دراسة جبرية حول جبورB

جامعة حمص– كلية العلوم– قسم الرياضيات

طالب الماجستير: محمد محمود الحايك

إشراف:

الدكتورة سوسن السطايحي الدكتورة نور رضوان

ملخص البحث

يتناول هذا البحث دراسة جبر B وبعض أنواعه الأساسية وهي: جبرB الـ 0– تبديلي و جبر B التبديلي، وجبرB التجميعي، والوسطي.إضافةً إلى دراسة علاقته بعدد من الجبور الأخرى مثل جبرQ، وBG، وRG، وTM، وBRK، وBZ، وBCH، حيث بينا أن بعض هذه الجبور تمثل تعميمات لجبرB، في حين يمكن الحصول على بعضها الآخرمن جبرB بإضافة شروط معينة. وقد برز خلال دراستنا الدور الأساسي للعنصر الثابت 0 في تكوين هذه العلاقات والحصول على العديد من النتائج الجبرية. وخلصنا في دراستنا إلى أن جبر Bيمثل إطاراً جبرياً عاماً ترتبط به عدة جبور منطقية، الأمر الذي يجعله محوراً مهماً في دراسة الجبر المنطقي، ويفتح المجال أمام المزيد من الدراسات المتعلقة بتطبيقاته وعلاقاته مع الجبور الأخرى.

الكلمات المفتاحية:

جبرB الـ 0– تبديلي، جبر B التبديلي، جبرB التجميعي، جبرB الوسطي.

Algebraic Study on B-Algebras

Homs University – Faculty of Science – Mathematics Department

Master's Student: Mohamed Mahmoud Al-Hayek

Supervisors by:

Dr. Sawsan Al-Satayhi **Dr. Nour Radwan**

Abstract

This research investigates B-algebras and some of their fundamental classes, namely: 0-commutative B-algebras, commutative B-algebras, associative B-algebras, and medial B-algebras. Furthermore, it examines their relationships with a number of other algebraic structures, including Q-algebras, BG-algebras, RG-algebras, TM-algebras, BRK-algebras, BZ-algebras, and BCH-algebras. We demonstrate that certain of these algebras constitute generalizations of B-algebras, whereas others can be derived from B-algebras by imposing additional specific conditions. Throughout our study, the fundamental role played by the constant element 0 in establishing these interrelations and deriving numerous algebraic results. It is concluded that B-algebras provide a general algebraic framework closely connected with various logical algebras, making them a significant subject in the study of algebraic logic and offering promising directions for further research into their applications and their relationships with other algebraic systems.

Key Words:

B-algebra, 0-commutative B-algebra, commutative B-algebra, associative B-algebra, medial B-algebra.

المقدمة:

إن لجبور المنطق دوراً مهماً في الرياضيات، حيث إن لها تطبيقات هامة في العديد من المجالات التطبيقية مثل علم الحاسوب ونظم المعلومات وغيرها. وقد عرفّ الباحثون العديد من جبور المنطق التي قدمت الحلول لكثير من المسائل التطبيقية في العلوم المختلفة.

يعد جبرB من الجبور المنطقية المهمة التي ظهرت في إطار تعميم بعض مفاهيم الجبر المنطقي، إذ تعتمد على عنصر ثابت و عملية ثنائية واحدة تحقق مجموعة من المبادئ الأساسية التي تمنح هذا الجبر خصائص مميزة وعلاقات وثيقة مع عدد من الجبور الأخرى. وقد حظي هذا الجبر باهتمام الباحثين لما يمتلكه من قدرة على التعميم وإمكانية الربط بينه وبين مختلف الجبور المنطقية.

هدف البحث:

الهدف من هذا البحث دراسة جبر B من حيث تعريفه وخواصه الأساسية، مع توضيح العلاقات المتبادلة بين هذه الخواص من خلال مجموعة من المبرهنات والنتائج الأساسية، إضافةً إلى دراسة العلاقات بين جبر Bو بعض الجبور الأخرى.

1. جبر B وخواصه.

تعريف (1.1). [4]

جبر B (B −algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الآتية:

$(B_1)\ x * x = 0$

$(B_2)\ x * 0 = x$

$(B_3)\ (x * y) * z = x * (z * (0 * y))$

حيث $x, y, z \in X$ ونرمز لهذا الجبر بالرمز $(X, *, 0)$ واختصاراً بالرمز X مالم يكن هناك التباس.

مثال (1.1). [6]

إن $(\mathbb{Z}, -, 0)$ ، مجموعة الأعداد الصحيحة ، هي جبرB.

مبرهنة (1.1). [4,12]

ليكن $(X, *, 0)$ جبرB عندئذ الخواص الآتية محققة:

$(B_4)\quad (x * y) * (0 * y) = x$

$(B_5)\quad if\ x * y = z * y \Rightarrow x = z$

$(B_6)\quad if\ x * y = x * z \Rightarrow y = z$

$(B_7)\ x * (y * z) = (x * (0 * z)) * y$

$(B_8)\ 0 * (0 * x) = x$

$(B_9)\ 0 * (x * y) = y * x$

$(B_{10})\ (x * z) * (y * z) = x * y$

(B_{11}) $if\ x * y = 0 \Rightarrow x = y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة (2.1). [12]

$(X, *,0)$ جبرB إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية:

$(B_1)\ x * x = 0$

$(B_8)\ 0 * (0 * x) = x$

$(B_{10})\ (x * z) * (y * z) = x * y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

تعريف (2.1). [4,11]

ليكن $(X, *,0)$ جبرB عندئذ:

- يقال إن X $0-$ تبديلي (0− commutative) إذا حقق الخاصة الآتية:

$x * (0 * y) = y * (0 * x)$; $\forall x, y \in X$

- يقال إن X تجميعي (associative) إذا حقق الخاصة التجميعية، أي إذا كان:

$x * (y * z) = (x * y) * z$; $\forall x, y, z \in X$

مبرهنة (3.1). [11]

ليكن $(X, *,0)$ جبرB $0-$ تبديلي عندئذ الخواص الآتية محققة:

$(B_{12})\ (x * y) * (z * u) = (u * y) * (z * x)$

$(B_{13})\ (x * y) * (x * z) = z * y$

$(B_{14})\ (0 * x) * (0 * y) = y * x$

$(B_{15})\ (x * y) * z = (0 * y) * (z * x)$

$(B_{16})\ (x * y) * z = (x * z) * y$

$(B_{17})\ \ x * (y * z) = z * (y * x)$

$(B_{18})\ \ x * (x * y) = y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z, u \in X$.

مبرهنة (4.1). [1,4]

ليكن $(X, *,0)$ جبرB. عندئذ $(X, *,0)$ يكون $0-$ تبديلي إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين الآتيين:

$(B_{17})\ \ x * (y * z) = z * (y * x)$

$(B_{18})\ \ x * (x * y) = y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة (5.1). [1]

ليكن X جبرB إذا تحقق الشرط الآتي:

$$0 * x = x \quad ; \forall x \in X$$

عندئذ يكون X $0-$ تبديلي.

ملاحظة (1.1). [1]

إن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح والمثال الآتي يوضح ذلك.

مثال (2.1). [1]

لتكن المجموعة $X = \{0,1,2\}$ مزودة بالعملية $*$ المعرفة وفق جدول كيلي الآتي:

*	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

واضح أن X هو جبر B $0-$ تبديلي لكن $2 * 0 = 1 \neq 2$.

تعريف (3.1).

ليكن $(X, *,0)$ جبرB. يقال عن X إنه تبديلي إذا تحققت الخاصة الآتية:

$$x * y = y * x \qquad ; \forall x, y \in X$$

مثال (3.1).

إن $\mathbb{Z}_2$ مع العملية $*$ المعرفة بالشكل الآتي :

$$x * y = x - y \,(mod\ n) \qquad ; \forall x, y \in X$$

هي جبر B تبديلي حيث إن العنصر الثابت 0.

مبرهنة (6.1).

1. كل جبر B تبديلي هو جبر B 0− تبديلي.

2. كل جبر B 0− تبديلي هو جبر B تبديلي إذا تحقق الشرط الآتي:

$$0 * x = x \qquad ; \forall x \in X$$

البرهان.

1. لنفرض أن X جبر B تبديلي، عندئذ مهما يكن $x, y \in X$ نجد أن:

$$x * (x * y) = x * (y * x)$$

$$= [x * (0 * x)] * y \qquad /B_7/$$

$$= [x * (x * 0)] * y \qquad /X \text{ تبديلي}/$$

$$= (x * x) * y \qquad /B_2/$$

$$= 0 * y \qquad /B_1/$$

$$= y * 0 \qquad /X \text{ تبديلي}/$$

$$= y \qquad /B_2/$$

ومن ثم الخاصة (B_{18}) محققة وحسب المبرهنة (4.1) يتم المطلوب.

2. لنفرض أن X جبر B 0− تبديلي، عندئذ حسب (B_{14}) نجد أن: $(0 * x) * (0 * y) = y * x$

ومن الفرض نجد أن: $x * y = y * x$ وبالتالي X جبر B تبديلي.

مبرهنة (7.1).

ليكن X جبر B تجميعي عندئذ الشرط الآتي محقق:

$$0 * x = x * 0 = x \quad ; \forall x \in X$$

البرهان.

نعوض $x = y = z$ في (B_3) فنجد:

$$(x * x) * x = x * [x * (0 * x)]$$

$$0 * x = x *[(x * 0) * x)] \qquad /B_1 \text{ , تجميعي } X/$$

$$0 * x = x * (x* x) \qquad /B_2/$$

$$0 * x = x * 0 = x \qquad /B_2 , B_1/$$

وهو المطلوب.

مبرهنة (8.1).

إذا كان X جبرB تجميعي، عندئذ يكون X جبرB $0-$ تبديلي.

البرهان.

ينتج مباشرة من المبرهنة (7.1) والمبرهنة (5.1).

مبرهنة (9.1).

إذا كان X جبرB تجميعي، عندئذ يكون X جبر B تبديلي.

البرهان.

لنفرض أن X جبرB تجميعي، عندئذ من المبرهنة (8.1) نجد أن X $0-$ تبديلي ومن (B_{14}) نجد أن:

$$(0 * x) * (0 * y) = y * x$$

$$x * y = y * x \qquad /\text{مبرهنة}(7.1)/$$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y \in X$ وبالتالي X جبر B تبديلي.

نتيجة(1.1).

جبرB الـ 0− تبديلي يكون تبديلاً إذا كان تجميعياً.

البرهان.

ينتج من المبرهنة (7.1) والمبرهنة(6.1) /2/ .

تعريف (4.1). [7]

ليكن $(X, *,0)$ جبرB. يقال عن X إنه وسطي (medial) إذا تحقق الشرط الآتي:

$$(x * n_1) * (y * n_2) = (x * y) * (n_1 * n_2) \quad ; \forall x, y, n_1, n_2 \in X$$

مثال (4.1). [7]

لتكن المجموعة $X = \{0,1,2,3\}$ مزودة بالعملية $*$ المعرفة وفق جدول كيلي الآتي:

*	0	1	2	3
0	0	2	1	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	1	2	0

إن $(X, *,0)$ جبر B وسطي.

مبرهنة (10.1).

إذا كان X جبرB وسطي، عندئذ يكون X جبرB 0− تبديلي.

البرهان.

لنفرض أن X جبر B وسطي، عندئذ نجد أن:

$$(x * 0) * (x * n_2) = (x * x) * (0 * n_2)$$

$$x * (x * n_2) = 0 * (0 * n_2) \qquad /B_2\ , B_1/$$

$$x * (x * n_2) = n_2 \qquad /B_8/$$

وذلك مهما تكن العناصر $x, n_2 \in X$ وحسب المبرهنة (4.1) يتم المطلوب.

مبرهنة (11.1).

ليكن X جبرB 0− تبديلي. إذا تحقق الشرط الآتي:

$$0 * x = x \quad ; \forall x \in X$$

فإن X يكون جبر B وسطي.

البرهان.

لنفرض أن X جبرB 0− تبديلي، عندئذ من الخاصة (B_{12}) نجد أن:

$$(x * n_1) * (y * n_2) = (n_2 * n_1) * (y * x)$$

$$= 0 * [(y * x) * (n_2 * n_1)] \qquad /B_9\ /$$

$$= 0 * [(0 * (x * y)) * (0 * (n_1 * n_2))] \qquad /B_9\ /$$

$$= 0 * [(x * y)) * (n_1 * n_2)] \qquad /\text{من الفرض}/$$

$$= (x * y) * (n_1 * n_2) \qquad /\text{من الفرض}/$$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, n_1, n_2 \in X$ وبالتالي Xجبر B وسطي.

نتيجة(2.1).

جبرB الـ 0− تبديلي يكون وسطياً إذا كان تجميعياً.

البرهان.

ينتج من المبرهنة (7.1) والمبرهنة(11.1) .

مبرهنة(12.1).

إذا كان X جبرB تجميعي، عندئذ يكون X جبر B وسطي.

البرهان.

لنفرض أن X جبرB تجميعي، عندئذ يكون X جبرB 0− تبديلي (المبرهنة8.1) ويحقق الخاصة $0 * x = x$ (المبرهنة7.1) عندئذ حسب المبرهنة (11.1) يكون X جبرB وسطي.

مبرهنة(13.1).

إذا كان X جبرB تبديلي، عندئذ يكون X جبرB وسطي.

البرهان.

لنفرض أن X جبرB تبديلي، عندئذ من المبرهنة(6.1)/1/ نجد أن X 0− تبديلي وبالتالي من (B_{12}) نجد أن:

$$(x * y) * (z * u) = (u * y) * (z * x)$$

$$= (z * x) * (u * y) \qquad /X \text{ تبديلي}/$$

$$= (x * z) * (y * u) \qquad /X \text{ تبديلي}/$$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, u, z \in X$ وهو المطلوب.

نتيجة(3.1).

ليكن X جبرB وسطي. إذا تحقق الشرط الآتي:

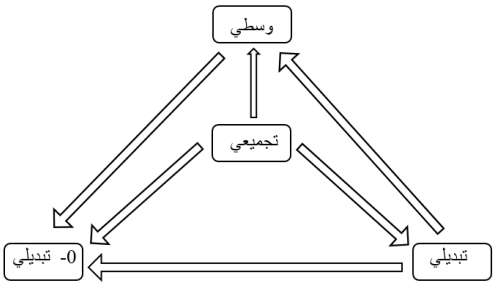
$$0 * x = x \quad ; \forall x \in X$$

فإن X يكون جبر B تبديلي.

البرهان.

ينتج من المبرهنة (10.1) و المبرهنة (6.1) /2/ ./

المخطط الآتي يوضح العلاقة بين جبورB:



2.العلاقة بين جبر B وبعض أنواع الجبور الأخرى.

سندرس في هذه الفقرة العلاقات التي تربط جبرB بأنواع آخرى من الجبور. وسنبدأ أولاً بدراسة العلاقة بين جبرB وجبر Q.

تعريف (1.2). [9]

جبر Q (Q −algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الآتية:

$(Q_1)\ x * x = 0$

$(Q_2)\ x * 0 = x$

$(Q_3)\ (x * y) * z = (x * z) * y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

ملاحظة(1.2). [9]

إذا كان $(X, *,0)$ جبر Q فليس بالضرورة أن يكون جبرB، والمثال الآتي يوضح ذلك:

مثال (1.2). [9]

لتكن المجموعة $X=\{0,1,2,3\}$ مزودة بالعملية $*$ المعرفة وفق جدول كيلي الآتي:

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	0	0	0
3	3	3	3	0

عندئذ نجد أن $(X, *,0)$ جبر Q لكنه ليس جبر B لإن (B_3) غير محققة بالضرورة ، فمثلاً لأجل العناصر 1,2,3 لدينا:

$$(3 * 2) * 1 = 0 \neq 3 * \big(1 * (0 * 2)\big)$$

مبرهنة (1.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبرB تجميعي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبر Q.

البرهان.

لنفرض أن X جبرB تجميعي، عندئذ ينتج أن المبدأين (Q_1) و (Q_2) محققيين، ولنبرهن تحقق (Q_3):

$(x * y) * z = x * (y * z)$ / تجميعي X/

$= (x * (0 * z)) * y$ /B_7/

$= (x * z) * y$ /مبرهنة(7.1)/

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$ وبالتالي (Q_3) محققة و X جبر Q.

تعريف (2.2). [9]

ليكن $(X, *,0)$ جبر Q. يقال عن X إنه تجميعي (associative)، إذاتحققت الخاصة التجميعية بالنسبة للعملية $*$ على عناصر هذا الجبر.

مبرهنة (2.2). [9]

ليكن $(X, *,0)$ جبر Q تجميعي عندئذ كل عنصر $x \in X$ يحقق الشرط: $0 * x = x * 0 = x$

مبرهنة (3.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبر Q تجميعي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبرB 0− تبديلي.

البرهان.

لنفرض أن X جبر Q تجميعي، عندئذ ينتج أن المبدأين (B_1) و (B_2) محققيين، ولنبرهن تحقق(B_3):

$(x * y) * z = (x * z) * y$ / Q_3/

$= x * (z * y)$ /تجميعي X/

$= x * (z * (0 * y))$ / مبرهنة (2.2)/

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$ ومن تحقق المبادئ الثلاثة ينتج أن X هو جبرB، ومن المبرهنة (8.1) نجد أن X 0− تبديلي.

ننتقل فيما يلي لدراسة العلاقة بين جبرB وجبرBG.

تعريف (3.2). [13]

جبرBG (BG −algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الآتية:

$(\mathrm{BG}_1)\ x * x = 0$

$(\mathrm{BG}_2)\ x * 0 = x$

$(\mathrm{BG}_3)\ (x * y) * (0 * y) = x$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة (4.2). [13]

إذا كان $(X, *,0)$ جبرB، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبرBG.

مبرهنة (5.2). [13]

ليكن $(X, *,0)$ جبر BG عندئذ كل عنصر $x \in X$ يحقق الشرط $0 * (0 * x) = x$.

مبرهنة (6.2).

ليكن $(X, *,0)$ جبر BG.إذا تحقق الشرط الآتي:

$$(x * z) * (y * z) = x * y$$

لأجل كل $x, y, z \in X$ فإن $(X, *,0)$ يكون جبرB.

البرهان.

لنفرض أن X جبرBG، عندئذ (B_1) محققة، ومن المبرهنة (5.2) ينتج تحقق (B_8)، ومن الفرض ينتج تحقق (B_{10}) وبالتالي من المبرهنة (2.1) ينتج المطلوب.

ننتقل فيما يلي لدراسة العلاقة بين جبرB وجبرRG.

تعريف (4.2). [10]

جبرRG (RG −algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الآتية :

$(\mathrm{RG}_1)\ \ x * 0 = x$

$(\mathrm{RG}_2)\ (x * z) * (y * z) = x * y$

$(\mathrm{RG}_3)\ x * y = y * x = 0 \Rightarrow x = y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة(7.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبرB، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبرRG.

البرهان.

ينتج مباشرة بالاعتماد على (B_2) و(B_{10}) و(B_{11}).

مبرهنة(8.2). [10]

ليكن $(X, *,0)$ جبر RG عندئذ الخواص الآتية محققة:

$(\mathrm{RG}_4)\ 0 * (0 * x) = x$

$(\mathrm{RG}_5)\ 0 * (x * y) = y * x$

$(\mathrm{RG}_6)\ (x * y) * z = (x * z) * y$

$(\mathrm{RG}_7)\ x * (x * y) = y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة (9.2).

ليكن $(X, *,0)$ جبر RG. إذا تحقق الشرط الآتي:

$$x * x = 0 \quad ; \forall x \in \mathrm{X}$$

فإن $(X, *,0)$ يكون جبرB 0− تبديلي.

البرهان.

من الفرض ينتج تحقق (B_1)، ومن (RG_4) ينتج تحقق (B_8) ومن (RG_2) ينتج تحقق (B_{10}) ومن تحقق (B_1) و(B_8) و(B_{10}) عندئذ حسب المبرهنة (2.1) نجد أن X هو جبرB.

ومن(RG_7) ينتج تحقق (B_{18}) وحسب المبرهنة (4.1) ينتج أن X هو جبرB 0−تبديلي.

ننتقل فيما يلي لدراسة العلاقة بين جبرB وجبرTM.

تعريف (5.2). [8]

جبر TM (TM −algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الآتية:

$(\mathrm{TM}_1)\ \ x * 0 = x$

$(\mathrm{TM}_2)\ \ (x * y) * (x * z) = z * y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة(10.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبر B $0-$ تبديلي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبرTM.

البرهان.

لنفرض أن X جبرB، عندئذ من (B_2) ينتج تحقق(TM_1) وبما أن X $0-$ تبديلي ومن (B_{13}) ينتج تحقق (TM_2).

نتيجة(1.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبرB تجميعي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبرTM.

البرهان.

ينتج من المبرهنة (8.1) والمبرهنة(10.2).

مبرهنة (11.2). [8]

ليكن $(X, *,0)$ جبرTM عندئذ الخواص الآتية محققة:

$(\mathrm{TM}_3)\ x * x = 0$

$(\mathrm{TM}_4)\ (x * y) * z = (x * z) * y$

$(\mathrm{TM}_5)\ x * (x * y) = y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

تعريف (6.2). [8]

ليكن ($X, *,0$) جبرTM.يقال عن X إنه تجميعي(associative)، إذا تحققت الخاصة التجميعية بالنسبة للعملية $*$ على عناصرهذا الجبر.

مبرهنة(12.2).

ليكن($X, *,0$) جبر TM تجميعي عندئذ:

$$0 * x = x * 0 = x \quad ; \ \forall x \in \mathrm{X}$$

البرهان.

لنفرض أن X جبرTM تجميعي، عندئذ من (TM_4) و بأخذ $x = y = z$ نجد:

$(x * x) * x = (x * x) * x$

$0 * x = x * (x* x)$ / X تجميعي , TM_3 /

$0 * x = x * 0$ / TM_3 /

$0 * x = x * 0 = x$ / TM_1 /

وهو المطلوب.

مبرهنة (13.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبر TM تجميعي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبر B $0-$ تبديلي.

البرهان.

لنفرض أن X جبر TM تجميعي، عندئذ من (TM_3) ينتج تحقق (B_1)

ومن (TM_1) ينتج تحقق (B_2) ولنبرهن تحقق (B_3):

$(x * y) * z = (x * z) * y$ / TM_4 /

$= x * (z* y)$ / X تجميعي /

$= x * (z * (0 * y))$ / مبرهنة (12.2) /

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$ وبالتالي X هو جبر B، ومن (TM_5) واستناداً إلى المبرهنة (4.1) نجد أن X $0-$ تبديلي.

ننتقل فيما يلي لدراسة العلاقة بين جبر B وجبر BRK.

تعريف (7.2). [3]

جبر BRK (BRK $-$ algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الآتية:

$(\mathrm{BRK}_1)\ x * 0 = x$

$(\mathrm{BRK}_2)\ (x * y) * x = 0 * y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y \in X$.

ملاحظة(2.2). [3]

إن مفهومي جبرB وجبرBRK غير متكافئين، حيث أنه ليس من الضروري أن يكون كل جبرB هو جبرBRK وكذلك العكس، وسنوضح ذلك من خلال المثاليين الآتيين:

مثال(2.2). [3]

لتكن المجموعة $X=\{0,1,2,3\}$ مزودة بالعملية $*$ المعرفة وفق جدول كيلي الآتي:

*	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0
2	2	1	0	1
3	3	2	3	0

عندئذ نجد أن $(X, *,0)$ جبرBRK لكنه ليس جبرB لأن (B_3) غير محققة بالضرورة، فمثلاً لأجل العنصر 3 لدينا: $(3*3)*3=1\neq 3=3*(3*(0*3))$

مثال(3.2). [3]

لتكن المجموعة $X=\{0,1,2,3,4,5\}$ مزودة بالعملية $*$ المعرفة وفق جدول كيلي الآتي :

*	0	1	2	3	4	5
0	0	2	1	3	4	5
1	1	0	2	4	5	3
2	2	1	0	5	3	4
3	3	4	5	0	2	1
4	4	5	3	1	0	2

5	5	3	4	2	1	0

عندئذ نجد أن $(X, *,0)$ جبر B لكنه ليس جبر BRK لأن الخاصة (BRK_2) غير محققة بالضرورة، فمثلاً لأجل العنصرين 1,3 لدينا:

$$(1*3)*1=5\neq 3 =0*3$$

سنقوم فيما يلي بدراسة العلاقة بين هذين الجبرين.

مبرهنة (14.2). [3]

إذا كان $(X, *,0)$ جبر B $0-$ تبديلي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبر BRK.

تعريف (8.2). [3]

ليكن $(X,*,0)$ جبر BRK عندئذ يقال عن X إنه وسطي (medial) إذا تحقق الشرط الآتي:

$$(\square) \quad (x * y) * (z * u) = (x * z) * (y * u) \qquad ; \forall x, y, z, u \in X$$

مبرهنة (15.2). [3]

ليكن $(X, *,0)$ جبر BRK. عندئذ يكون $(X,*,0)$ وسطياً إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية:

$(\mathrm{BRK}_3)\ x * (y * z) = z * (y* x)$

$(\mathrm{BRK}_4)\ x * 0 = x$

$(\mathrm{BRK}_5)\ x * x = 0$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة (16.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبر BRK وسطي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبر B $0-$ تبديلي.

البرهان.

لنفرض أن X جبر BRK وسطي، عندئذ من الخاصة (BRK_5) ينتج تحقق (B_1)، ومن (BRK_3) وبوضع $x = y = 0$ نجد أن:

$$0 * (0 * z) = z *(0* 0) = z \qquad /(\mathrm{BRK}_5) \text{ و } (\mathrm{BRK}_4) /$$

أي أن الخاصة (B_8) محققة . ومن تعريف جبر BRK الوسطي وبوضع $u = y$ في العلاقة $(\square)$ نجد:

$$(x * y) * (z * y) = (x * z) * (y * y)$$

$$= (x * z) * 0 \qquad /\mathrm{BRK}_5\ /$$
$$= x * z \qquad /\mathrm{BRK}_4\ /$$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$ وبالتالي الخاصة (B_{10}) محققة، ومن تحقق (B_1) و(B_8) و(B_{10}) عندئذ حسب المبرهنة (2.1) نجد أن X هو جبرB.

ومن(BRK_3) ينتج تحقق (B_{17}) وحسب المبرهنة (4.1) ينتج أن X هو جبرB 0− تبديلي.

ننتقل فيما يلي لدراسة العلاقة بين جبرB وجبرBZ.

تعريف (9.2). [2]

جبرBZ (BZ −algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الآتية:

$(\mathrm{BZ}_1)\ (\ (x * z) * (y * z)\ ) *\ (x * y) = 0$

$(\mathrm{BZ}_2)\ x * 0 = x$

$(\mathrm{BZ}_3)\ x * y = y * x = 0 \Rightarrow x = y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة (17.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبرB، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبر BZ.

البرهان.

لنفرض أن X جبرB، عندئذ من الخاصة (B_{10}) نجد أن:

$$(\ (x * z) * (y * z)\ ) * (x * y) = (x * y) * (x * y) = 0$$

وذلك مهما تكن $x, y, z \in X$ وبالتالي (BZ_1) محققة، ومن (B_2) و(B_{11}) ينتج تحقق (BZ_2) و (BZ_3) على الترتيب، وبالتالي X جبرBZ.

مبرهنة(18.2). [2]

ليكن $(X, *,0)$ جبر BZ عندئذ الخاصة الآتية محققة:

$(\mathrm{BZ}_4)\ x * x = 0$

وذلك مهما يكن $x \in$ X.

مبرهنة (19.2). [5]

ليكن $(X, *,0)$ جبر BZ .عندئذ الشرطين الآتيين متكافئين:

$(\mathrm{BZ}_5) \quad 0 * (0 * x) = x$

$(\mathrm{BZ}_6) \ (x * y) * (z * y) = x * z$

وذلك مهما يكن $x, y, z \in X$.

مبرهنة(20.2).

ليكن $(X, *,0)$ جبر BZ ويحقق الشرط (BZ_5) . عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبر B.

البرهان.

من كون X جبر BZ عندئذ من المبرهنة(18.2) ينتج تحقق (B_1).

ومن المبرهنة (19.2) ينتج تحقق (B_8) و (B_{10}).

ومن تحقق الخواص (B_1) و (B_8) و(B_{10}) ينتج أن X هو جبر B.

ننتقل فيما يلي لدراسة العلاقة بين جبر B وجبر BCH.

تعريف (10.2). [13]

جبر BCH (BCH −algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الاتية:

$(\mathrm{BCH}_1) \ x * 0 = x$

$(\mathrm{BCH}_2) \ x * x = 0$

$(\mathrm{BCH}_3) \ x * y = y * x = 0 \Rightarrow x = y$

$(\mathrm{BCH}_4) \ (x * y) * z = (x * z) * y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة (21.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبر B 0− تبديلي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبر BCH.

البرهان.

ينتج من (B_1) و (B_2) و (B_{11}) و (B_{16}).

المراجع:

[1] Abdullah, H. K., & Atshan, A. A. "**Complete ideal and n−ideal of B−algebra**".Applied Mathematical Sciences, 11(35), 1705−1713. HIKARI Ltd. https://doi.org/10.12988/ams.2017.75159. (2017)

[2] Abed, A. H. "**A structure of BZ−algebras and its properties**". International Journal of Engineering and Information Systems (IJEAIS), 4(8), 110−115 . www.ijeais.org. (2020)

[3] Bandaru, R. K. "**On BRK-algebras**". International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2012, Article ID 952654, 12 pages. https://doi.org/10.1155/2012/952654. (2012)

[4] Cho, J. R., & Kim, H. S. "**On B-algebras and quasigroups**". Quasigroups and Related Systems, 8, 1–6. (2001)

[5] Du, Y. D., & Zhang, X. H. " **Hyper BZ-algebras and semihypergroups**". Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras, 2(3), 13–28. https://doi.org/10.52547/HATEF.JAHLA.2.3.2. (2021)

[6] Fitria, E., Gemawati, S., & Kartini. " **Prime ideals in B- algebras**". International Journal of Algebra, 11(7), 301-309. https://doi.org/10.12988/ija.2017.7838. (2017)

[7] Kim, Y. H. "**On medial B-algebras**". J. Appl. Math. & Informatics, 32(5-6), 849–856. https://doi.org/10.14317/jami.2014.849. (2014)

[8] Monisha, B. "**On TM-algebras**" [Master's thesis, Avinashilingam Institute for Home Science and Higher Education for Women] . (2014, March)

[9] Neggers, J., Ahn, S. S., & Kim, H. S. " **On Q- algebras**". International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 27(12), 749–757. https://doi.org/10.1155/S0161171201006627. (2001)

[10] Omar, R. A. K. "**On RG – Algebra**". Pure Mathematical Sciences, 3(2), 59–70. HIKARI Ltd. https://doi.org/10.12988/pms.2014.31119. (2014)

[11] Soleimani, R., & Jahangiri, S. "**A note on t–derivations of B– algebras**". Journal of Mathematics and Computer Science, 10, 138–143. (2014)

[12] Walendziak, A. "**Some axiomatizations of B– algebras**". Mathematica Slovaca, 56(3), 301–306. http://dml.cz/dmlcz/131319. (2006)

[13] Walendziak, A. "**BG/BF1/B/BM–algebras are congruence permutable**". Mathematica Aeterna, 5(2), 351–356. (2015)