وجود الحل ووحدانيته لمعادلة بواسون على منطقة متعددة الوجوه بطريقة بيرون

[1] سوزان مفيد السماعيل [2] أ.د. محمد عامر [3] د. محمد شراباتي

الملخص

نتناول في هذا البحث دراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة ديرخليه لمعادلة بواسون:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

على صف المناطق المحدودة متعدّدة الوجوه $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (حيث $n \geq 2$)، والمحققة لشرط الجانب الواحد (يقع Ω موضعياً على جانبٍ واحدٍ من حدّه، ويكافئ ذلك: $\Omega = \text{int}(\overline{\Omega})$)، وذلك بطريقة بيرون.

وتكمن مساهمة البحث في معيار وحيد للانتظام عند نقاط الحدود والذي يكافئ الشرط الزاوي: $\overline{D}_\xi \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$.

وانطلاقاً منه نبني حاجزاً $W(rw) = r^\lambda \psi(w)$ بالأس:

$$\lambda = \frac{-(n-2) + \sqrt{(n-2)^2 + 4\mu_1}}{2} > 0$$

حيث ψ الدالة الذاتية الموجبة لمؤثر لابلاس _ بلترامي على المنطقة الكروية الجزئية $\boldsymbol{D}$` بقيمة ذاتية $\mu_1 > 0$ ، فتكون كل نقطة من $\partial\Omega$ منتظمة، عندئذٍ يكون للمسألة حلاً وحيداً $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

الكلمات المفتاحية: معادلة بواسون، مسألة ديرخليه، طريقة بيرون، الدوال تحت التوافقيّة، دالّة الحاجز، النقطة المنتظمة، شرط المخروط الخارجي، المناطق متعدّدة الوجوه، مؤثّر لابلاس–بلترامي.

[1] معيدة موفدة، طالبة ماجستير، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة حمص

[2] عضو هيئة تدريسية، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة حمص

[3] عضو هيئة تدريسية، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة حمص

Existence and Uniqueness of the Solution to Poisson's Equation on a Polyhedral Domain by Perron's Method

Souzan Mufid Al Smail [1] Dr. Mohamad Amer [2] Dr. Mohamad Charabati [3]

Abstract

In this paper we study the existence and uniqueness of the solution to the Dirichlet problem for Poisson's equation:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

over the class of bounded polyhedral domains $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (where $n \geq 2$) satisfying the one-sided condition (Ω lies locally on one side of its boundary، this is equivalent to: $\Omega = \text{int}(\overline{\Omega})$), by Perron's method.

The contribution of this research lies in a single criterion for regularity at boundary points, which is equivalent to the angular condition $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$.

From it, we construct a barrier $W(rw) = r^\lambda \psi(w)$ with exponent:

$$\lambda = \frac{-(n-2) + \sqrt{(n-2)^2 + 4\mu_1}}{2} > 0$$

where ψ is the positive eigenfunction of the Laplace–Beltrami operator on the spherical subdomain $\boldsymbol{D}^{`}$ with eigenvalue $\mu_1 > 0$ ، then every point of $\partial\Omega$ is regular, whereupon the problem has a unique solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Keywords: Poisson's equation, Dirichlet problem, Perron's method, subharmonic functions, barrier function, regular points, exterior cone condition, polyhedral domains, Laplace–Beltrami operator.

[1] Seconded Teaching Assistant، Master's Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Homs University

[2] faculty member, Department of Mathematics, Faculty of Science, Homs University

[3] faculty member, Department of Mathematics, Faculty of Science, Homs University

1. المقدمة:

تُعدّ معادلة بواسون $-\Delta u = f$ من المعادلات الأساسية في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية، إذ تمثل المعادلة المنظِّمة لجهد الكمون، وتصف حالات الاستقرار في مناطق فيزيائية متعددة كالانتشار الحراري والجاذبية وميكانيك الموائع [4]. وترتبط بهذه المعادلة مسألة ديرخليه والتي تُعنى بإيجاد حلٍ يتطابق على حدود المنطقة مع قيم حدية مفروضة وهذا ما جعلها المسألة التأسيسية لمسائل القيم الحدّية منذ القرن التاسع عشر [2].

وقد ظُنّ طويلًا، استنادًا إلى «مبدأ ديرخليه»، أنّ حلّ هذه المسألة مضمونٌ دائمًا باعتباره مصغِّرًا لطاقة ديرخليه، إلى أن بيّن فايرشتراس أن وجود هذا المُصغِّر غير مضمون [2] بتقديم أمثلة تُبيّن أن الحل قد يخفق في بلوغ قيمه الحدية عند نقاط «غير منتظمة» مثل: الكرة المثقوبة عند زاريمبا (1911)، وشوكة ليبيغ (spine Lebesgue , 1912) [2]. وقد نُقلت هذه النتائج من إثبات الوجود الداخلي للحل إلى دراسة انتظام النقطة الحدّية.

وقد أحدثت طريقة بيرون تحولاً يفصل إثبات الوجود الداخلي عن انتظام الحدود حيث يُبنى الحلّ باعتباره الحدّ الأعلى لمجموعة الدوال تحت التوافقية S_φ، فيثبت توافقيًّا في الداخل دون أيّ شرطٍ على الحدود، ولا يبقى إلا التحقّق من بلوغه القيم الحدية المعطاة عند كلّ نقطة، وهو ما يكفله وجود «حاجزٍ» عندها [1].

وبالنسبة للمناطق ذات الحدود الملساء يُعد شرط الكرة الخارجية (بوانكاريه) [1]، أو شرط المخروط الخارجي (زاريمبا) [12] شرطاً كافياً لضمان هذا الانتظام، غير أنّ شرط الكرة الخارجية لا يصلح عند

الزوايا والحواف والرؤوس التي تُكوّن حدود المناطق متعدّدة الوجوه، وبخاصّةٍ عند الزوايا المنعكسة (غير المحدّبة) [6]. وهذه المناطق ليست حالاتٍ شاذّة، بل هي القاعدة في التطبيقات العملية والهندسية بدءاً من طريقة العناصر المنتهية، والبلّورات وأدلّة الموجات في الفيزياء، إلى مسائل الجهد في الأوساط ذات الحواف الحادّة [6]. وقد بُنِيت لهذه المناطق نظريات عميقة (مثل أعمال: كوندراتييف، مازيا، داوج) والتي تعتمد على فضاءات سوبوليف الموزونة والتحليل الطيفي على المقاطع الكروية [9]، ورغم قوة هذه الأدوات إلا أنها تتطلب بناءً رياضياً يتجاوز ما يحتاجه إثبات وجود الحل في حدّ ذاته.

كما يقدّم هذا البحث مسلكًا مغايرًا، إذ يعالج المسألة على المناطق متعدّدة الوجوه بأدواتٍ تحليلية أوّليّةٍ كافية، إذ يردّ الانتظام إلى الدراسة عند كلّ نقطةٍ حدّية، وإلى بناء حاجزٍ مباشر من الدالّة الذاتيّة لمؤثّر لابلاس–بلترامي على المقطع الكروي، فيَثبت وجود الحل على أوسع صفٍ من متعددات الوجوه – محدّبةً كانت أم غير محدّبة – دون تجاهل الإطار الكلاسيكي لطريقة بيرون [1].

2. مشكلة البحث:

تكمن مشكلة البحث في إثبات وجود ووحدانية الحل لمسألة ديرخليه لمعادلة بواسون على صف المناطق المحدودة متعدّدة الوجوه $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (حيث $n \geq 2$)، عبر إيجاد معيارٍ وحيد للانتظام صالحٍ في الحالات الثلاث (وجه/حافة/رأس) بما فيها الحالة غير المحدّبة، وبناء حاجزٍ صريحٍ عند كلّ نقطةٍ حدّية [1].

ويتفرّع ذلك إلى **[9,11,12]:**

(أ) إثبات التطابق المخروطي التام، أي تطابق المنطقة محلّيًّا مع مخروطها المماسّ عند كلّ نقطة حدية.

(ب) توصيف وجود المخروط الخارجي بالشرط الزاوي: $\overline{D}_{\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$.

(ج) التحقّق من هذا الشرط عبر الحالات الثلاث.

(د) بناء الحاجز من أوّل دالةٍ ذاتيّةٍ موجبة لمؤثّر لابلاس–بلترامي على المقطع الكروي.

3. أهمية البحث:

تكمن أهمية هذا البحث في عدّة وجوه.

أوّلًا: إنّه يوحّد الحالات الحدّية الثلاث (الوجه والحافة والرأس) تحت معيارٍ وحيد – المخروط الخارجي والشرط الزاوي المكافئ له – عوضًا عن المعالجات المتفرّقة لكلّ حالةٍ على حدة **[12]**.

ثانيًا: يقدّم برهانًا لدراسة الوجود بحيث يبقى ضمن الإطار الكلاسيكي لطريقة بيرون **[1]**.

ثالثًا: يُثبِت النتيجة بمعزلٍ عن تحدّب المنطقة، فيشمل متعددات الوجوه غير المحدّبة ذات الزوايا المنعكسة، حيث يخفق شرط الكرة الخارجية بينما يبقى المخروط الخارجي **[12]**.

رابعًا: بناء حاجزٍ صريحٍ $W(r\omega) = r^{\lambda}\psi(\omega)$ من أوّل دالّةٍ ذاتيّةٍ موجبةٍ لمؤثّر لابلاس–بلترامي على المقطع الكروي، فيربط انتظام الحدّ بهندسة المخروط المماسّ وطيف المقطع الكروي **[12]**.

وأخيرًا: يربط البحث بين نظرية الكمون الكلاسيكية وطريقة بيرون **[1]** من جهة، وهندسة متعددات الوجوه والمخاريط المماسّة **[11]** من جهةٍ أخرى، ويكمّل الأدبيات التحليلية للمناطق ذات الزوايا **[7]** برؤيةٍ هندسيّةٍ مباشرة، وهو ما ينفع عمليًّا لعموم المناطق متعدّدة الوجوه في الحساب العددي والتطبيقات **[13]**.

4. مواد البحث:

4.1. تعريف < الدالة تحت التوافقية > [1]:

لتكن Ω منطقة مفتوحة ومحدودة في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ نقول عن الدالة $v: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ إنها **تحت توافقية** إذا حققت الشروط التالية:

1. **الاستمرارية** :تكون v مستمرة على المنطقة، أي $v \in C^0(\Omega)$.
2. **خاصية المقارنة التوافقية:(The Comparison Property)**

لكل كرة مفتوحة Bمحتواة تماماً في Ω (أي $B \subset\subset \Omega$) ولكل دالة hتحقق:

- $\Delta h = 0$ في B (دالة توافقية داخل الكرة).
- $h \in C^0(\bar{B})$ (مستمرة على غلاقة الكرة).
- $v \leq h$على حدود الكرة ∂B.

فإن شرط تحت التوافقية يفرض أن: $v(x) \leq h(x) \ , \ \forall x \in B$.

4.2. تعريف [1]:

بفرض أن Ω منطقة مفتوحة، نسمي الدالة $v \in C^2(\Omega)$ تحت توافقية إذا كان $\Delta v \geq 0$ وفوق توافقية إذا كان $\Delta v \leq 0$ في Ω.

4.3. بعض خصائص الدوال تحت التوافقية [1]:

1. إذا كانت u تحت توافقية في منطقة محدودة Ω فإنها تحقق مبدأ القيمة العظمى.
2. عند مقارنة دالة فوق توافقية v ودالة تحت توافقية u في المنطقة المحدودة Ω بحيث $v \geq u$ على $\partial\Omega$، فإما أن يكون $v > u$ في جميع Ω أو يكون $v \equiv u$.
3. إذا كانت uتحت توافقية في Ω ، وأخذنا كرة B بحيث $\bar{B} \subset \Omega$، من خلال تكامل بواسون ل u على ∂B فنحصل على دالة توافقية $\bar{u}$ في B بحيث تكون $u = \bar{u}$ على ∂B ومنه نحصل على دالة تحت توافقية U في Ω معرفة بالشكل: $U(x) = \begin{cases} \bar{u}(x) & ; x \in B \\ u(x) & ; x \in \Omega \backslash B \end{cases}$

4. لتكن $\{u_1. \dots . u_m\}$ مجموعة منتهية من الدوال تحت التوافقية في Ω عندئذٍ تكون:
$u(x) = \max_i \{u_i(x)\}$ تحت توافقية.

ملاحظة [3]: نعلم أن الحل الأساسي المحقق لـ $-\Delta\Phi = \delta_0$ (حيث δ_0 هي دالة دلتا ديراك المتمركزة عند الصفر) يعطى بالعلاقة:

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x| & if\ n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha_n}\frac{1}{|x|^{n-2}} & if\ n \geq 3 \end{cases}$$

حيث α_n هو حجم الكرة الواحدية $B(0,1)$ في الفضاء ذو n بُعد يعطى العلاقة:

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} & n\ even \\ \frac{2^{n+1/2}\pi^{n-1/2}}{1.3 \dots \dots \dots (n-2)n} & n\ odd, n \geq 3 \end{cases}$$

حجم الكرة $B(0,\rho)$ يعطى بالعلاقة $\alpha_n\rho^n$.

4.4. تعريف < الاستمرار وفق هولدر محلّياً > [3]:

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ منطقة مفتوحة، وليكن $\alpha \in (0,1]$.

(أ) نقول عن الدالّة $f: \Omega \to \mathbb{R}$ إنّها **مستمرّة وفق هولدر بالأُسّ** α على مجموعة $E \subseteq \Omega$ إذا وُجد ثابت $C \geq 0$ بحيث:

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|^{\alpha} \qquad \forall\ x, y \in E.$$

(ب) ونقول إنّها **مستمرّة وفق هولدر محلّياً** في Ω، ونكتب $f \in C^{\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$، إذا كانت مستمرّة وفق هولدر بالأُسّ α على كلّ مجموعة متراصّة $K \subset\subset \Omega$، بثابت $C = C(K)$ يعتمد على K.

4.5. مبرهنة [1]:

ليكن

$$w(x) = \int_{\Omega} \Phi(x-y)\, f(y) dy$$

إذا كانت f محدودة ومستمرة وفق هولدر محلياً فإن $w \in C^2(\Omega)$ و $-\Delta w = f$ في Ω..

4.6. تعريف < متعدد الوجوه > [5]:

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (حيث $n \geq 2$) منطقة مفتوحة ومتصلة ومحدودة، نقول إن Ω متعدد وجوه إذا تحقق الشرطان:

1) الحدُّ مسطّحٌ على قِطَع: لكلّ $\xi \in \partial\Omega$ يوجد جوارٌ مفتوحٌ U لـ ξ بحيث يتطابق $\partial\Omega \cap U$ مع اتّحادٍ منتهٍ من قطعٍ مستويةٍ بُعدُها $n-1$.

2) شرطُ الجانب الواحد: يقع Ω موضعياً على جانبٍ واحدٍ من حدّه؛ ويكافئ ذلك:

$$\Omega = \mathrm{int}(\overline{\Omega})$$

ملاحظة < الصيغة المحدّبة >: إذا كان Ω محدّباً، يكافئ ذلك كون Ω داخل تقاطع منتهٍ لأنصاف الفضاءات:

$$\Omega = int\left(\bigcap_{i=1}^{N}\left\{x \in \mathbb{R}^n : a_i.x \leq b_i\right\}\right), \quad a_i \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, b_i \in \mathbb{R}$$

بشرط أن يكون الداخل غير خالٍ ومحدوداً.

بنية الحدّ [11]:

بما أنّ $\partial\Omega$ متراصة والشرطُ (1) موضعيٌّ، فإنّ عددَ القطع المستوية منتهٍ. وعليه تتفكّك $\partial\Omega$ إلى اتّحادٍ منتهٍ ومنفصلٍ من طبقاتٍ مفتوحةٍ نسبياً:

$$\partial\Omega = \bigcup_{d=0}^{n-1} \mathcal{F}_d,$$

حيث $\mathcal{F}_d$ اتّحادُ الطبقات ذات البُعد d. ونسمّي الطبقةَ ذاتَ البُعد $n-1$ **وجهاً**، وذاتَ البُعد $n-2$ **حافةً**، وذاتَ البُعد 0 **رأساً**. وتوجد **طبقاتٌ وسطية** ببُعد $1 \leq d \leq n-3$ حيث $n \geq 4$.

4.7. تعريف < الأثر الزاوي والمخروط المماس > [10]:

لتكن $\xi \in \partial\Omega$، نعرّف **الأثر الزاوي** للمنطقة Ω عند ξ:

$$D_\xi := \{\omega \in \mathbb{S}^{n-1} : \exists\sigma > 0 \ \ ,\forall\, t \in (0,\sigma) :\ \xi + t\omega \in \Omega\}$$

ونسمي المخروط المولَّد عنه:

$$K_\xi = \{\xi + r\omega \ : r > 0 \ , \omega \in D_\xi \}$$

المخروط المماس لـ Ω عند ξ.

ملاحظة: D_ξ هو مجموعة الاتجاهات القطرية الداخلة، وأيضاً يتطابق مع أثر المخروط المماس في متعدد الوجوه Ω.

4.8. تعريف < شرط المخروط الخارجي بزاوية صلبة موجبة > [12]:

لتكن $\xi \in \partial\Omega$، نقول إن Ω **يحقق شرط المخروط الخارجي** عند ξ إذا وجد متجه واحدي $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ حيث

$\mathbb{S}^{n-1} = \{\omega \in \mathbb{R}^n : |\omega| = 1\}$ هي الكرة الواحدية، ونصف زاوية $\beta \in (0, \pi/2]$، ونصف قطر $\rho > 0$ بحيث يكون المخروط ذو الرأس ξ والمحور e ونصف الزاوية β:

$$C_\xi(e,\beta) := \left\{x \in \mathbb{R}^n \ :\ (x-\xi).e \geq |x-\xi|\cos\beta \ \right\}$$

محقّقاً: $C_\xi(e,\beta) \cap B_\rho(\xi) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \Omega$.

والزاوية الصلبة الموجبة تعني أنه بعد نقل الرأس ξ إلى المبدأ، يكون أثر المخروط على الكرة الواحدية $\mathbb{S}^{n-1}$:

$$D_{C_\xi} := C_\xi(e,\beta) \cap \mathbb{S}^{n-1} = \{\omega \in \mathbb{S}^{n-1} : \ \omega.e \geq \cos\beta \ \ \} = \bar{B}_\beta(e)$$

وهي **الكرة الجيوديزية المغلقة** ذات المركز e ونصف الزاوية β في $\mathbb{S}^{n-1}$. **والزاوية الصلبة** للمخروط هي قياسها السطحي (قياس هاوسدورف ذو البعد $n-1$):

$$\left|\bar{B}_\beta(e)\right| = \mathcal{H}^{n-1}\left(\bar{B}_\beta(e)\right) = |\mathbb{S}^{n-2}| \int_0^\beta \sin^{n-2} t \, dt > 0\,, \quad \forall \beta > 0$$

فالشرط $\beta > 0$ يكافئ تماماً إيجابية الزاوية الصلبة.

4.9. تعريف < الحاجز > [1]:

لكل نقطة $\xi \in \partial\Omega$ نعرّف الحاجز عند ξ بالنسبة إلى Ω ويرمز له بالرمز W على أنه دالة من الصنف $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ بحيث تحقق:

W فوق توافقية في Ω.

$W > 0 \ in \ \overline{\Omega}\backslash\{\xi\}$.

$W(\xi) = 0$.

النقطة ذات الحاجز تسمى نقطة منتظمة.

ملاحظة [8]:

اللابلاسيان في الاحداثيات الكروية ($\omega \in \mathbb{S}^{n-1}, x = r\omega\,,\ r > 0$):

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

حيث $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ هو مؤثر لابلاس–بلترامي على الكرة الواحدية $\mathbb{S}^{n-1}$ والذي هو تباعُد التدرّج على الكرة:

$$\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} f = \mathrm{div}_{\mathbb{S}^{n-1}}(\nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} f)$$

المسألة والفرضيات:

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ منطقة مفتوحة ومتصلة ومحدودة متعدّدَة الوجوه، سوف ندرس الآن مسألة ديرخليه:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & in\ \Omega \\ u = g & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

بالفرضيات: f محدودة ومستمرة وفق هولدر محلياً $f \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega) \cap L_{\infty}$ و $g \in C(\partial\Omega)$.

وبحسب مبرهنة الكمون النيوتوني، لدينا $w(x) = \int_{\Omega} \Phi(x-y)\, f(y) dy$، يحقق المعادلةَ $-\Delta w = f$ في Ω عندئذٍ نضع: $\varphi := (g-w)|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$ **[1]**:

وبالتالي يكون حل المسألة u إذا وفقط إذا كان:

$h := u - w$ توافقية في Ω و $h = \varphi$ على $\partial\Omega$.

إذاً يكفي حل المسألة:

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & in\ \Omega \\ h = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

لتكن $m \leq \varphi \leq M$، نعرف **مجموعة الدوال التحتية [1]**:

$$S_\varphi = \left\{ v \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) : \ \Omega \text{ تحت } v \text{ في توافقية } , \ \limsup_{x\to\xi} v(x) \le \varphi(\xi) \ \ \forall\, \xi \in \partial\Omega \right\}$$

نلاحظ أن المجموعة غير خالية ومحدودة من الأعلى بـ M وذلك لأن:

المجموعة غير خالية لأنه لو أخذنا الدالة الثابتة $v_0 \equiv m$ حيث $m = \min_{\partial\Omega} \varphi$ نلاحظ أنها تحقق:

$$v_0 \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) \quad , \Delta v_0 \ge 0 \quad , \qquad \limsup_{x\to\xi} v_0(x) = m \le \varphi(\xi) \ \ \forall\, \xi \in \partial\Omega$$

عندئذٍ فإن $v_0 \in S_\varphi$.

وأيضاً محدودة من الأعلى بـ M (حسب خاصية مبدأ القيمة العظمى والتي تنص على أن الدالة تحت التوافقية تبلغ قيمتها العظمى على الحدود) أي أن $v \le M$ لكل $v \in S_\varphi$ حيث $M = \max_{\partial\Omega} \varphi$.

لنعرّف **دالة بيرون [1]**:

$$h(x) = \sup\left\{ v(x) : \quad v \in S_\varphi \right\} \quad , \qquad x \in \Omega$$

وهي معرّفة جيداً لأنه لو أخذنا الدالة الثابتة $v_0 \equiv m$ حيث $m = \min_{\partial\Omega} \varphi$ نلاحظ أنها تحقق:

$$v_0 \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) \quad , \Delta v_0 \ge 0 \quad , \ \limsup_{x\to\xi} v_0(x) = m \le \varphi(\xi) \ \ \forall\, \xi \in \partial\Omega$$

$$h(x) = \sup_{v\in S_\varphi} v(x) \ge v_0(x) = m$$

وبما أن $v \in S_\varphi$ محدودة عندئذٍ فإن:

$$h(x) = \sup_{v\in S_\varphi} v(x) \le M$$

عندئذٍ فإن: $m \le h \le M$.

لنثبت أن h توافقية في Ω بطريقة بيرون:

بأخذ $x_0 \in \Omega$ نقطة اختيارية وكرة $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$، وبما أن

$$h(x) = \sup_{v \in S_\varphi} v(x)$$

توجد متتالية $\{v_k\} \subset S_\varphi$ بحيث $v_k(x_0) \longrightarrow h(x_0)$ عندما $k \longrightarrow \infty$.

وباستبدال v_k ب $max\{v_1, \dots, v_k, m\}$ حيث يبقى $v_k \in S_\varphi$ وذلك حسب الخاصية التي تنص على أن القيمة العظمى لعدد منته من دوال تحت توافقية هي دالة تحت توافقية وعلى الحدود:

$$\limsup_{x \to \xi} v_k = \max_j \{\limsup v_j, m\} \le max\{\varphi(\xi), m\} = \varphi(\xi)$$

عندئذٍ يكون $m \le v_1 \le v_2 \le \cdots \le h$.

لنعرّف الرفع التوافقي:

$$V_k = \overline{v_k} = \begin{cases} \int_{\partial B} p(x,y) v_k(y)\, dS_y & , x \in B \\ v_k(x) & , x \in \Omega \backslash B \end{cases}$$

أي أنه داخل B هو تكامل بواسون لقيم v_kعلى ∂B (فتكون توافقية) وخارجها تبقى v_kكما هي.

حيث $p(x,y)$ هي نواة بواسون للكرة في $\mathbb{R}^n$ **[3]**:

$$p(x,y) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{n\alpha_n R} \frac{1}{|x-y|^n}\,, \qquad x \in B_R(x_0)\,, y \in \partial B_R(x_0)$$

حيث α_n هي حجم الكرة الواحدية و dS_y عنصر المساحة على $\partial B_R(x_0)$.

فتكون:

- $V_k \in S_\varphi$: واضح أنها تبقى تحت توافقية في Ω وبما أن $B \subset\subset \Omega$ فقرب الحدود $\partial\Omega$ يكون $V_k = v_k$ عندئذٍ يكون:

$$\limsup_{x\to\xi} V_k = \limsup_{x\to\xi} v_k \le \varphi(\xi)$$

- V_k توافقية في B: لأنه داخل B فإن V_k هي تكامل بواسون وهو توافقي بالبناء أعلاه.

- $V_k \ge v_k$: لنفرض أن $q := v_k - V_k$ عندئذٍ نلاحظ أن q تحت توافقية داخل B وذلك لأن $\Delta v_k \ge 0$ و

$\Delta V_k = 0$ عندئذٍ فإن:

$$\Delta q = \Delta v_k \ge 0$$

و $q = 0$ على ∂B وذلك لأن $v_k = V_k$.

وحسب مبدأ القيمة العظمى فإن الدالة تحت التوافقية تبلغ قيمتها العظمى على الحدود أي أن:

$$q \le \max_{\partial B} q = 0 \implies V_k \ge v_k \ \ in\ B$$

- $V_k \le M$: لأن $V_k \in S_\varphi$ حسب مبدأ القيمة العظمى يتم المطلوب.

- V_k متزايدة: نعلم $v_k \le v_{k+1}$ عندئذٍ يكون $V_k \le V_{k+1}$ داخل B.

وخارج B يكون $V_k = v_k \le v_{k+1} = V_{k+1}$.

ينتج أن:

$$v_k(x_0) \le V_k(x_0) \le h(x_0) \Longrightarrow V_k(x_0) \longrightarrow h(x_0)$$

وبحسب مبرهنة هارناك للتقارب **[1]:** فإن $V_k \longrightarrow V$ بانتظام على أي مجموعة متراصة في B و V توافقية في B، ومن $v_k(x_0) \leq V_k(x_0) \leq h(x_0)$ ينتج $V(x_0) = h(x_0)$ ومن $V_k \leq h$ ينتج $V \leq h$ في B.

والآن لنثبت أن $V \equiv h$ في B: لنفرض جدلاً أن $V \not\equiv h$، فتوجد $z \in B$ بحيث $V(z) < h(z)$، وبأخذ $\bar{u} \in S_\varphi$ بحيث $\bar{u}(z) > V(z)$ ولنضع:

$$u_k = max\{\bar{u}, V_k\} \in S_\varphi$$

وليكن $U_k = \overline{u_k}$ فتكون $U_k \in S_\varphi$ ومتزايدة و $U_k \geq V_k$ فحسب هارناك U_k تتقارب من دالة توافقية في B أي أن $U_k \longrightarrow U$ بحيث:

$$V \leq U \leq h\,, \quad U(x_0) = h(x_0) = V(x_0)$$

عندئذٍ فإن الدالة $U - V$ توافقية في B(لأنها فرق توافقيتين)، وغير سالبة $(U \geq V)$، وتنعدم عند النقطة الداخلية x_0 فحسب مبدأ القيمة الصغرى القوي **[1]** (دالّة توافقية غير سالبة تبلغ قيمتها الصغرى 0 عند نقطة داخلية تنعدم في كامل المنطقة) يكون $U \equiv V$ في B، لكن:

$$U(z) \geq U_k(z) \geq u_k(z) \geq \bar{u}(z) > V(z) = U(z)$$

وهذا تناقض، إذاً $V \equiv h$ في B، فتكون h توافقية في B، وبما أن x_0 اختيارية، عندئذٍ تكون h توافقية في كل Ω.

الآن بعد إثبات أن دالة بيرون h توافقية في كل Ω، يبقى أن نبيّن أنها تبلغ القيم الحدية φ على $\partial\Omega$. وهذا يكافئ أن تكون كل نقطة من $\partial\Omega$ منتظمة. والصعوبة أن حدود المنطقة متعددة الوجوه ليست ملساء: تتركب من أوجه وحواف ورؤوس، نعالج ذلك بتصنيف نقاط الحدود ثم بناء حاجز عند كل نقطة عبر شرط المخروط الخارجي للانتظام.

توطئة < التطابق المخروطي التام >:

ليكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ منطقة متعددة الوجوه، فعند كل نقطة حدية $\xi \in \partial\Omega$ يوجد $\rho > 0$ ومجموعة مفتوحة $D_\xi \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ بحيث (بعد نقل ξ إلى المبدأ):

$$\Omega \cap B_\rho = \{r\omega : 0 < r < \rho\,, \omega \in D_\xi\} = K_\xi \cap B_\rho$$

حيث $K_\xi = \{rw : r > 0\,, w \in D_\xi\}$ هو المخروط المماس.

أي أن Ω يتطابق محلياً مع مخروطه المماس K_ξ تطابقاً تاماً لا تقريبياً.

الإثبات:

لنبرهن على الصيغة المحدبة للوضوح، حيث:

$$\Omega = int\left(\bigcap_{i=1}^{N}\left\{x \in \mathbb{R}^n : a_i.x \le b_i\right\}\right), \quad a_i \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}, b_i \in \mathbb{R}$$

ثم نشير في النهاية إلى الحالة العامة.

بعد نقل ξ إلى المبدأ أي لنضع $\xi = 0$ فيكون $0 \in \partial\Omega$، نقسّم القيود $\{a_i \cdot x \le b_i\}$ قسمين حسب مرورها بالمبدأ:

القيود المارة بالمبدأ: هي التي $b_i = 0$ (إذ 0 على حدها: $a_i.0 = 0 = b_i$). نرمز لمجموعة دلائلها

$$J = \{i :\ b_i = 0\}.$$

القيود غير المارة بالمبدأ: هي التي $b_i \neq 0$ (وبما أن $0 \in \Omega \subseteq \{a_i.x \le b_i\}$ يكون $b_i \ge 0$ أي $b_i > 0$). نرمز لمجموعة دلائلها $I = \{i :\ b_i > 0\}$.

القيود المارة بالمبدأ مخروطية أي لكل $i \in J$، نصف الفضاء $a_i.x \leq 0$ مخروط: لأنه إذا كان $a_i.x \leq 0$ فإن $a_i.(tx) = t(a_i.x) \leq 0$ لكل $t > 0$. إذاً تقاطعهما:

$$K_\xi := \bigcap_{i\in J}\{x : \ a_i.x \leq 0\}$$

مخروط مماسي (تقاطع مخاريط). نعرّف $D_\xi := int(K_\xi) \cap \mathbb{S}^{n-1}$.

أما القيود غير المارة بالمبدأ يكون لكل $i \in I$، مستوى القيد $\{a_i.x = b_i\}$ لا يمر بالمبدأ، فمسافته عن المبدأ موجبة:

$$d_i = dist(0, \{a_i.x = b_i\}) = \frac{b_i}{|a_i|} > 0$$

وبأخذ $\rho = \frac{1}{2}\min_{i\in I} d_i > 0$، عندئذٍ لكل $x \in B_\rho$ ولكل $i \in I$:

$$a_i.x \leq |a_i||x| < |a_i|\rho \leq |a_i|d_i = b_i$$

أي أن القيد $a_i.x \leq b_i$ محقق تلقائياً داخل B_ρ فالقيود غير المارة بالمبدأ غير فعالة في هذا الجوار.

ينتج من ذلك القيود الفعالة داخل B_ρ، هي $\{a_i.x \leq 0\}_{i\in J}$ أي المارة بالمبدأ (لأن قيود I محققة تلقائياً في الخطوة 2). إذاً:

$$\Omega \cap B_\rho = int(K_\xi) \cap B_\rho = \{r\omega : 0 < r < \rho\,, \omega \in D_\xi\} = K_\xi \cap B_\rho$$

وهذه مساواة تامة لا تقارب. إذ لم نهمل أي حد، بل أثبتنا أن القيود البعيدة لا أثر لها داخل B_ρ.

وبما أن $int(K_\xi)$ تقاطع منتهٍ لأنصاف فضاءات مفتوحة فهو مفتوح ومنه $D_\xi = int(K_\xi) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ مفتوح في $\mathbb{S}^{n-1}$، وحد D_ξ يتكون من تقاطع المستويات $\{a_i.x = 0\}_{i\in J}$ مع الكرة، أي أقواس من دوائر كبرى، فهو مسطّح على قطع.

ملاحظة < الحالة غير المحدبة >: برهنّا أعلاه على الصيغة المحدبة (تقاطع أنصاف فضاءات) للوضوح. في الحالة العامة يبقى التطابق المخروطي صحيحاً بالاعتماد على البنية المسطحة على قطع للحدود: أي قرب ξ، يكون $\partial\Omega$ اتحاداً منتهياً من وجوه مستوية، بعضها يمر ب ξ وبعضها لا، الوجوه التي لا تمر ب ξ مغلقة ولا تحويه، فمسافتها عنه موجبة، فنبعدها بأخذ كرة B_ρ صغيرة كفاية فتغدو غير فعالة. أما الوجوه المارة ب ξ فكل منها يطابق موضعياً مخروطه المماس عند ξ، لذا يكون $\partial\Omega \cap B_\rho$ مساوياً تماماً لاتحاد هذه المخاريط المماسة، وهو مخروط ومنه:

$$\Omega \cap B_\rho = K_\xi \cap B_\rho$$

بالضبط حيث K_ξ هو المخروط المماس وأثره الزاوي D_ξ حده أقواس دوائر كبرى.

أهمية هذه التوطئة أنها تختزل دراسة الحد إلى هندسة D_ξ على الكرة $\mathbb{S}^{n-1}$.

توطئة < شرط وجود المخروط الخارجي >:

تحوي المتممة $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ مخروطاً خارجياً عند ξ (برأس ξ وزاوية صلبة موجبة) إذا وفقط إذا كان:

$$\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1} \quad \text{أي} \quad |D_\xi| < |\mathbb{S}^{n-1}|$$

الإثبات:

لنضع $\xi = 0$، ونبرهن الاتجاهين.

الاتجاه ($\Longleftarrow$): أي إذا كان $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$ فيوجد مخروط خارجي.

بما أن $\overline{D_\xi}$ مغلقة و $\overline{D_\xi} \neq \mathbb{S}^{n-1}$ فإن:

$$U = \mathbb{S}^{n-1} \backslash \overline{D_\xi}$$

مفتوحة وغير خالية، لنختار $\omega_0 \in U$، ولأن U مفتوحة، توجد نصف زاوية $\beta \in (0, \pi/2]$ بحيث تكون الكرة الجيوديزية المفتوحة:

$$E_0 = \{\omega \in \mathbb{S}^{n-1} : \ (\omega, \omega_0) < \beta\} \subseteq U$$

ومساحتها $|E_0| > 0$، نعرف المخروط الخارجي بمحور $e = \omega_0$ ونصف الزاوية β:

$$C_\xi = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x.e \geq |x| \cos\beta \quad \}$$

ولأنّ $E_0 \subseteq U = \mathbb{S}^{n-1} \backslash \overline{D_\xi}$، فكلّ اتّجاه $\omega \in E_0$ ليس في D_ξ، أي $r\omega \notin \Omega$ لأجل r صغيرة. فبأخذ ρ صغيراً كفايةً (ضمن جوار التطابق المخروطي) نحصل على: $C_\xi \cap B_\rho \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \Omega$.

الزاوية الصلبة موجبة $\beta > 0$ عندئذٍ فإن $|E_0| > 0$ ، وبالتالي فيكون C_ξ مخروطاً خارجياً فعلياً.

الاتجاه ($\Longrightarrow$): إذا وجد مخروط خارجي فإن $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$.

نفترض وجود C_ξ مخروطاً خارجياً أثره الزاوي $E_0 \subset \mathbb{S}^{n-1}$ بمساحة موجبة، بحيث: $C_\xi \cap B_\rho \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \Omega$

عندئذٍ لكل $\omega \in E_0$ يكون $r\omega \in C_\xi \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ ل r صغيرة، أي $r\omega \notin \Omega$ وبالتالي فإن $\omega \notin D_\xi$، ومنه:

$$E_0 \cap D_\xi = \emptyset \quad \Longrightarrow D_\xi \subseteq \mathbb{S}^{n-1} \backslash E_0$$

ولأن المجموعة E_0 مفتوحة، فمتممتها $\mathbb{S}^{n-1} \backslash E_0$ مغلقة وتحوي انغلاق D_ξ، فينتج:

$$\overline{D_\xi} \subseteq \mathbb{S}^{n-1} \backslash E_0$$

ولأن $|E_0| > 0$ فإن $\mathbb{S}^{n-1} \backslash E_0 \neq \mathbb{S}^{n-1}$، ومنه $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$.

مبرهنة < التصنيف الثلاثي >: لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ منطقة متعددة الوجوه محدودة محققة لشرط الجانب الواحد (أي كل زاوية عند الحد أصغر تماماً من 2π). فعند كل نقطة من $\partial\Omega$ يتحقق $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$، ومن ثم يوجد مخروط خارجي عند ξ.

الإثبات:

بوضع ξ في المبدأ، يكون Ω مخروطاً بأثرٍ زاوي D_ξ، نميّز الحالات حسب بُعد الطبقة الحدّية التي تقع عليها ξ.

إذا كانت ξ نقطة وجه ذو البعد $n-1$، عندئذٍ يوجد مستوٍ واحد مار بالمبدأ، بمتجه ناظمي واحدي ν، بحيث يكون Ω محلياً هو نصف الفضاء المفتوح:

$$\Omega \cap B_\rho = \{x \in B_\rho : \ x.\nu < 0\}$$

وأثره الزاوي هو نصف الكرة المفتوحة:

$$D_\xi = \{\omega \in \mathbb{S}^{n-1} : \ \omega.\nu < 0\}, \quad \overline{D_\xi} = \{\omega : \ \omega.\nu \leq 0\}$$

فالنصف الآخر المفتوح $\{w.\nu > 0\}$ لا ينتمي إلى $\overline{D_\xi}$، ومنه $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$. (بل توجد كرة خارجية كاملة ملامسة، وهي أبسط مخروط خارجي).

وإذا كانت ξ نقطة حافة ذات البعد $n-2$ عندئذٍ يلتقي عندها وجهان بزاوية ثنائية الوجه $\theta \in (0,2\pi)$. باختيار إحداثيات مناسبة نفصل اتجاه الحافة عن المستوي العمودي عليها: يتطابق Ω محلياً قرب ξ مع:

$$\Omega \cap B_\rho \cong \left(S_\theta \times \mathbb{R}^{n-2}\right) \cap B_\rho$$

حيث $S_\theta \subset \mathbb{R}^2$ قطاع مستوٍ مفتوح بزاوية θ، و $\mathbb{R}^{n-2}$ اتجاه الحافة. (هذا التطابق المحلي قرب ξ تام للمخروط المماس).

أثره الزاوي D_ξ هو المجموعة القطبية المتولدة عن S_θ على الكرة. وبما أن $\theta < 2\pi$، فإن المتممة تحوي أثر الوتد المكمِّل بزاوية ثنائية الوجه:

$$2\pi - \theta > 0$$

وهو مخروط بزاوية صلبة موجبة. إذاً:

$$\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1} \quad \text{أي} \quad |D_\xi| < |\mathbb{S}^{n-1}|$$

(نلاحظ أنه إذا كانت $\theta > \pi$ زاوية داخلية فلا توجد كرة خارجية، لكن الوتد الخارجي بزاوية $2\pi - \theta$ يكفي، وهنا تظهر ضرورة المخروط لا الكرة).

إذا كانت ξ نقطة رأس معزول، يلتقي عنده عدد منتهٍ من الأوجه، أثره الزاوي D_ξ هو مضلع كروي على $\mathbb{S}^{n-1}$ (تقاطع منتهٍ من أنصاف الكرات المحددة بالمستويات المارة بالرأس). والزاوية الصلبة ل Ω عند الرأس هي $|D_\xi|$.

وبما أن الرأس محقق لشرط الجانب الواحد، وبالفرض $|D_\xi| < |\mathbb{S}^{n-1}|$، أي يبقى على الكرة جزء بمساحة موجبة خارج $\overline{D_\xi}$. ومنه $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$.

ففي الحالات الثلاث يتحقق $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$. وحسب التوطئة السابقة يوجد مخروط خارجي عند ξ. ولأن كل نقطة من $\partial\Omega$ تقع في إحدى هذه الطبقات، عندئذٍ يتحقق الشرط عند كل نقطة.

ملاحظة: الكرة الخارجية في حالة الوجه ليست استثناء بل حالة خاصة من المخروط (نصف الفضاء مخروط). فالمعيار الواحد يغطي الطبقات الثلاث دفعة واحدة، والتصنيف يبين لماذا يتحقق الشرط في كل نوع، وشرط الجانب الواحد ضروريّ: إذ أن الزاوية $(\theta = 2\pi)$ تجعل $\overline{D_\xi} = \mathbb{S}^{n-1}$ فينعدم المخروط الخارجي.

مبرهنة < شرط المخروط الخارجي للانتظام >:

إذا حقق Ω شرط المخروط الخارجي عند ξ، فإن ξ منتظمة، وذلك لكل $n \geq 2$.

الإثبات:

بوضع $\xi = 0$، وليكن $E_0 \subset \mathbb{S}^{n-1}$ الأثر الزاوي للمخروط الخارجي C_ξ (كرة جيوديزية مفتوحة مركزها e ونصف قطرها الزاوي $\beta > 0$). فالأثر الزاوي للمنطقة $D = \{\omega : r\omega \in \Omega\}$ يحقق $D \cap E_0 = \emptyset$، ومنه:

$$\overline{D} \subseteq \mathbb{S}^{n-1} \backslash E_0 \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}.$$

بما أن $\overline{D}$ متراصة داخل المنطقة المفتوحة $\mathbb{S}^{n-1} \backslash \overline{E_0^`}$ (حيث $E_0^` \subset E_0$ كرة جيوديزية مغلقة أصغر ذات مساحة موجبة)، نختار منطقة كروية مفتوحة ملساء الحد $D^`$ بحيث:

$$\overline{D} \subset D^` \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$$

أي نوسع D نحو المخروط الخارجي فتبقى $D^`$ منطقة على الكرة.

ولتكن $\mu_1 = \mu_1(D^`) > 0$ أول قيمة ذاتية لمسألة ديرخليه لمؤثر لابلاس–بلترامي على $D^`$ و ψ دالتها الذاتية:

$$-\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\psi = \mu_1\psi \quad in\ D^`, \quad \psi = 0 \quad on\ \partial D^`, \ \psi > 0 \ in\ D^`$$

وجود ψ وموجبيتها وكون $\mu_1 > 0$ ولأن $\overline{D} \subset D^`$ متراصة داخل المنطقة المفتوحة، يوجد ثابت $c > 0$ بحيث:

$$\psi \geq c > 0 \quad on\ \overline{D}$$

نبحث الآن عن أس λ يجعل الدالة المتجانسة $W = r^\lambda\psi(w)$ توافقية. وبتطبيق اللابلاسيان في الإحداثيات الكروية على W:

$$\partial_r^2 W = \lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2}\psi \ , \ \frac{n-1}{r}\partial_r W = (n-1)\lambda r^{\lambda-2}\psi \ , \ \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} W = r^{\lambda-2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\psi$$

وبالجمع:

$$\Delta W = r^{\lambda-2}[\lambda(\lambda+n-2)\psi - \mu_1\psi]$$

فتكون W توافقية إذا وفقط إذا كان: $\lambda(\lambda+n-2) = \mu_1$. وبأخذ الجذر الموجب:

$$\lambda = \frac{-(n-2)+\sqrt{(n-2)^2+4\mu_1}}{2} > 0$$

وهو موجب لأن $\mu_1 > 0$.

الآن لنعرّف الحاجز على $\Omega \cap B_\rho$ (حيث $w \in \overline{D} \subset D^{`}$):

$$W(rw) = r^\lambda \psi(w) \, , \qquad W(0) = 0$$

ونتحقق من خواصه الثلاث:

1. فوق توافقي: لأنه توافقي و $\lambda(\lambda+n-2) = \mu_1$:

$$\Delta W = r^{\lambda-2}[\mu_1\psi - \mu_1\psi] = 0$$

عندئذٍ فإن W توافقي في $\Omega \cap B_\rho$ وبالتالي فهو فوق توافقي.

2. $W(0) = 0$ لأن $\lambda > 0$ يكون $r^\lambda \longrightarrow 0$ عندما $r \longrightarrow 0^+$ و ψ محدودة، عندئذٍ فإن:

$$W(rw) \longrightarrow 0 = W(0)$$

3. $W > 0$ فيما عدا الرأس: عندما يكون $r > 0$ يكون $r^\lambda > 0$، و $\psi \geq c > 0$ على $\overline{D}$. إذاً $W(rw) \geq cr^\lambda > 0$ وذلك لكل $rw \neq 0$، وتنعدم عند الرأس $r = 0$ فقط.

إذاً W تمثل حاجزاً عند ξ، ووجود الحاجز يكافئ انتظام النقطة، عندئذٍ تكون ξ منتظمة.

مبرهنة < بلوغ القيم الحدية عند نقطة منتظمة> [1]:

إذا كانت ξ منتظمة و φ مستمرة عند ξ، عندئذٍ فإن دالة بيرون تبلغ القيمة الحدية عندها:

$$\lim_{x\to\xi} h(x) = \varphi(\xi).$$

الإثبات: ليكن $\varepsilon > 0$، وباستمرار φ، يوجد $\delta > 0$ بحيث $|\varphi - \varphi(\xi)| < \varepsilon$ على $\Omega\partial \cap B_\delta(\xi)$. وبوضع

$$M_0 = \sup_{\Omega\partial}|\varphi|.$$

وعلى المجموعة المتراصة $K = \overline{\Omega}\backslash B_\delta(\xi)$ تبلغ W حداً أدنى موجب $m_\delta > 0$، وباختيار $k = 2M_0/m_\delta$، فيكون $kW \geq 2M_0$ على K.

الدالة $s = \varphi(\xi) + \varepsilon + kW$ فوق توافقية و $s \geq \varphi$ على $\Omega\partial$، أي على $\Omega\partial \cap B_\delta$ يكون:

$$\varphi < \varphi(\xi) + \varepsilon \leq s$$

وعلى $\Omega\partial\backslash B_\delta$ يكون $s \geq \varphi(\xi) + \varepsilon + 2M_0 \geq M_0 \geq \varphi$. فحسب مبدأ المقارنة $h \leq s$. وبالتناظر

$h \geq \varphi(\xi) - \varepsilon - kW$. إذاً:

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - kW(x) \leq h(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + kW(x)$$

وبأخذ $x \longrightarrow \xi$ فإن $W \longrightarrow 0$ ثم $\varepsilon \longrightarrow 0$ عندئذٍ ينتج $\lim_{x\to\xi} h(x) = \varphi(\xi)$.

الخلاصة < وجود ووحدانية الحل على منطقة متعدّدة الوجوه >:

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ منطقة متعدّدَة الوجوه محدودة محقّقة لشرط الجانب الواحد، ولتكن $f \in C_{\mathrm{loc}}^{\alpha}(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$ و $g \in C(\partial\Omega)$. عندئذٍ لمسألة ديرخليه لمعادلة بواسون:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

حلٌّ **وحيد** $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

الإثبات:

لتكن $\xi \in \partial\Omega$ اختيارية، وبما أنّ Ω محقّقة لشرط الجانب الواحد، فإنّ $\overline{\mathrm{D}_{\xi}} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$ بالتعريف، وحسب التوطئة (شرط وجود المخروط الخارجي) فإنه يوجد مخروطٌ خارجيٌّ بزاويةٍ صلبةٍ موجبة عند ξ، وبحسب المبرهنة (شرط المخروط الخارجي للانتظام) تكون ξ منتظمة، ولأنّ ξ اختيارية، فكلّ نقاط $\partial\Omega$ منتظمة.

الوجود: أُنشئت دالّة بيرون **[1]**:

$$h(x) = \sup\left\{v(x) : \quad v \in \mathrm{S}_{\varphi}\right\} \quad , \qquad x \in \Omega$$

حيث $\varphi = (g - w)|_{\partial\Omega}$ و w الكمون النيوتوني، وأُثبت أنّها توافقيةٌ في Ω. ولأنّ كلّ نقطةٍ حدّيةٍ منتظمة و φ مستمرة، فإنّ h تبلغ القيمة الحدّية عند كلّ ξ (بالمبرهنة السابقة)، فتكون $h \in C(\overline{\Omega})$ وتحقّق

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & in\ \Omega \\ h = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ومن الكمون النيوتوني $-\Delta w = f$، تكون $u = h + w$ حلّاً للمسألة:

$$-\Delta u = -\Delta h - \Delta w = 0 + f = f \quad in\ \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi + w = g$$

و $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

الوحدانية: بفرض أن u_1 و u_2 حلَّين للمسألة، فإنّ فرقَهما $v = u_1 - u_2$ يحقّق $-\Delta v = f - f = 0$، أي أن v توافقيةٌ في Ω، ومستمرةٌ على $\overline{\Omega}$، وتنعدم على الحدّ: $v = g - g = 0$ على $\partial\Omega$. وبما أنّ Ω محدودة و v توافقيةٌ مستمرةٌ على $\overline{\Omega}$، فحسب مبدأ القيمة العظمى (والصغرى) **[1]** تبلغ v قيمتيها العظمى والصغرى على $\partial\Omega$، حيث $v = 0$، ومنه $v \equiv 0$ في $\overline{\Omega}$، أي أن $u_1 \equiv u_2$.

المراجع:

[1] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S., 2001. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.

[2] ARMITAGE, D. H.; GARDINER, S. J., 2001. Classical Potential Theory. Springer-Verlag, London.

[3] EVANS, L. C., 2010. Partial Differential Equations. 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society, Providence, RI.

[4] SALSA, S., 2016. Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory. 3rd ed., Unitext 99, Springer, Cham.

[5] MAZ'YA, V.; ROSSMANN, J., 2010. Elliptic Equations in Polyhedral Domains. Mathematical Surveys and Monographs 162, American Mathematical Society, Providence, RI.

[6] GRISVARD, P., 2011. Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Classics in Applied Mathematics 69, SIAM, Philadelphia.

[7] KOZLOV, V. A.; MAZ'YA, V. G.; ROSSMANN, J., 1997. Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities. Mathematical Surveys and Monographs 52, American Mathematical Society, Providence, RI.

[8] KOZLOV, V. A.; MAZ'YA, V. G.; ROSSMANN, J., 2001. Spectral Problems Associated with Corner Singularities of Solutions to Elliptic Equations. Mathematical Surveys and Monographs 85, American Mathematical Society, Providence, RI.

[9] DAUGE, M., 1988. Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains: Smoothness and Asymptotics of Solutions. Lecture Notes in Mathematics 1341, Springer-Verlag, Berlin.

[10] ROCKAFELLAR, R. T., 1970. Convex Analysis. Princeton Mathematical Series 28, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[11] ZIEGLER, G. M., 1995. Lectures on Polytopes. Graduate Texts in Mathematics 152, Springer-Verlag, New York.

[12] MILLER, K., 1967. Barriers on Cones for Uniformly Elliptic Operators. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 76(1), pp. 93-105.

[13] LI, H.; NICAISE, S., 2021. A Priori Analysis of an Anisotropic Finite Element Method for Elliptic Equations in Polyhedral Domains. Computational Methods in Applied Mathematics, 21(1), pp. 145-177.