دراسة تفصيلية لمتراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم العامة مع معادلات ماكسويل وقوانين الانحفاظ الميكانيكية في الإحداثيات المنحنية ضمن الفضاء ^{3} ،

[+] ط. ولاء عادل العلي [++]أ.د. منتجب الحسن [+++] د. رقية رضوان

ملخص البحث :

يركز هذا البحث على وسط مادي مستمر مرن تقليدي (مهمل البنية الجزيئية) .

في هذا الوسط نقوم بكتابة معادلات ماكسويل الكهرومغناطيسية وقوانين الانحفاظ الميكانيكية المعتمدة من مرجع (Eringen) وتحويلها إلى الإحداثيات المنحنية العامة.

بالإضافة إلى ذلك، نقدم مناقشة تفصيلية لمتراجحة كلاوزيوس ـــــــ دوهيم بشكلين وهما الشكل اللامتغير (invariance) والشكل المركباتي في نظام إحداثي منحني كيفي.

الكلمات المفتاحية : متراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم ، الإحداثيات المنحنية العامة ، معادلات مكسويل ، قوانين الانحفاظ .

[+] طالبة ماجستير في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة حمص.

[++] أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة حمص .

+++ أستاذة في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة حمص ..

دراسة تفصيلية لمتراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم العامة
مع معادلات ماكسويل وقوانين الانحفاظ الميكانيكية
في الإحداثيات المنحنية ضمن الفضاء ^{3} ،

A Detailed Study of the General Clausius-Duhem Inequality with Maxwell's Equations and Mechanical Conservation Laws in Curvilinear Coordinates

Walaa Adel Alali [1] & Dr.Mountajab Al-Hasan [2]

& Dr.Roqia Rdwan [3]

Abstract

This research focuses on a classical elastic continuous material medium (neglecting the molecular structure).
For this medium we write Maxwell's electromagnetic equations and mechanical conservation lows based on Eringen's formulation , and transform them into a general curvilinear coordinate system
In addition , we present a detailed discussion of the Clausius-Duhem inequality in two forms : the invariance form and the composite form in an arbitrary curvilinear coordinate system.

Keywords : Clausius-Duhem Inequality , General curvilinear coordinates , Maxwell's equations , conservation lows.

[1] Master Student At Department of Mathematics–Faculty of Science– Homs University
[2] Professor At Department of Mathematics – Faculty of Science – Homs University.
[3] Professor At Department of Mathematics – Faculty of Science – Homs University.

1 – مقدمة

يعود تاريخ الأوساط المستمرة إلى الباحث هوك(Hooke) وكان ذلك في نهاية القرن السابع عشر وهو الباحث الذي وضع الأسس الرياضية لأبسط الأجسام المرنة المهملة البنية الجزيئية والمعينية بمعاملين مادين. بعدها اتى الباحث فويت(Voight) الذي طور الدراسة إلى جسم صلب مرن معتبراً البنية الجزيئية؛ وهو الباحث الذي أشار إلى الملاحظة التالية : إن القوى الداخلية التي تُؤثر على جزء معزول من الجسم لا تتم فقط من خلال الإجهادات المتعارف عليها بل تتم أيضاً من خلال إجهادات إضافية ناتجة عن البنية الجزئية وتدعى إجهادات العزم . بعدها أتى الأخوان الفرنسيان كوسيرات (Cosserat) ليضعوا النظرية الأساسية في الأوساط المستمرة الدقيقة آخذين بعين الاعتبار البنية الجزيئية لهذه الأوساط ودعيت هذه النظرية فيما بعد بنظرية كوسيرات ولكن لم يدرك الوسط العلمي أهمية هذه النظرية لعقود طويلة . بعدها في بداية خمسينات القرن الماضي استفاق الباحثون والعلماء على أهمية هذه النظرية وتشكلت عدة مدارس علمية تبنت هذه النظرية وعملت على تطويرها ; منها مدرسة الباحث التركي إيرنغن (Eringen) ومدرسة الباحث البولندي نوفاسكي (Nowacki) ومدرسة الباحث الألماني غورتين(Gurtin) ومدرسة الباحث الجورجي كوبرازي(kupradse) ومدرسة الباحث الروماني ياشن(yashan) إلى أخره ...

فعلى سبيل المثال قام الباحث إيرنغن بمناقشة الأسس الرياضية (المعادلات المحلية و اللامحلية) التي تحكم هذه الأوساط ولم يكتفي إيرنغن بذلك بل قام بتعميم النظرية إلى نظرية الوسط المستمر الدقيق ذي الامتطاط المجهري(Microstretch Continuum) ونظرية الوسط المادي المستمر الدقيق التحول(Micromorphic). إلا أنَّ الصعوبة الرياضية تكمن في أنَّ المعادلات التفاضلية الحاكمة لهذه الأوساط المستمرة معقّدة نسبياً من حيث البنية التفاضلية والشروط الحدّية الإبتدائية; وهذا الأمر يقودنا أحياناً إلى الإستعانة بطرائق تحليلية تُسهل حل هذه المعادلات.

إلى ما تقدم ذكره ننوه إلى أن في المرجع [11] تمت مناقشة معادلات وسط مادي مستمر تقليدي في نظام إحداثي كيفي.

وفي المرجع [15] تمت مناقشة المعادلات التفاضلية التي تصف وسط مادي مستمر غير إقليدي أيضاً في نظام إحداثي كيفي.

أما بالنسبة لمناقشة معادلات ماكسويل في نظام إحداثي منحني كيفي فقد تمت في المرجعي[12,13] .

2- هدف البحث

يهدف البحث إلى تحويل وإعادة صياغة معادلات ماكسويل الكهرومغناطيسية وقوانين الانحفاظ الميكانيكية في نظام الإحداثيات المنحنية العامة ، التي صِيغَ جزءٌ منها بالشكل اللامتغير وجزءٌ آخر في نظام الإحداثيات الديكارتية ، وإجراء دراسة تفصيلية لمتراجحة كلاوزيوس – دوهيم العامة (C-D) الترموديناميكية بشكلها المتغير وشكلها المركباتي في نظام إحداثي منحني كيفي، حيث تكمن أهمية البحث بالآتي :

إمكانية دمج معادلات ماكسويل الكهرومغناطيسية وقوانين الانحفاظ الميكانيكية ، مما يسهل دراسة الأوساط المستمرة المرنة عند خضوعها لحقول فيزيائية مشتركة .

بالإضافة إلى ذلك ، مناقشة متراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم (C-D) في نظام إحداثيات منحنٍ كيفي (إذا كان الجسم مكعباً يُفضّل استخدام الإحداثيات الديكارتية ، وإذا إذا كان الجسم كرة يُفضّل استخدام الإحداثيات الكروية، وإذا كان الجسم أسطوانة يُفضّل استخدام الإحداثيات الأسطوانية).

3- مواد وطرائق البحث

في هذا البحث سنستخدم الهندسة التفاضلية (التحليل التنسوري) في كتابة الكميات التنسورية ومن ثم تمثيلها في نظام إحداثي منحنٍ كيفي لنحصل على المطلوب.

4- النتائج ومناقشتها

أولاً : تحويل معادلات ماكسويل الكهرومغناطيسية وقوانين الانحفاظ الميكانيكية إلى نظام الإحداثيات المنحنية العامة :

اعتماداً على مرجعي إرينغن[6] و[3] للأوساط المستمرة المرنة التقليدية سنقوم بعرض المعادلات الأساسية ; التي صِيغَ جزءٌ منها بالشكل اللامتغير وجزءٌ آخر في نظام الإحداثيات الديكارتية ليتم بعد ذلك تحويلها إلى نظام الإحداثيات المنحنية العامة في الفضاء ثلاثي الأبعاد ^{3} ، .

أ- معادلات ماكسويل الكهرومغناطيسية ، مرفقة بمعادلة استمرارية الشحنة (في شكلها اللامتغير):

$$\begin{aligned}
&\nabla . \mathbf{D} = q_e \\
&\nabla . \mathbf{B} = 0 \\
&\frac{\partial q_e}{\partial t} + \nabla . \mathbf{J} = 0 \qquad (4.1)\\
&\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \\
&\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{1}{c}\mathbf{J}
\end{aligned}$$

حيث يُمثّل $\mathbf{D}$ متجه الإزاحة الكهربائية ، q_e كثافة الشحنة الكهربائية ، $\mathbf{J}$ متجه التيار.

$\mathbf{E}$ المتجه الكهربائي ، $\mathbf{H}$ المتجه المغناطيسي ، $\mathbf{B}$ متجه التحريض المغناطيسي.

بينما يشير c إلى سرعة الضوء في الخلاء .

ب- قوانين الانحفاظ الميكانيكية ومتراجحة إنتروبيا(في شكلها اللامتغير و أخرى بدلالة المركبات الديكارتية)

$$\begin{aligned}
&r_0 = rJ \qquad or \qquad r^g + r\nabla \times \mathbf{v} = 0 \\
&t_{kl,k} + r(f_l - \ddot{x}_l) + {}_M f_l = 0 \\
&t_{[kl]} = E_{klm} P_{[lm]} + B_{klm} M_{[lm]} \qquad (4.2)\\
&r\dot{E} - t_{kl} v_{l,k} - \nabla \times q - rh - rE \times \left(\frac{\mathbf{P}}{r}\right)^{\cdot} + {}_M M \times \dot{B} - J \times E = 0 \\
&rh^g - \nabla \times \left(\frac{\mathbf{q}}{q}\right) - \frac{\partial h}{q} \; 0
\end{aligned}$$

معادلة الطاقة موجودة في المرجع[3].

حيثُ إنَّ :

- السطر الأول من (4.2) : يمثل قانون انحفاظ الكتلة.
- السطر الثاني : يمثل قانون انحفاظ كمية الحركة الخطية.
- السطر الثالث : يمثل قانون انحفاظ العزم الحركي.
- السطر الرابع : يمثل قانون انحفاظ الطاقة .
- السطر الأخير: يمثل المبدأ الثاني للديناميكا الحرارية.

كما تشير الأقواس المربعة المحيطة بالأدلة إلى التناظر العكسي ،على سبيل المثال:

$$t_{[kl]} = \frac{1}{2}(t_{kl} - t_{lk})$$

أما الرموز السابقة تُمثل ما يلي:

rكثافة الكتلة الحالية ، r_0 كثافة الكتلة الابتدائية ، $\dot{r}$ المشتق المادي للكثافة ، $\mathbf{v}$متجه السرعة المادية ، t_{kl} تنسور إجهاد كوشي ، h كثافة المصدر الحرارية ، $t_{kl,k}$ تباعد مؤثر الإجهاد ، f_l القوة الميكانيكية الحجمية ، $\boldsymbol{P}$ متجه الاستقطاب ، $\dot{P}_l$ مركبات متجه التسارع المادي ، f_{Ml} القوة الكهرومغناطيسية الحجمية ، q درجة الحرارة المطلقة للوسط (بحيث يتحقق $q > 0 \ , \inf \ q = 0$).

$\mathbf{q}$متجه التدفق الحراري ، h كثافة الإنتروبيا ، $\dot{h}$ تمثل المشتق الجزئي الزمني لكثافة الإنتروبيا، $\mathbf{M}$ متجه المغنطة ، $V_{l,k}$ المركبات الديكارتية لمتجه سرعة نقطة من الوسط والفاصلة الدليلية تعني الاشتقاق الجزئي لـ x_k ، $\dot{\mathbf{B}}$ المشتق الجزئي الزمني لمتجه التحريض المغناطيسي.

و J ، E ، M دوال متجهية كهرومغناطيسية معينة بالعلاقات التالية :

$$J = \mathbf{J} - q_e\mathbf{v}$$

$$E = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$M = \mathbf{M} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \boldsymbol{P}$$

صياغة معادلات ماكسويل الكهرومغناطيسية وقوانين الانحفاظ الميكانيكية في نظام الإحداثيات المنحنية [5] و [2] و[4] :

نعتبر النظام الإحداثي الديكارتي العطالي الأولري (ox_1, x_2, x_3) ذي القاعدة$(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ والقاعدتان الأولريتان التاليتان : موافقة التغير $\mathbf{g}_i$ ومخالفة التغير $\mathbf{g}^i$.

والمصفوفة المترية موافقة التغير $\{g_{ij}\}_{3\times3}$ التي تعطى عناصرها بالعلاقة:

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$$

والمصفوفة المترية مخالفة التغير $\{g^{ij}\}_{3\times3}$ التي تعطى عناصرها بالعلاقة:

$$g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$$

ولنحاول الآن استنتاج معادلات ماكسويل الكهرومغناطيسية الترموديناميكية بشكلها المركباتي في النظام الإحداثي المنحني (h_1, h_2, h_3) الذي مبدأه O وقاعدته موافقة التغير هي $g_i(h_1, h_2, h_3, t)$ وقاعدته مخالفة التغير هي $g^i(h_1, h_2, h_3, t)$.

حيث إنَّ : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(h_1, h_2, h_3, t) = x_i(h_1, h_2, h_3, t)\mathbf{e}_i$.

استناداً إلى ما سبق يمكننا كتابة متجه الإزاحة الكهربائية بدلالة مركباته بالشكل التالي:

$$\mathbf{D} = D^j \mathbf{g}_j = D_j \mathbf{g}^j$$

وبتطبيق مؤثر التباعد في النظام الإحداثي المنحني نحصل على المعادلة التالية:

$$\nabla . \mathbf{D} = \nabla_j D^j = \frac{\partial D^i}{\partial h^i} + \Gamma^i_{ij} D^j = q_e$$

وعلى النحو ذاته، يكتب متجه التحريض المغناطيسي بدلالة مركباته بالشكل التالي:

$$\mathbf{B} = B^j \mathbf{g}_j = B_j \mathbf{g}^j$$

بتطبيق مؤثر التباعد في النظام الإحداثي المنحني نحصل على المعادلة التالية:

$$\nabla . \mathbf{B} = \nabla_j B^j = \nabla^j B_j = 0$$

وبالمثل، يمكننا كتابة متجه التيار بدلالة مركباته بالشكل التالي:

$$\mathbf{J} = J^j \mathbf{g}_j = J_j \mathbf{g}^j$$

ومنه تصبح معادلة استمرار الشحنة بالشكل التالي :

$$\frac{\partial q_e}{\partial t} + \nabla^j J_j = 0$$

كما يُعبر عن متجه التحريض المغناطيسي بدلالة مركباته بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{B} = B^k \mathbf{g}_k \quad \text{ق} \quad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{B}^k}{\partial t} \mathbf{g}_k + \dot{\mathbf{g}}_k B^k$$

لكن $\dot{\mathbf{g}}_k = A^l_k \mathbf{g}_l$ ، وبالتالي :

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{B}^k}{\partial t} \mathbf{g}_k + A^l_k \mathbf{g}_l B^k = \frac{\partial \boldsymbol{B}^l}{\partial t} \mathbf{g}_l + A^l_k \mathbf{g}_l B^k = \frac{\partial \boldsymbol{B}^l}{\partial t} + A^l_k B^k \mathbf{g}_l$$

وعليه فإن :

$$= \boldsymbol{E} \quad \frac{1}{c}\frac{\P \boldsymbol{B}}{\P t} \quad \mathbf{0} \quad +e^{lij} \, {}_i E_j \, \mathbf{g}_l \quad \frac{1}{c}\frac{\P \boldsymbol{B}^l}{\P t} \quad A_k^l B^k \mathbf{g}_l = \mathbf{0}$$

وبتطبيق الخطوات ذاتها على متجه الإزاحة الكهربائية نصل إلى المعادلة التالية مباشرة:

$$= \boldsymbol{H} \quad \frac{1}{c}\frac{\P \boldsymbol{D}}{\P t} \quad \frac{1}{c}\boldsymbol{J} \quad +e^{lij} \quad {}_i H_j \, \mathbf{g}_l \quad \frac{1}{c}\frac{\P \boldsymbol{D}^l}{\P t} \quad A_k^l D^k \mathbf{g}_l = \frac{1}{c} J^l \mathbf{g}_l$$

وبالتالي ، يمكننا كتابة معادلات مكسويل الكهرومغناطيسية بدلالة المركبات في نظام الإحداثيات المنحنية العامة في الفضاء الثلاثي الأبعاد على النحو التالي:

$$\nabla^j D_j = q_e$$

$$\nabla^j B_j = 0$$

$$\frac{\P q_e}{\P t} + \nabla^j J_j = 0$$

$$e^{lij} = {}_i E_j \quad \frac{1}{c}\left(B^{\&t} \quad A_k^l B^k\right) + \theta$$

$$e^{lij} = {}_i H_j \quad \frac{1}{c}\left(D^{\&t} \quad A_k^l D^k\right) + \frac{1}{c} J^l$$

لننتقل الآن إلى تحويل قوانين الانحفاظ الميكانيكية الواردة في (4.2) إلى نظام الإحداثيات المنحنية العامة .

حيث إن هذه القوانين صِيغَ جزءٌ منها بالشكل اللامتغير وجزءٌ آخر في نظام الإحداثيات الديكارتية فإنه لا يمكننا تحويلها مباشرة كما فعلنا في معادلات مكسويل.

بناءً على ذلك ، سنقوم بإعادة كتابة قوانين الانحفاظ الميكانيكية في شكلها اللامتغير ومن ثم تحويلها إلى نظام الإحداثيات المنحنية وذلك باتباع ما يلي:

لدينا بحسب الهندسة التفاضلية [7] و[8] و[14] :

$$= \boldsymbol{t} \quad \text{div} \, \mathbf{t} = t_{kd,k} \boldsymbol{e}_l$$

في هذه العلاقة نشير إلى أنّ تفرق الحقل التنسوري $\boldsymbol{t}$ هو حقل متجهي كون أنّ مؤثر التفرق يخفض من مرتبة التنسور بمقدار واحد.

$$\boldsymbol{f} = f_l \boldsymbol{e}_l$$

$$\boldsymbol{v} = v_l \boldsymbol{e}_l$$

$$_{\mathbf{M}}\boldsymbol{f} = f_l \boldsymbol{e}_l$$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{E} \text{ ؤ } \boldsymbol{P} + \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{M} \quad \text{ ق } \operatorname{skw} \mathbf{t} = \operatorname{skw}\left(\boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{P}\right) + \operatorname{skw}\left(\boldsymbol{B} \quad \text{ؤ} \boldsymbol{M}\right)$$

استناداً إلى ما سبق ، نحصل على القوانين الثلاثة الأولى في شكلها اللامتغير التالي:

$$r_0 = rJ \qquad or \qquad r^{\mathrm{g}} + r\nabla \times \mathbf{v} = 0$$

$$= \boldsymbol{t} \quad r(\boldsymbol{f} \quad \text{&}) \quad _{\mathbf{M}}\boldsymbol{f} + - + 0 \text{ر}$$

$$\operatorname{skw} \mathbf{t} = \operatorname{skw}\left(\boldsymbol{E} \text{ ؤ } \boldsymbol{P}\right) + \operatorname{skw}\left(\boldsymbol{B} \quad \text{M}\right)$$

وتكتب هذه القوانين بدلالة المركبات في نظام الإحداثيات المنحنية العامة في الفضاء الثلاثي الأبعاد [3] ، على النحو التالي:

$$r_0 = rJ \qquad or \qquad r^{\mathrm{g}} + r \text{ر}^{\,j} v_j = 0$$

$$\nabla_k t^{kj} + r\left(f^j - \text{&} - v^l K_l^j\right) + {}_M f^j = 0$$

$$t^{\text{&}\text{ü}} = E^{\text{&}} P^{\text{ü}} + B^{\text{&}} M^{\text{ü}}$$

حيث إنَّ :

$$\nabla \mathrm{t} = \nabla_k \mathrm{t}^{kj} \; g_j \quad , \quad \boldsymbol{f} = f^j \; g_j \quad , \quad _{\mathbf{M}}\boldsymbol{f} = {}_M f^j \; g_j$$

$$v = v^l g_l \text{ ق } \text{&} = \text{&} g_l + v^l \text{&}_l$$

لكن $\text{&}_l = K_l^j g_j$ ، ومنه:

$$\text{&} = \text{&} g_l + v^l K_l^j g_j = \text{&} g_j + v^l K_l^j g_j = \left(\text{&} + v^l K_l^j\right) g_j$$

علماً أن:

$$E^{\text{&}} P^{\text{ü}} = \frac{1}{2}\left(E^k P^l - E^l P^k\right)$$

أما قانون انحفاظ الطاقة (السطر الرابع) والمبدأ الثاني للديناميكا الحرارية (السطر الخامس) فسيتم دمجهما معاً بالشكل اللامتغير، وذلك من أجل التمهيد لإيجاد متراجحة كلاوزيوس – دوهيم العامة في نظام الإحداثيات المنحنية .

ثانياً : دراسة تفصيلية للصيغة العامة لمتراجحة كلاوزيوس–دوهيم

اعتماداً على مبادئ الديناميك الحراري للأوساط المستمرة يتم استنتاج متراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم الترموديناميكية العامة من خلال الدمج الرياضي المباشر بين المبدأ الثاني للديناميك الحراري و قانون انحفاظ الطاقة وفق التالي :

انطلاقاً من المبدأ الثاني للديناميك الحراري

$$\dot{r}h - \rho\left(\frac{\mathbf{q}}{q}\right).\nabla\left(\frac{h}{q}\right) \geq 0 \qquad (4.3)$$

بضرب طرفي العلاقة (4.3) بـ q حيث $(q > 0)$ نجد :

$$q\dot{r}h - q\left[\rho\left(\frac{\mathbf{q}}{q}\right).\nabla h\right] \geq 0 \qquad (4.4)$$

ويُعطى قانون انحفاظ الطاقة بالشكل التالي :

$$\rho\dot{E} - t_{kl}V_{l,k} - \rho\mathbf{q}\times - rh - \rho E\times\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right) + M\times\dot{B} - J\times E = 0 \qquad (4.5)$$

بعزل rh من (4.5) نجد :

$$rh = \rho\dot{E} - t_{kl}V_{l,k} - \rho\mathbf{q}\times - \rho E\times\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right) + M\times\dot{B} - J\times E \qquad (4.6)$$

نعوض في (4.4) نحصل على :

$$q\dot{r}h - q\left[\rho\left(\frac{\mathbf{q}}{q}\right).\nabla\right]\rho E\dot{} + t_{kl}V_{l,k} + \rho\mathbf{q}\times + \rho E\times\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right) - M\times\dot{B} + J\times E \geq 0 \qquad (4.7)$$

نعلم أن :

$$\rho\left(\frac{\mathbf{q}}{q}\right).\nabla\left(\frac{1}{q}\right)\mathbf{q} = \rho\left(\frac{1}{q}\right)\nabla\mathbf{q}\times\rho\mathbf{q} - \rho\left(\frac{1}{q^2}\right)\nabla q\times\rho\mathbf{q} \qquad (4.8)$$

بالتعويض في (4.7) نجد :

$$qr\dot{A} + \left(\frac{1}{q}\mathbf{q}.\nabla q - \nabla^2\mathbf{q}\right)r\dot{E} - t_{kl}V_{l,k} - \nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right)^{g} + \mu_0 M\times\dot{\mathbf{B}} - J = 0$$

$$qrh^{g} + \left(\frac{1}{q}\mathbf{q}.\nabla q - \nabla^2\mathbf{q}\right)re^{g} + t_{kl}V_{l,k} + re\times\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right)^{g} - \mu_0 M\times\mathbf{B}^{g} + J = 0$$

$$r\left(q\dot{A} + \dot{E}\right) + t_{kl}V_{l,k} + re\times\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right)^{g} - \mu_0 M\times\dot{\mathbf{B}} + J = \left(\frac{1}{q}\mathbf{q}.\nabla q - \nabla^2\mathbf{q}\right) \quad (4.9)$$

للتخلص من المشتقات الزمنية $\dot{A}$ و $\dot{E}$ نستبدلها بمشتقة طاقة هيلمهولتز Ψ الحرة المعطاة بالعلاقة التالية :

$$\Psi = e - qh - E_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right)$$

باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن t وفقاً للوصف المادي :

$$\Psi^{g} = \dot{e} - \left(q\dot{h} + \dot{q}h\right) - \left[\dot{E}_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right) + E_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right)^{g}\right]$$

$$\Psi^{g} = \dot{e} - q\dot{h} - h\dot{q} - \dot{E}_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right) - E_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right)^{g} \quad (4.10)$$

نضرب طرفي(4.10) بـ r نحصل على :

$$r\Psi^{g} = re - rq\dot{h} - rh\dot{q} - \dot{E}_k\boldsymbol{P}_k - rE_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right)^{g}$$

$$rq\dot{h} - re - rE_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right)^{g} = -r\Psi^{g} - rh\dot{q} - \dot{E}_k\boldsymbol{P}_k$$

$$r\left(q\dot{h} - \dot{e}\right) + rE_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right)^{g} = -r\Psi^{g} - rh\dot{q} - \dot{E}_k\boldsymbol{P}_k \quad (4.11)$$

بتعويض (4.11) في(4.9) نجد :

$$- r\dot{\Psi} - r\dot{q}\eta - E_k\dot{P}_k + t_{kl}v_{l,k} - M_k\dot{B}_k + J_k E_k + \frac{1}{q}q_{,l}\, q^l \geq 0$$

$$- r(\dot{\Psi} + \dot{q}\eta) + t_{kl}\, v_{l,k} + \frac{1}{q}q_k\, q_{,k} - P_k\dot{E}_k - M_k\dot{B}_k + J_k E_k \geq 0 \qquad (4.12)$$

وبهذا نكون حصلنا على متراجحة Clausius–Duhem (C–D) العامة.

حيث إنّ:

$$\Psi = \frac{S}{r_0} = e - q\eta - \frac{1}{r}E_k P_k = E - q\eta - \frac{1}{r_0}\Pi_K E_K$$

تم الحصول على هذه العلاقة من خلال تعريف طاقة هيلمهولتز الحرة والانتقال إلى الحالة المرجعية للمادة ، حيث يشير الرمز S إلى دالة الطاقة المخزنة للمادة والتي تُعبر عن ارتباط طاقة هيلمهولتز الحرة بمتغيرات الحالة المادية الأساسية وفق العلاقة التأسيسية:

$$r_0\Psi = S = r_0(e - q\eta) - E_K C_{KL} = \Psi(C_{KL}, q, q_K, E_K, B_K, X)$$

ثالثاً : الشكل اللامتغير لمتراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم العامة :

وفقاً للهندسة التفاضلية [5] و[6] :

$$J = E_k \times E_k$$
$$M_k\dot{B}_k = M \times \dot{B}$$
$$P_k\dot{E}_k = P \times \dot{E}$$
$$q_k\, q_{,k} = q \times q$$
$$t_{kl}\, v_{l,k} = t : v$$

فتصبح المتراجحة (4.12) بالشكل التالي:

$$- r(\dot{\Psi} + \dot{q}\eta) + t : v + \frac{1}{q}q \times q - P \times \dot{E} - M \times \dot{B} + J \times E \geq 0 \qquad (4.13)$$

تدعى المتراجحة السابقة متراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم العامة في شكلها اللامتغير (invariance) .

حيث نشير بالرمز : إلى الجداء الداخلي للتنسورين من المرتبة الثانية وما فوق.

رابعاً : متراجحة كلاوزيوس– دوهيم العامة في نظام إحداثيات منحني كيفي

لدينا بحسب خواص الجداء الداخلي لمقطعين متجهين أو تنسورين في النظام الإحداثي السابق

ما يلي [10] :

$$J \times E = J_k E^k = J^k E_k \qquad (4.14)$$

حيث إن : $J = J^i g_i = J_i g^i$

ولدينا $\boldsymbol{B} = B^i g_i$ ق $\dot{\boldsymbol{B}} = \dot{B}^i g_i + B^i \dot{g}_i$

ولكن $\dot{\boldsymbol{g}}_i = A_i^j \boldsymbol{g}_j$ ، بالتالي:

$$M \times \dot{\boldsymbol{B}} = M_k \left(\dot{B}^i + B^i A_i^k \right) \qquad (4.15)$$

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \dot{B}^i g_i + B^i A_i^j \boldsymbol{g}_j = \dot{B}^i g_j + B^i A_i^j \boldsymbol{g}_j = \left(\dot{B}^i + B^i A_i^j \right) \boldsymbol{g}_j$$

وأيضاً :

$$\boldsymbol{E} = E^i g_i \quad \text{ق} \quad \dot{\boldsymbol{E}} = \dot{E}^i g_i + E^i \dot{g}_i$$

ولكن $\dot{g}_i = R_i^j g_j$ ، بالتالي:

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \dot{E}^i g_i + E^i R_i^j g_j = \dot{E}^i g_j + E^i R_i^j g_j = \left(\dot{E}^i + E^i R_i^j \right) g_j$$

$$\boldsymbol{P} \times \dot{E} = \boldsymbol{P}_j \left(\dot{E}^i + E^i R_i^j \right) \qquad (4.16)$$

نعلم أنّ: $\mathbf{q} = q_j g^j$ وبما أن $q = q_j g^j$ $\dfrac{\partial q}{\partial h_j} g^j$

وبالتالي:

$$\mathbf{q} \times \nabla q = q_j \frac{\partial q}{\partial h_j} \qquad (4.17)$$

بما أنّ:

$$\mathbf{t} = t_{kl}\, g^k \otimes g^l = t^l_k\, g^k \otimes g_l = t^k_l\, g_k \otimes g^l = t^{lk}\, g_l \otimes g_k$$

$$\nu \quad {}_kV_l\left(g^k \otimes g^l\right) \qquad {}_kV^l\left(g^k \otimes g_l\right) = \nu = {}^kV_l\left(g_k \otimes g^l\right)$$

فإنّ:

$$t : \nu \quad t_{kl} \quad {}_kV_l \quad t^l_k \quad {}_kV^l = t^k_l = {}^kV_l \qquad (4.18)$$

حيث إنّ:

$$\mathrm{G}_k V^l \qquad {}_kV^l \quad V^j + \Gamma^j_{kj} \quad \text{و} \quad \mathrm{G}_k V_l \qquad {}_kV_l \quad V_j - \Gamma^j_{lk}$$

علماً بأن G^j_{lk} هي رموز كريستوفل من النوع الثاني وتعطى بالعلاقة التالية [1] و[8] :

$$\Gamma^j_{lk} = \Gamma_{lkj}\, g^{ji}$$

نعوض كلاً من (4.14) و (4.15) و(4.16) و(4.17) و(4.18) في (4.13) نجد :

$$- r(\Psi + \dot{q}m) + t^k_l \nu\, {}^kV_l + \frac{1}{q} q_j \frac{\partial q}{\partial h_j} - \boldsymbol{P}_j \left(E + E^i R^j_i\right)$$

$$- M_k \left(B^k + B^i A^k_i\right) + J\, {}^kE_k \geq 0$$

تدعى المتراجحة السابقة متراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم بشكلها المركباتي في النظام الإحداثي المنحني في ^{3} ، .

5- الاستنتاجات والتوصيات

الاستنتاجات : في هذا البحث تم يلي :

- استنتاج معادلات ماكسويل وقوانين الانحفاظ الميكانيكية من الشكل اللامتغير إلى نظام الإحداثيات المنحنية العامة في الفضاء ^{3} ، .

- استنتاج متراجحة كلاوزيوس – دوهيم العامة بشكلها المركباتي التفصيلي في نظام إحداثي منحني كيفي .

التوصيات :

- إمكانية تعميم ما تقدم ذكره إلى الوسط المادي المستمر الدقيق الاستقطاب بما يشمل الجسم المرن الدقيق الاستقطاب والجسم اللدن الدقيق الاستقطاب ومائع إيرنغن (المائع الدقيق الاستقطاب).
- إمكانية تعميم ذلك إلى الوسط المادي المستمر الدقيق الامتطاط بما يشمل الجسم المرن الدقيق الامتطاط والجسم اللدن الدقيق الامتطاط ومائع الدقيق الامتطاط .
- إمكانية تعميم ما تقدم ذكره إلى الوسط المادي المستمر الدقيق التحول بما يشمل الجسم المرن الدقيق التحول والجسم اللدن الدقيق التحول ومائع الدقيق التحول .
- إمكانية تعميم ذلك إلى نظرية الكسر بما يشمل الجسم المرن والجسم اللدن فقط .

6- المراجع

1. S , Drobot ," On Cosserat Continua ," Zastosowania .Math ,vol. 12, 323 -346**, 1971 .**

2. M. E. Gurtin, "The Linear Theory of Elasticity," Encyclopedia of Physics, vol. vla / 2, Springer –Verlag, Berlin, **1972**.

3. AC . Eringen , Coostitutive Equatioos of Noolioear Electromagoetic-Elastic Crystals, Springer-Verlag , USA **1990** .

4. A. C. Eringen & G. A. Maugin, *Electrodynamics of Continua I: Foundations and Solid Media*, Springer-Verlag, 1990

5. J.H ,Heinbockel ,"Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics," Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion University,**1996** .

6. Eringen A. C., " Microcontinuum Field Theories: I: Foundations and Solids," Springer Science + Business Media, LLC, **1999** .

7. M. B, Rebecca ," Curvilinear Analysis in a Euclidean Space," Second Edition, University of New Mexico, **2004.**

8. P. G. Ciarlet , "An Introduction To Differential Geometry with Applications to Elasticity ," Liu Bie Ju Centre For mathematical Sciences ,Gty Unversity of Hong Kong , Department of mathematics , **2005.**

9. K. Hackl & M. Goodarzi : An Introduction to Linear Continuum Mechanics, Lecture Notes, Ruhr-University Bochum, Faculty of Civil and Environmental Engineering, **2010 .**

10. H. Nguyen-Schåfer, "Tensor Analysis and Elementary Differential Geometry for Physicists and Engineers," Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg **2017.**

11. Susana , K.S., Classical Continuum Mechanics ,CRC press ,**2022**.

12. Alberta .C.G ., Biro O., liner P., 2D Fourier finite element formulation for magneto statics in Curvilinear Communications ,volume ,article .,2022

13. Hwang J.C., Noh H., Maxwell equations in Curved space time Eur. Phys. J.C ,2023.

14. Itskov M., Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers

Springer , USA **,2025.**

15 . Ottosen ,N.S General Continuum Mechanics and Constitutive Mechanics and Constitutive Modeling ,Elsevier ,**2025**.