,30	−275,49	−105,45	−71,04	−55,61	−47,16
0,40	−224,59	−86,75	−58,53	−45,99	−38,01
0,50	−179,40	−69,80	−47,35	−37,24	−31,82
0,60	−138,66	−54,26	−36,99	−29,14	−24,98
0,70	−110,66	−39,80	−26,45	−21,49	−18,52
0,80	−65,90	−26,12	−17,08	−14,12	−11,09
0,90	−31,77	−13,13	−9,05	−6,99	−6,08
1,00	0.02	−0,08	−0,41	−0,02	−0,03
1,10	31,00	11,56	8,03		6,04
1,20	60,00	23,25	16,35		12,10
1,30	90,00	34,70	24,55		18,28
1,40	115,00	45,95	32,67		24,59
1,50	141,49	56,95	40,77		31,15
1,60	167,00	67,81	48,87		38,06
1,70	192,00	78,53	53,07		45,45
1,80	217,00	89,17	65,22		53,58
1,90	240,80	99,75	73,62		62,91
1,95	252,50				
2,00	264,20	110,25	82,14	73,55	74,58
2,05					82,43
2,10				83,09	101,72
2,20				94,09	
2,30	332,36		109,40	107,47	
2,40				128,37	
2,42				136,74	
2,50	375,74	160,72	129,92		
2,70			154,23		
2,90			188,24		
3,00	479,53	217,52	231,22		
3,50	578,30	278,77			
4,00	673,43	358,16			
4,10		379,76			
4,20		406,44			
4,25		423,58			
4,30		477,38			
4,59	766,29				

5,00	857,56				
5,50	948,27				
6,00	1039,00				
6,50	1130,84				
7,00	1211,89				
7,50	1310,61				
8,00	1420,93				
8,50	1526,80				
9,00	1640,76				
9,50	1766,69				
10,00	1912,64				
10,30	2017,15				
10,60	2164,39				
10,80	2263,19				
10,90	2347,34				



شكل (4): يمثل تغير العامل السلمي a بتابعية المقدار H_0t أي بتابعية الزمن من أجل قيم مختلفة لـ Ω_m^0 (تطور العامل السلمي في حالة الكون فوق الحرِج)

من أجل قيمة معدومة للعامل السـلمي يبدأ الكون بالتمدد ومن ثم يصـل إلى نقطة حيث العامل السـلمي يبدأ بالتناقص ومن ثم عند وصـوله إلى القيمة التي تسـاوي الصـفر يُطلق على تلك الحالة (بالانكماش الكبير – Big Crunch). إذاً بحسـب محتوى الكون يمكن أن نعيش في كون يتطور بطريقة غير منتهية، أي يتمدد مع الزمن حتى اللانهاية بطريقة غير محددة، أو يكون لدينا كون (أو نعيش بكون) يبدأ بالانكماش على نفسه.

4-3- من أجل القيم التي يكون فيها $\Omega_m^0 = 1$:

وإذا اهتمينا في الحالة الحدية للحالتين السـابقتين (تمثل هذه الحالة الحد الفاصـل بين الكون المفتوح والمغلق)، أي من $\Omega_m^0 = 1$، فيمكننا القيام بهذا انطلاقاً من معادلة فريدمان رقم (6):

$$a' = \pm H_0\{\Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_r^0 a^{-2} + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda a^2\}^{1/2} \qquad (6)$$

وكما في الحالة السابقة إذا كان ليس هناك من إشعاع وليس هناك من ثابت كوني:

$$\Omega_r^0 a^{-2} = 0 \ , \qquad \Omega_\Lambda a^2 = 0$$

وبما أن:

$$\Omega_m^0 + \Omega_r^0 + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda = 1$$

فيكون $\Omega_\Lambda = 0$. ومنه فالمعادلة رقم (6) تصبح على الشكل:

$$a' = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}a^{-1/2} \rightarrow \sqrt{a}\frac{da}{dt} = \pm H_0 \qquad (23)$$

بالمكاملة نجد:

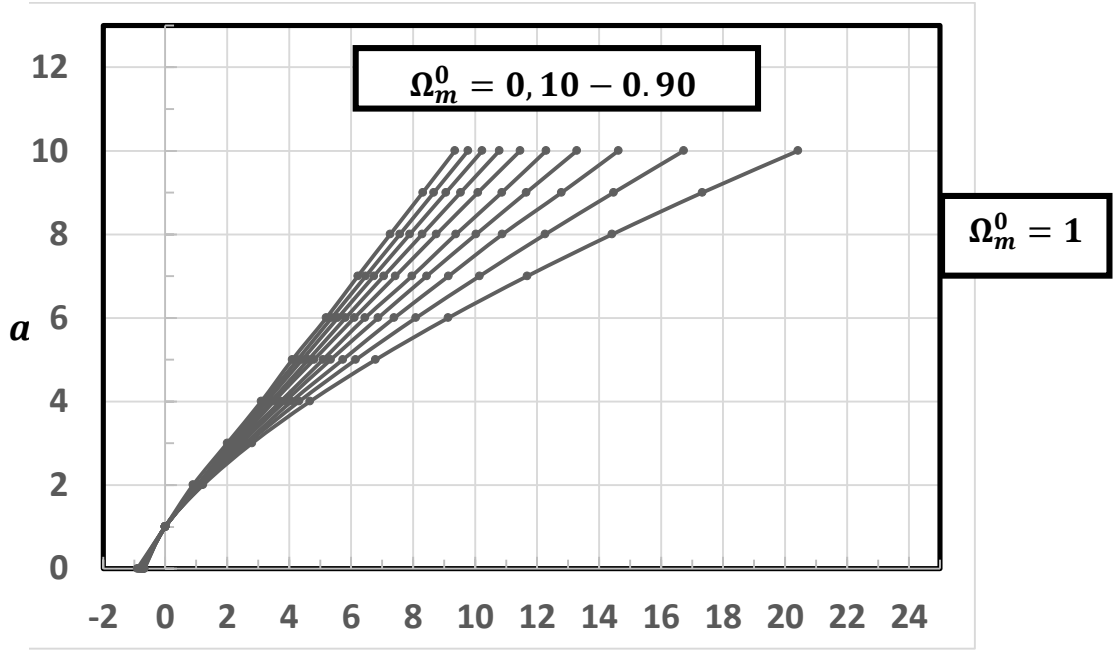
$$\frac{2}{3}\left[a^{\frac{3}{2}}\right]_1^a = \pm H_0[t]_0^t$$

$$\rightarrow \frac{2}{3}\left(a^{3/2} - 1\right) = H_0 t \qquad (24)$$

تم حساب قيم $H_0 t$ الموافقة لقيم مختلفة لـــ a ، والقيم التي تم الحصول عليها معطاة في الجدول (4). بينما المنحني البياني لتغيرات العامل السلمي بتابعية $H_0 t$ مُعطى في الشكل (5)، وهو عبارة عن منحني يفصل الحالتين أو النظامين أي بين القيم الموجبة والسالبة لـ b.

جدول (4): نُعطي في الجدول القيم المختلفة لكل من a، و $H_0 t$ من أجل $\Omega_m^0 = 1$.

$H_0\, t$	$-0{,}67$	0	1,22	2,80	4,67	6,79	9,13	11,68	14,42	17,33	20,42
a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



شكل (5): يمثل تغير العامل السلمي a بتابعية المقدار $H_0 t$ أي بتابعية الزمن من أجل قيم مختلفة لـ Ω_m^0.

والسؤال الذي نسأله هو الآتي: انطلاقاً من هذه الحسابات ما هي ردة فعلنا كفيزيائيين؟

يجب علينا دوماً التأكد من الحسابات على أنه لا يوجد أي خطأ في مكان ما، وأن الحسابات صحيحة. ولهذه الغاية لنأخذ المعادلة رقم (21):

$$H_0\, t = \frac{\Omega_m^0}{(1-\Omega_m^0)^{3/2}}\left[\sqrt{ab}\sqrt{1+ab} - \operatorname{asinh}\sqrt{ab} - \sqrt{b}\sqrt{1+b} + \operatorname{asinh}\sqrt{b}\right] \qquad (21)$$

وكان هذا من أجل $\Omega_m^0 < 1$، ومن أجل $\Omega_m^0 = 1$ وجدنا العلاقة (24):

$$\frac{2}{3}\left(a^{3/2} - 1\right) = H_0 t \qquad (24)$$

وإنه في غاية الأهمية أخذ العلاقة (21) والنظر ما هي القيمة التي نحصـــل عليها عندما تنتهي قيمة b إلى الصفر $b \to 0$. إن القيمة التي من أجلها $\Omega_m^0 = 1$ يوافق $b \to 0$: وذلك لأن:

$$b \equiv \frac{1-\Omega_m^0}{\Omega_m^0}$$

ويمكن القيام بذلك بنشر المقادير:

$$\sqrt{1+ab} \approx 1+\frac{ab}{2}$$
$$\sqrt{ab}\sqrt{1+ab} \approx \sqrt{ab}+\frac{1}{2}(ab)^{\frac{3}{2}}+6(b)^{\frac{5}{2}}$$
$$\operatorname{arc\,sinh}\sqrt{ab} \approx \sqrt{ab}-\frac{1}{6}(ab)^{\frac{3}{2}}+6(b)^{\frac{5}{2}}$$

وأن:

$$\frac{\Omega_m^0}{(1-\Omega_m^0)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_m^0}}\,\frac{1}{b^{\frac{3}{2}}}$$

وبالتعويض نجد أن:

$$H_0 t \approx \frac{2}{3\sqrt{\Omega_m^0}}\left(a^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_m^0=1}}\left(a^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{2}{3}\left(a^{3/2}-1\right)$$

ويمكن القيام بذلك من أجل $\Omega_m^0 \to 0$، ودوماً من أجل كون مكون من مادة فقط.

يمكننا الاهتمام بأوضاع مختلفة بأخذ معادلة فريدمان (المعادلة رقم 6) التي رأيناها سابقاً:

$$a' = \pm H_0\{\Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_r^0 a^{-2} + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda a^2\}^{1/2} \qquad (6)$$

بفرض أننا نعيش في كون مســـطح أي أن $\Omega_k^0 = 0$، فيبقى لدينا ثلاث معاملات حيث مجموع المعاملات الأربعة يســـاوي الواحد. وفي الكون الذي نعيش فيه فهذه الحدود ليس لها نفس الأهمية بنفس الوقت. وإذا مثلنا بيانياً هذه المعاملات، انطلاقاً من المعادلة (5):

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m^0 a^{-3} + \Omega_r^0 a^{-4} + \Omega_k^0 a^{-2} + \Omega_\Lambda \qquad (5)$$

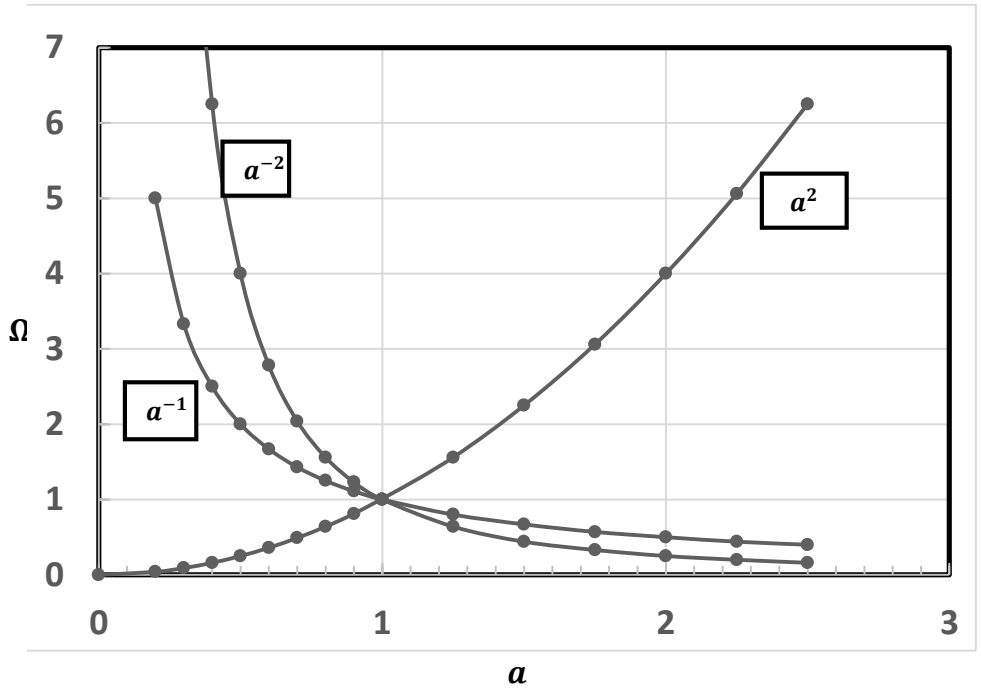
$$a' = \pm H_0\{\Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_r^0 a^{-2} + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda a^2\}^{1/2}$$

$$\Omega_m = \Omega_m^0 a^{-1}\ ,\ \Omega_r = \Omega_r^0 a^{-2}\ ,\Omega_k = \Omega_k^0 = 0\ ,\ \Omega_\Lambda a^{+2}$$

بتابعية العامل السلمي فنجد الشكل (6) والشكل (7)، حيث القيم الموافقة للشكلين معطاة في الجدولين (5) و (6).

جدول (5): أدرج في هذا الجدول القيم المختلفة لكل من a، a^{-1}، a^{-2}، و a^2.

a	0	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
a^{-1}	$\to\infty$	5,00	3,33	2,50	2,00	1,67	1,43	1,25	1,11	1,00	0,80	0,67	0,57	0,50	0,44	0,40
a^{-2}	$\to\infty$	25,00	11,11	6,25	4,00	2,78	2,04	1,56	1,23	1,00	0,64	0,44	0,33	0,25	0,2	0,16
a^2	0	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1,00	1,56	2,25	3,06	4,00	5,06	6,25



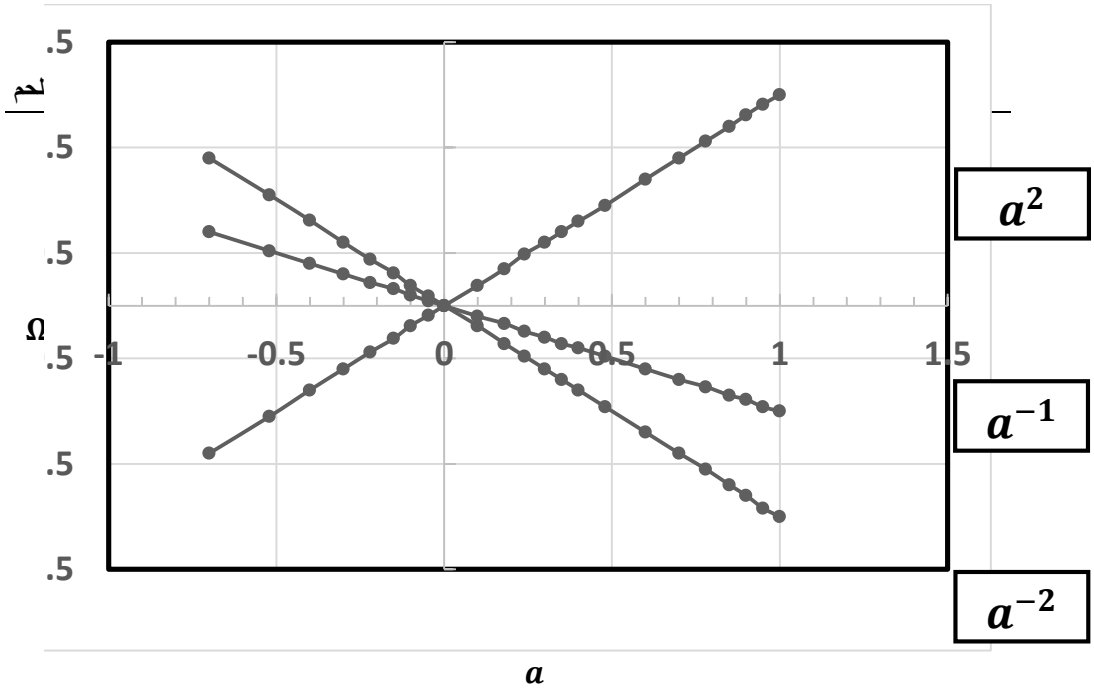
شكل (6): يمثل تغير الكثافة بتابعية العامل السلمي a حيث:

$$\Omega_m = \Omega_m^0 a^{-1} \ , \ \Omega_r = \Omega_r^0 a^{-2} \ , \ \Omega_\Lambda a^{+2}$$

جدول (6): أدرج في هذا الجدول القيم المختلفة لكل من $(a^{-1}, loga^{-1})$، $(a^{-2}, loga^{-2})$، و $(a^2, loga^2)$ من أجل قيم مختلفة لـ $(a, loga)$.

a	0	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
$log\ a$	$\to \infty$	-0,70	-0,52	-0,40	−0,30	−0,22	−0,15	−0,10	−0,05	0	0,10	0,18	0,24	0,30	0,35	0,40
a^{-1}	$\to \infty$	5,00	3.33	2,50	2,00	1,67	1,43	1,25	1,11	1	0,80	0,67	0,57	0,50	0,44	0,40
$log\ a^{-1}$		0,70	0,52	0,40	0,30	0,22	0,16	0,10	0,05	0	−0,10	−0,17	−0,24	−0,30	−0,36	−0,40
a^{-2}	$\to \infty$	25,00	11,11	6,25	4,00	2,78	2,04	1,56	1,23	1	0,64	0,44	0,33	0,25	0,20	0,16
$log\ a^{-2}$		1,40	1,05	0,81	0,60	0,44	0,31	0,19	0,09	0	−0,19	−0,36	−0,48	−0,60	−0,70	−0,80
a^2	0	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1	1,56	2,25	3,06	4,00	5,06	6,25
$loga^2$		−1,40	−1,05	−0,80	−0,60	−0,44	−0,31	−0,19	−0,09	0	0,19	0,35	0,49	0,60	0,70	0,80

a	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
$log\ a$	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1,00
a^{-1}	0,33	0,25	0,20	0,17	0,14	0,13	0,11	0,10
$log\ a^{-1}$	−0,48	−0,60	−0,70	−0,77	−0,85	−0,89	−0,96	−1,00
a^{-2}	0,11	0,06	0,04	0,03	0,02	0,02	0.01	0.01
$log\ a^{-2}$	−0,96	−1,20	−1,40	−1,55	−1,70	−1,80	−1,92	−2,00
a^2	9,00	16,00	25,00	36,00	49,00	64,00	81,00	100,00
$loga^2$	0,95	1,20	1,40	1,56	1,70	1,81	1,91	2,00



شكل (7): يمثل تغير الكثافة بتابعية العامل السلمي a.

$$\Omega_m = \Omega_m^0 a^{-1} \ , \ \Omega_r = \Omega_r^0 a^{-2} \ , \ \Omega_\Lambda a^{+2}$$

4-4- مناقشة المعاملات الكونية:

نجد أنه بزمن نسبي حديث، أي لا نذهب بعيداً في الماضي، حيث مساهمة كثافة الإشعاع تكون مهملة. الوضـــع الأول المهم، أو الذي يمكن الاهتمام به هو: $\Omega_r^0 = 0$. وهذا ما يُدعى بعلم الكون الحديث. وعلى الشكلين السابقين إذا ذهبنا بالعكس أي بالنسبة للقيم الصغيرة للعامل السلمي نلاحظ أن مساهمة الثابت الكوني تصبح صغيرة بالنسبة للحدين الأخريين. وإذا اهتمينا بالقيم المتزايدة للعامل السلمي نلاحظ أن الكون يصبح تدريجياً مسيطر عليه بالثابت الكوني مقارنة بالإشعاع والمادة. بتعبير أخر، عندما كان الكون في حالة الشباب كان المسيطر هو الإشعاع والمادة، وعندما يتزايد في العمر يصبح الثابت الكوني هو المسيطر.

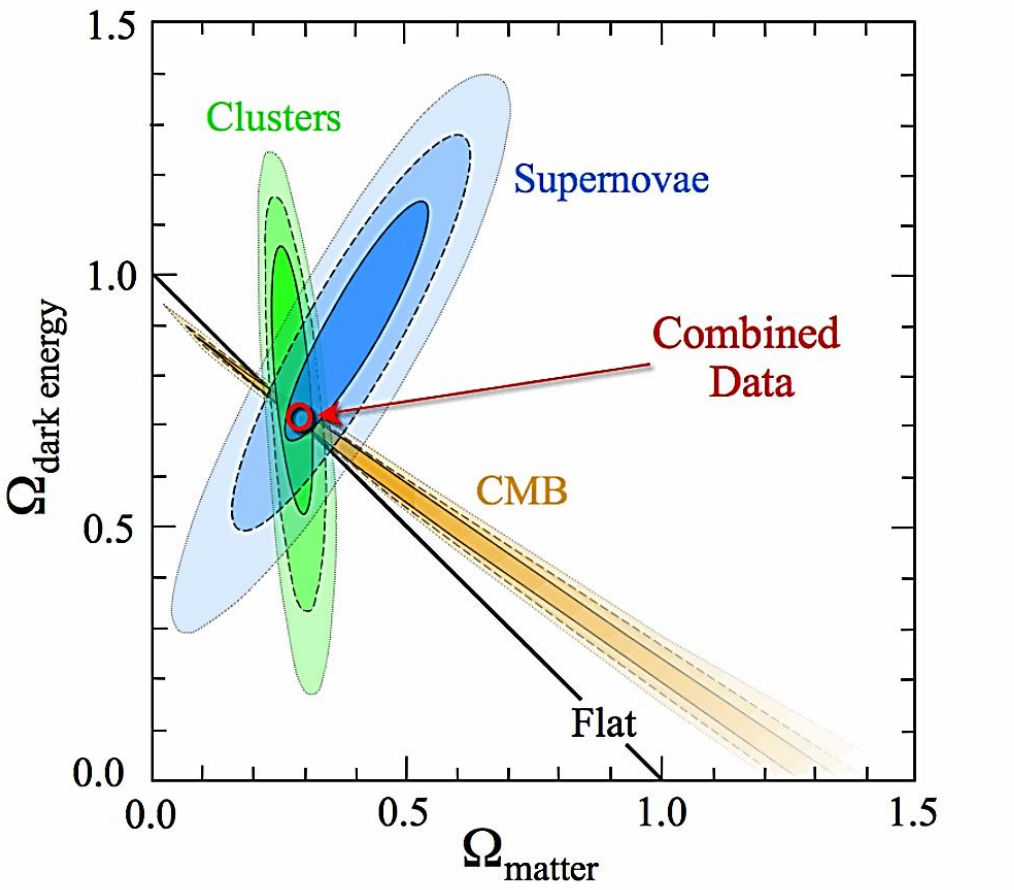
ولدراسة الحقبة حيث لا يمكن اهمال أي معامل من المعاملات الثلاثة السابقة، وبفرض أن الكون مسطح فإن معادلة فريدمان، وفق علم الكون الحديث، تُكتب على النحو الآتي:

$$a' = \pm H_0 \{\Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_r^0 a^{-2} + \Omega_\Lambda a^2\}^{1/2}$$

والسؤال الذي يطرح: ما هي القيم الرصدية للمعاملات الكونية في الكون الحالي؟ أو بتعبير آخر ما هي قيم المعاملات الكونية في هذا الكون الذي نعيش فيه؟ أو مما يتكون هذا الكون؟ من بين هذه المعادلات هناك معامل يمكن قياسه بشكل مباشر هو Ω_r^0. يمكن قياسه بسهولة لأنه عبارة عن إشعاع، وهو عبارة عن الإشعاعات التي تحيط بنا وهي تقع في مجال الأمواج الميكروية والتي من السهل مراقبتها. وتُقاس هذه الكثافة عبر طيف الخلفية الكونية الميكروية، حيث تم تقدير قيم هذه المعاملات فوجد أنها تساوي [17 – 20]:

$$\Omega_m^0 \sim 0{,}3 \quad , \quad \Omega_r^0 \sim 10^{-4} \quad , \quad \Omega_\Lambda \sim 0{,}7$$

ومن أجل القيم القريبة من الواحد للعامل السلمي (حيث يمثل هذا الزمن الحقبة الحالية تقريبًا) فالحد $\Omega_m^0 a^{-1}$ هو الحد الأكثر أهمية. وبما أن هذه القيمة في أغلب الأحيان معروفة بشكل جيد، فإن هذا الذي نراه، في كتب علم الكون وفي المقالات المتعلقة بذلك، مرسوم في المستوي البياني $(\Omega_\Lambda, \Omega_m^0)$، مُعطى بالشكل (8).



شكل (8): يوضح قيمة كل من $\Omega_{\text{dark energy}} = \Omega_{\Lambda} \sim 0,7$ و $\Omega_{\text{matter}} = \Omega_{m}^{0} \sim 0,3$ الناتجتين عن تجميع وتشكيل القيم ($Combined\ Data$) التي تم الحصول عليها انطلاقاً من قياسات تستند إلى: نموذج الإشعاع الكوني الخلفي CMB [7]، قياسات السوبرنوفا $Supernova$ [17 − 18]، قياسات نمو تجمع المجرات The growth of massive clusters [20].

توجد تجارب متعددة في علم الكون تسمح بالقيام بقياس تلك المعاملات الكونية حيث لا يمكننا أن نحدد قيمها بشكل دقيق وقطعي. ولكن تقول القياسات إن تلك المعاملات تقع في تلك المنطقة (قياسات تستند إلى الإشعاع الكوني الخلفي CMB) [19]، وقياسات تقول إنها تقع في ذاك

المنطقة (استناداً إلى قياسات السوبرنوفا −Supernovae) [17-18]، وقياسات تستند لتجمع المجرات المرموز لها بـــ Clusters [20]. وبتجميع قيم تلك التجارب نحصل على منطقة مشتركة حيث قيم المعاملات الكونية تقع فيها(Combined Data). وتلك المنطقة تتمركز حول القيم التي أعطيناها أعلاه.

5- الاستنتاجات والتوصيات:

تم في هذا البحث إيجاد حلول خاصة لمعادلة فريدمان الأولى من أجل $(\boldsymbol{\Omega_r^0 = \Omega_\Lambda = 0})$ أي من اجل الحالات التي تكون فيها مساهمة الإشعاع معدومة وبالتالي الثابت الكوني معدوم، وهذا يوافق كون لا يوجد فيه إلا المادة أي أن $\boldsymbol{\Omega_m^0 \neq 0}$، حيث يمثل هذا المتحول العلاقة بين كثافة المادة والكثافة الحرجة:

$$\boldsymbol{b \equiv \frac{1 - \Omega_m^0}{\Omega_m^0}}$$

وذلك من أجل القيم الموجبة لـــ $b > 0$ أي أن $(\Omega_m^0 < 1)$ ومن أجل القيم السالبة لـــ $b < 0$ أي أن $(\Omega_m^0 > 1)$.

وباختيار قيمة لـ Ω_m^0 نستطيع حساب t_0، وهذا الزمن يأخذ قيمة سالبة $(-t_0)$ كما موضح في الشـــكل (2)، نُطلق عليها اســـم "**عمر الكون**". وهذا النموذج للكون مع $(b > 0)$ يمتلك عمر منتهي كما هو مبين في الشـــكل (2) (الجزء الســـالب للزمن أي قيمة $H_0 t$). وإن هذا الذي يســـميه علماء الكون بـــ (**الانفجار العظيم – The Big Bang**) هي اللحظة البدائية (اللحظة الفريدة) التي من أجلها $(t = t_0)$.

قمنا أيضا بالحسابات من أجل القيم السالبة لـ b، وذلك من أجل $\Omega_m^0 > 1$، ونقول في هذه الحالة أن الكون هو في حالة (**ما فوق الحرجة – over critical**)، أي كثافته أكبر من الكثافة الحرجة. في الحالة السابقة ندعوه بالحالة (**ما تحت الحرجة – under critical**).

اهتمينا أيضـاً في الحالة الحدية للحالتين السـابقتين، أي من $\Omega_m^0 = 1$، فقمنا بذلك انطلاقاً من المعادلة رقم (6). تم حساب قيم $H_0 t$ الموافقة لقيم مختلفة لـــ a ، والقيم التي تم الحصول عليها معطاة في الجدول (4). بينما المنحني البياني لتغيرات العامل السلمي بتابعية مُعطى $H_0 t$ في الشكل (5)، وهو عبارة عن منحني يفصل الحالتين أو النظامين أي بين القيم الموجبة والسالبة لـ b.

تؤكد هذه الحلول أن شكل الكون هو الذي يحدد مصيره (وهذا الارتباط بين الهندسة والمحتوى المادي هو نتيجة مباشرة لمعادلات فريدمان): فالكون المغلق ($\Omega_m^0 > 1$) منتهٍ وينتهي بانكماش، بينما الكون المفتوح أو المسطح ($\Omega_m^0 \leq 1$) غير منتهٍ ويتمدد إلى الأبد. هذا الارتباط بين الهندسة والمحتوى المادي هو أحد الاستنتاجات الأساسية في علم الكون الحديث [5–8].

استنادًا إلى النتائج السابقة، نقترح ما يلي:

- **التوصية 1: دراسة تأثير إدخال Ω_r^0 و Ω_Λ معاً في الحل التحليلي.**
- **التوصية 2: مقارنة النتائج مع بيانات مرصد جيمس ويب الفضائي المستقبلية.**
- **التوصية 3: تطبيق الحلول على نماذج الطاقة المظلمة المتغيرة مع الزمن.**

المـراجـع

[1] RYDEN, B. (2017). Introduction to Cosmology (2nd ed.). Cambridge University Press, UK.

[2] BAUMANN, D. (2022). Cosmology. Cambridge University Press, UK.

[3] FRIEDMANN, A. (1922). Über die Krümmung des Raumes. Zeitschrift für Physik, Germany, 10, 377–386.

[4] LEMAÎTRE, G. (1927). Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles A, Belgium, 47, 49–59.

[5] DODELSON, S.; SCHMIDT, F. (2020). Modern Cosmology (2nd ed.). Academic Press, Netherlands.

[6] PEACOCK, J. A. (2016). Cosmological Physics. Cambridge University Press, UK.

[7] PLANCK COLLABORATION; AGHANIM, N.; et al. (2020). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. Astronomy & Astrophysics, France, 641, A6.

[8] WEINBERG, S. (2008). Cosmology. Oxford University Press, UK.

[9] MARTIN, J. (2012). Everything You Always Wanted To Know About The Cosmological Constant Problem (But Were Afraid To Ask). Comptes Rendus Physique, France, 13, 566–665.

[10] MARTIN, J.; RINGEVAL, C.; TROTTA, R.; VENNIN, V. (2014). The Best Inflationary Models After Planck. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, UK, 1403, 039.

[11] WEINBERG, S. (1972). Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. Wiley, USA.

[12] WEINBERG, S. (1989). The Cosmological constant problem. Reviews of Modern Physics, USA, 61, 1–23.

[13] WEINBERG, S. (1992). Dreams of a final theory: The Search for the fundamental laws of nature. Pantheon Books, USA.

[14] WEINBERG, S. (2002). Cosmological fluctuations of short wave-length. Astrophysical Journal, USA, 581, 810–816.

[15] WEINBERG, S. (2005). The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations. Cambridge University Press, UK.

[16] WEINBERG, S. (2006). A No-Truncation Approach to Cosmic Microwave Background Anisotropies. Physical Review D, USA, 74, 063517.

[17] KOWALSKI, M.; et al. (2008). Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets. Astrophysical Journal, USA, 686, 749.

[18] KNOP, R. A.; ALDERING, G.; AMANULLAH, R.; ASTIER, P.; et al. (2003). New Constraints on Ω_M, Ω_Λ, and w from an Independent Set of 11 High-Redshift Supernovae Observed with HST. Astrophysical Journal, USA, 598, 102.

[19] SPERGEL, D. N.; et al. (WMAP Collaboration) (2003). First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. Astrophysical Journal Supplement Series, USA, 148(1), 175.

[20] ALLEN, S. W. (2011). Cosmological Parameters from Observations of Galaxy Clusters. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, USA, 49, 409–470.