

# مجلة جامعة حمص

سلسلة العلوم الأساسية



مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 47 . العدد 18

1447 هـ - 2025 م

الأستاذ الدكتور طارق حسام الدين رئيس جامعة حمص

المدير المسؤول عن المجلة

رئيس تحرير مجلة جامعة حمص للعلوم الإنسانية	أ. د. وليد حمادة
رئيس تحرير مجلة جامعة حمص للعلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية	د.نعيمة عجيب

عضو هيئة التحرير	د. محمد فراس رمضان
عضو هيئة التحرير	د. مضر سعود
عضو هيئة التحرير	د. ممدوح عبارة
عضو هيئة التحرير	د. موفق تلاوي
عضو هيئة التحرير	د. طلال رزوق
عضو هيئة التحرير	د. أحمد الجاعور
عضو هيئة التحرير	د. الياس خلف
عضو هيئة التحرير	د. روعة الفقس
عضو هيئة التحرير	د. محمد الجاسم
عضو هيئة التحرير	د. خليل الحسن
عضو هيئة التحرير	د. هيثم حسن
عضو هيئة التحرير	د. أحمد حاج موسى

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها

الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة حمص

سورية . حمص . جامعة حمص . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : ++ 963 31 2138071

. موقع الإنترنت : [www.homs-univ.edu.sy](http://www.homs-univ.edu.sy)

. البريد الإلكتروني : [journal.homs-univ.edu.sy](http://journal.homs-univ.edu.sy)

**ISSN: 1022-467X**

## شروط النشر في مجلة جامعة حمص

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
  - طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
  - إذا كان الباحث طالب دراسات عليا:  
يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقة على النشر في المجلة.
  - إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:  
يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.
  - إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :  
يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.
  - إذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :  
يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.
  - يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):  
عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي ( كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1- مقدمة
  - 2- هدف البحث
  - 3- مواد وطرق البحث
  - 4- النتائج ومناقشتها .
  - 5- الاستنتاجات والتوصيات .
  - 6- المراجع.

- يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات ( الآداب - الاقتصاد - التربية - الحقوق - السياحة - التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):
- عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي ( كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1. مقدمة.
- 2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
- 3. أهداف البحث و أسئلته.
- 4. فرضيات البحث و حدوده.
- 5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
- 6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
- 7. منهج البحث و إجراءاته.
- 8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
- 9. نتائج البحث.
- 10. مقترحات البحث إن وجدت.
- 11. قائمة المصادر والمراجع.
- 7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:
  - أ- قياس الورق 25×17.5 B5.
  - ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 - يمين 2.5- يسار 2.5 سم
  - ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8
  - ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20
- كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي - العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.
- ج. يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.
- 8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.
- 9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.

10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة  
11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام ورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة - الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة - سنة النشر - وتتبعها معترضة ( - ) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة - دار النشر وتتبعها فاصلة - الطبعة ( ثانية . ثالثة ) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة .  
وفيما يلي مثال على ذلك:

-MAVRODEANUS, R1986- Flame Spectroscopy. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

— بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة — المجلد والعدد ( كتابة مختزلة ) وبعدها فاصلة — أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة.  
مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases Clinical Psychiatry News , Vol. 4. 20 – 60

ج . إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد بالبنود (أ و ب) ويكتب في نهاية المراجع العربية: ( المراجع In Arabic )

## رسوم النشر في مجلة جامعة حمص

1. دفع رسم نشر (50000) ل.س أربعون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.
2. دفع رسم نشر (200000) ل.س مئة ألف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .
3. دفع رسم نشر (200) مننًا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .
4. دفع مبلغ (15000) ل.س ستة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.

## المحتوى

الصفحة	اسم الباحث	اسم البحث
32-11	د. ثناء شريتح	دراسة التركيب الكيميائي والفعالية الحيوية للزيت المستخلص من الزعتر السوري باستخدام تقنيتي الجرف البخار و الأمواج فوق الصوتية
50-33	أ.م.د. بشرى رجب عباس	Existence, Uniqueness, and Convergence of Solutions for General Monotone Inclusions in Hilbert Spaces
82-51	بسمه هشام الحمدو أ.د. منير مخلوف أ.د. ابراهيم ابراهيم	تشكيل قاعدة في بعض الفضاءات النووية وفضاءات باناخ
106-83	مايا موفق منصور د. رانية جنيد د. نور رضوان	قواعد غروينر فوق ساحات بروفير
124-107	علا رياض البيريني د. صبا ناصيف	اصطناع استرات بروبانول-1 انطلاقاً من حمض الميريستيك وحمض الأوليك بوجود الأمبرلست-15



---

## Study of the Chemical Composition and Biological Efficacy of Essential Oil Extracted from Syrian Thyme Using Steam Distillation and Ultrasound Techniques

\* Thanaa Shriteh

### Abstract

This study compared the efficiency of two extraction techniques—steam distillation and ultrasound-assisted extraction for extracting essential oil from green thyme (*Thymus vulgaris*), focusing on quantitative yield, chemical composition, and antimicrobial and antioxidant activities. The results demonstrated a significant superiority of ultrasound-assisted extraction, which achieved a higher yield of 3.5% compared to 0.78% for steam distillation. The oil extracted using ultrasound also exhibited higher purity, with the proportion of the main phenolic compound, carvacrol, which increased to 90.88% compared to 66.43% in the traditionally extracted oil. Additionally, the ultrasound-extracted oil showed greater chemical diversity, with 14 compounds identified compared to only 8 compounds in the conventional oil.

**Keywords:** Green thyme, ultrasound-assisted extraction, steam distillation, carvacrol, antimicrobial activity, antioxidant activity.

---

\*) Dr. for organic chemistry: Department of chemistry–Faculty of science–Homs university, SYRIA

## دراسة التركيب الكيميائي والفعالية الحيوية للزيت المستخلص من الزعتر السوري باستخدام تقنيتي الجرف بالبخار و الأمواج فوق الصوتية

د. ثناء شريتح \*

### ملخص البحث

تم في هذا البحث مقارنة بين كفاءة تقنيتي التقطير بالبخار (التقليدية) والاستخلاص بمساعدة الأمواج فوق الصوتية (الحديثة) في استخلاص الزيت العطري من نبات الزعتر الأخضر (*Thymus vulgaris*)، من حيث المردود، والتركيب الكيميائي، والفعالية المضادة للميكروبات والأكسدة. أظهرت النتائج تفوقاً ملحوظاً لتقنية الاستخلاص بالأمواج فوق الصوتية، حيث حققت مردوداً أعلى بلغ 3.5% مقارنة بـ 0.78% للجرف بالبخار. كما تميز الزيت المستخلص بهذه التقنية بنقاوة أعلى، حيث ارتفعت نسبة الكارفاكول (المكون الرئيسي) إلى 90.88% مقابل 66.43% وبتنوع كيميائي أكبر، حيث تم تحديد 14 مركباً مقابل 8 مركبات فقط في الزيت التقليدي. انعكس هذا التفوق الكيميائي على الفعالية الحيوية، إذ أظهر الزيت المستخلص بالموجات فوق الصوتية فعالية مضادة للميكروبات أقوى ضد أنواع بكتيريا مختلفة، تفوق على المضاد الحيوي (الجنتاميسين) في تثبيط نمو بكتيريا *E. coli*. كما سجل نشاطاً مضاداً للأكسدة أعلى بشكل كبير، حيث بلغت نسبة التثبيط 85.42% مقابل 41.24% للزيت المستخلص بالجرف بالبخار.

**كلمات مفتاحية:** الزعتر الأخضر، الاستخلاص بالموجات فوق الصوتية، التقطير بالبخار، الكارفاكول، النشاط المضاد للميكروبات، النشاط المضاد للأكسدة.

(\* أستاذ مساعد في قسم الكيمياء - كلية العلوم - جامعة حمص - سورية)

## 1- مقدمة:

تكتسب النباتات الطبية مكانة استراتيجية في الصناعة الدوائية كمصدر طبيعي وآمن للمركبات الفعالة، مما يستدعي تطوير طرائق استخلاص فعالة لضمان الجودة والعائد المرتفع. أثبتت التقنيات الحديثة مثل الاستخلاص بالموجات فوق الصوتية كفاءة أعلى مقارنة بالطرائق التقليدية (مثل بالحرف البخار) من حيث كمية ونقاء المستخلصات وفعاليتها الحيوية [1]. لذلك تم في هذه الدراسة مقارنة هاتين الطريقتين لاستخلاص الزيوت من نبات الزعتر وتقييم كفاءتهما

نبات الزعتر الأخضر:

الزعتر نبات عشبي معمر، يتراوح ارتفاعه بين 30Cm , 50Cm. يتميز بأوراقه الصغيرة الرفيعة، وسيقانه المضلعة التي تتحول إلى خشبية مع تقدم العمر. أزهاره صغيرة ذات لون أزرق أو أرجواني، وثماره كبسولية تحتوي على بذور صغيرة عديدة. للنبات رائحة عطرية قوية الشكل (1-1) [2].



الشكل (1-1): الشكل المورفولوجي لنبات الزعتر الأخضر

الموطن الأصلي للزعتر هو منطقة حوض البحر الأبيض المتوسط، حيث ينمو طبيعياً في المناطق الجافة والمشمسة في جنوب أوروبا وشمال أفريقيا، وخاصة في المنطقة الممتدة من غرب البحر المتوسط إلى جنوب إيطاليا [3].

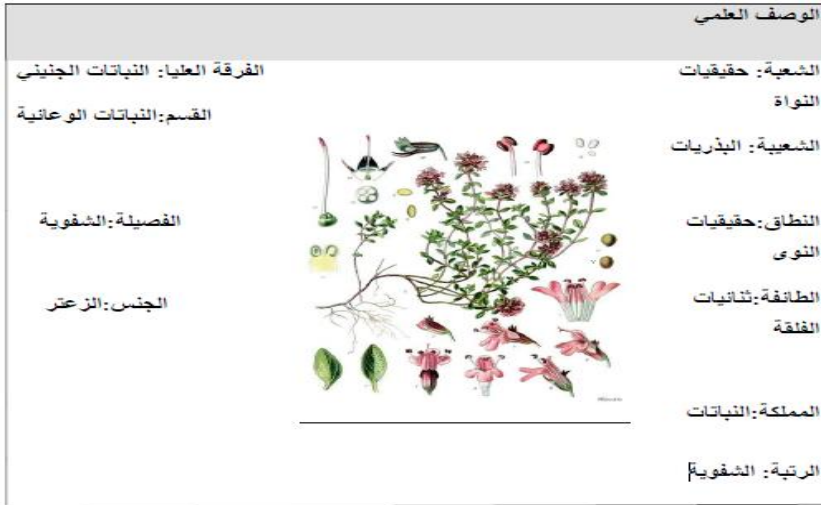
الاسم العلمي (Thymus vulgaris) : هو نبات معروف بعدة أسماء شائعة موضحة في الجدول  
(1) .

الجدول(1) : الأسماء الشائعة للزعتر [4]

بالعربية	بالفرنسية	بالإنجليزية
الزعتر	Thym	Thyme
الصعتر	Farigoule	Common Thyme
الزعيرة	Thym commun	Culinary Thyme
-	Thym cultivé	French Thyme
-	Thym vulgaire	Garden Thyme
-	Farigoule et barigoule	Winter Thyme

#### تصنيف نبات الزعتر :

يصنف نبات الزعتر وفق الشكل (1-2) التالي:



الشكل (1-2): التصنيف العلمي لنبات الزعتر الأخضر [2]

يتميز نبات الزعتر (Thymus vulgaris) باستعمالات متعددة في المجالين الصناعي والطبي. في الصناعة، يُستخدم زيت الزعتر كمضاف غذائي وفي مستحضرات التجميل والعطور،

بالإضافة إلى كونه مبيدًا طبيعيًا آمنًا للآفات. في المجال الطبي، يمتلك الزعتر خصائص مضادة للميكروبات والالتهابات، مما يجعله مفيداً في علاج حب الشباب، واضطرابات الجهاز التنفسي، وفقدان الشعر، كما يدعم صحة العظام والقلب والأوعية الدموية [5].

يُعد زيت الزعتر من الزيوت العطرية العالمية، حيث يُستخدم كمضاف غذائي وفي صناعة العطور ومستحضرات التجميل نظراً لخصائصه العطرية المتميزة. تتراوح نسبة الزيوت العطرية في الزعتر بين 0.32% إلى 4.9%، وتتميز باحتوائها على مركبات فينولية أساسية مثل الثيمول (Thymol) والكارفاكرول (Carvacrol)، بالإضافة إلى مركبات غير فينولية سائدة مثل الينالول (Linalool) والبارا-سيمين (p-Cymene). في دراسة أجريت عام 2019، تم استخلاص الزيت العطري للزعتر باستخدام جهاز كلينجر، حيث بلغت نسبة الاستخلاص 2.4%. كشفت تحاليل جهاز GC-MS عن وجود 29 مركباً فعالاً في الزيت، وأهم هذه المركبات Thymol الذي تواجد بأعلى تركيز حيث بلغت نسبته 54.87%، بينما بلغت نسبة Carvacrol 2.32% [6].

في دراسة حديثة أجريت عام 2022، تم تطوير تقنية متقدمة لاستخلاص زيت الزعتر باستخدام الجراف بالبخار المعزز بالميكروويف. حيث توصل الباحثون إلى أن الظروف الأمثل للاستخلاص تشمل استخدام أوراق الزعتر المطحونة، وتطبيق طاقة ميكروويف بقدرة 700 واط، ونسبة مادة إلى مذيب 1:30 غ/مل، ومدة استخلاص 60 دقيقة. هذه الطريقة المبتكرة حققت أعلى كفاءة استخلاص لزيت الزعتر العطري، مما يثبت تفوق تقنية الميكروويف في استخراج الزيوت الأساسية مقارنة بالطرق التقليدية، مع الحفاظ على الجودة العالية للمركبات الفعالة [7]. في دراسة أجريت عام 2023، تم تطوير منهجية متقدمة تجمع بين المعالجة المسبقة بالموجات فوق الصوتية والجراف بالبخار بالميكروويف لاستخلاص زيت الزعتر العطري. حيث بينت النتائج انخفاض زمن الاستخلاص بنسبة 72%، وزيادة مردود الزيت العطري بنسبة 23%، وارتفاع تركيز الثيمول - المركب الفعال الرئيسي - إلى 65.94%. أثبتت هذه التقنية كفاءتها العالية في تحسين جودة الزيت المستخلص مع تقليل الوقت والطاقة المستهلكة [8].

في دراسة حديثة أجريت عام 2025، استخلص زيت الزعتر العطري بطريقة خضراء مستدامة باستخدام الموجات فوق الصوتية، حيث أظهرت الظروف المثلى (كفاءة تغليف 80% لمدة 20 دقيقة) تفوقها في تحقيق أعلى عائد للزيت والمواد النشطة بيولوجياً، مع تعزيز النشاط المضاد للأكسدة والمضاد للميكروبات. كما برهن التغليف النانوي باستخدام الصمغ العربي على كفاءته العالية في الحفاظ على استقرار هذه الزيوت النشطة وتحسين خصائصها [9] .

## 2- هدف البحث:

يهدف هذا البحث إلى:

- 1) استخلاص الزيت العطري من نبات الزعتر الأخضر بطريقتين:
  - a) الاستخلاص باستخدام بالحرف بالبخار .
  - b) الاستخلاص باستخدام جهاز الأمواج فوق الصوتية.
- 2) تحديد التركيب الكيميائي للزيت المستخلص من نبات الزعتر بكلا الطريقتين باستخدام جهاز الكروماتوغرافيا الغازية وكاشف مطيافية الكتلة GC/MS، لتحديد تأثير طريقة الاستخلاص على التركيب الكيميائي للزيت.
- 3) دراسة الفعالية البيولوجية و الفعل المضاد للأكسدة للزيت المستخلص من النبات بكلا الطريقتين.

## 3- القسم التجريبي:

### 3-1- الأجهزة المستخدمة:

- ميزان حساس نوع artorius BL-210S
- سخان مزود بمحرك مغناطيسي Agimatic P-Selecta 243
- جهاز بالحرف بالبخار مكون من حوجلة سعة ليتر، وسخانة ومبرد عادي وميزان حرارة وحوجلة لاستقبال الزيت .
- جهاز الأمواج فوق الصوتية: يقوم مبدأه على توليد أمواج فوق صوتية يبلغ ترددها حوالي (40 KHZ) ، إذ تقوم هذه الأمواج ببعثرة تجمعات دقائق المواد الصلبة ضمن السوائل وذلك للحصول على التبعثر الجيد في المزاج الغروية أو لزيادة سرعة الانحلال .

- جهاز الكروماتوغرافيا الغازية- مطياف الكتلة GC/MS من شركة Agilent، والمزود بكاشف نوع Quadrapole مع عمود فصل من نوع HP-5MS.
- فرن تعقيم بالحرارة الجافة .
- حاضنة
- براد $4^{\circ}\text{C}$ .
- أطباق بيبترى معقمة قطر 9mm مع وسط الآغار المغذي.
- ماسحة زجاجية معقمة .
- موقد تعقيم باللهب .
- ماسحة زجاجية معقمة .
- ماصات الكترونية معقمة .
- أطباق ماكونكي مع عزلات من جراثيم إيجابية الغرام ( *Staphylococcus Aureus*)، وسلبية الغرام الإيشريشيا القولونية (*E. Col*).

### 3-2- المواد الكيميائية المستخدمة :

- عينات من نبات الزعتر .
- مذيبات: نظامي الهكسان، كلورفورم، ماء مقطر.
- كبريتات الصوديوم اللامائية.

### 3-3- استخلاص الزيت العطري من نبات الزعتر الأخضر:

جُمعت عينات من نبات الزعتر الأخضر من مدينة حماة في نهاية شهر تشرين الأول عام 2024. بعد تنظيف العينات وغسلها، جُففت أوراق الزعتر طبيعياً في الظل لمدة 15 يوماً، مع الحفاظ على درجة حرارة الغرفة عند ( $25^{\circ}\text{C}$ ). وُزعت العينات على صفائح ورقية في مكان مظلل وجيد التهوية، مع تقلبها بين الحين والآخر لضمان تجانس عملية التجفيف. بعد اكتمال الجفاف، طُحنت العينات لتصبح مسحوقاً ناعماً ومتجانساً تمهيداً لاستخلاص الزيت العطري. لضمان الحصول على أفضل النتائج، تم استخلاص الزيت العطري من نبات الزعتر بطريقتين مختلفتين.

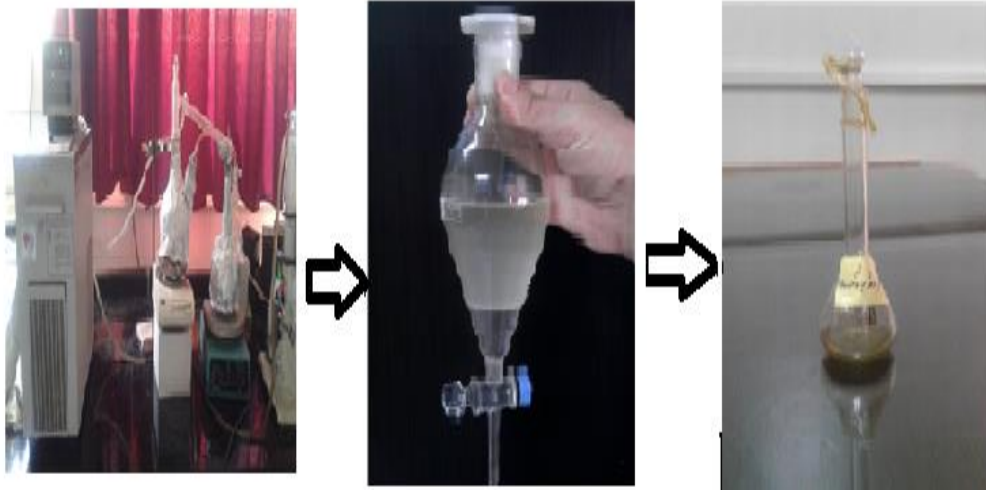
### 3-3-1- استخلاص الزيت العطري بطريقة بالحرف البخار:

دراسة التركيب الكيميائي والفعالية الحيوية للزيت المستخلص من الزعتر السوري باستخدام تقنيتي الجرف  
بالبخار و الامواج فوق الصوتية

تم إجراء استخلاص الزيت العطري من عينة زعتر أخضر مطحون وزنها 14g بوضعها في حوجلة تقطير وإضافة الماء المقطر حتى تغمر العينة لمنع الفوران. بعد ذلك، تم تسخين الخليط حتى الغليان، حيث حمل بخار الماء قطرات الزيت العطري، ثم تكثف هذا البخار في مكثف تبريد لمدة ثلاث ساعات.

جُمع الناتج في حوجلة فصل، ثم أُضيف إليه 20mL من الكلوروفورم لاستخلاص الزيت العطري، مع رج الخليط برفق عدة مرات وتركه حتى انفصل إلى طبقتين: عضوية تحتوي على الزيت والكلوروفورم ومائية. كررت عملية الاستخلاص ثلاث مرات لضمان الحصول على أكبر كمية ممكنة من الزيت العطري.

بعد ذلك، جُففت الخلاصة العضوية بإضافة كبريتات الصوديوم اللامائية، ثم رُشح المحلول للتخلص من المادة المجففة، تم تبخير الكلوروفورم باستخدام المبخر الدوار عند درجة حرارة 30°C، فتم الحصول على زيت عطري أصفر اللون بوزن 0.11g، وبمردود 0.78% الشكل (1-3-3)، أخيراً حُفظ الزيت في الثلاجة حتى موعد تحليله.



الشكل (1-3-3): استخلاص الزيت العطري باستخدام جهاز الجرف بالبخار

2-3-3- استخلاص الزيت العطري باستخدام جهاز الامواج فوق الصوتية:

أخذ 14g من نبات الزعتر المطحون في أرلينة سعة 100mL وأضيف لها 50mL نظامي هكسان، ثم وضعت الأريلينة بعد إغلاقها بشكل محكم في جهاز الأمواج فوق الصوتية لمدة 30min عند الدرجة 30°C بتردد 20-40 KHZ، ثم رشح المزيج باستخدام ورق ترشيح لفصل الزيت المنحل في نظامي الهكسان، وفصل نظامي الهكسان عن الزيت باستخدام المبخر الدوار، فنتج زيت لونه أصفر بوزن 0.49g، وبمردود 3.5% وحفظ الزيت في البراد لحين تحليله. حيث قدرت النسبة المئوية للزيت العطري المستخلص بعد إن أخذ وزن العينة قبل الاستخلاص و وزن الزيت المستخلص وحسبت النسبة كالتالي:

$$\text{النسبة المئوية للزيت العطري المستخلص} = \text{وزن الزيت/وزن العينة} \times 100$$

#### 4-3 - تحليل الزيوت المستخلصة باستخدام تقنية الكروماتوغرافيا الغازية وكاشف طيف الكتلة GC/MS:

حللت عينات الزيت المستخلصة وفق طريقة الجرف بالبخار وطريقة الأمواج فوق الصوتية من نبات الزعتر الأخضر بكلية العلوم في جامعة دمشق استخدام جهاز GC/MS من نوع Agilent، حيث ضُبِطت إعدادات جهاز GC/MS للعينة كالتالي: مدخل العينة كروماتوغرافيا الغازية (GC) مع حقن يدوي، ومطياف الكتلة مفعّل. برنامج تسخين الفرن: بدءاً من 40°C (دقيقتين)، ثم رفع درجة الحرارة إلى 60°C بمعدل 2.5-10°C/min مع فترات تثبيت محددة، ومدة تشغيل 69min. استُخدِمَ مدخل غاز الهيليوم (He) بنمط التقسيم (Split 8:1) وضغط 7.07psi، مع تدفق 1mL/min في العمود (HP-5MS).

وسجلت أطياف الكتلة من 40-650 m/z، وبنمط EI بطاقة جهد 70V، وزمن تأخير المذنب 3.5 دقيقة، ودرجات حرارة مصدر/رباعي الأقطاب 150°C/ 230°C. وجرى تحديد المكونات بواسطة مقارنة أطياف الكتلة الناتجة لكل قمة مع أطياف الكتل في المكتبات المتوافرة ضمن الجهاز مثل (Wiley و NIST 69).

#### 5-3 - تحديد الفعل المضاد للجراثيم للزيوت المستخلصة من نبات الزعتر:

تمت دراسة النشاط البيولوجي لعينتي الزيت العطري المستخلصة من نبات الزعتر الأخضر، بطريقة الجرف بالبخار (1) و باستخدام الأمواج فوق الصوتية (2)، في مخبر الجراثيم في مديرية الصحة في حمص على نوعين من البكتريا الممرضة سريريّاً: جرثومة إيجابية الغرام

( *Staphylococcus Aureus S.T* )، وجراثومتين سلبية الغرام (*E.Col*) و ( *Pseudomonas aeruginosa* ) ، حيث اتبعت طريقة إحداث الحفر في الآغار وفق مايلي :  
- أخذ 100µL من المعلق الجرثومي نشرت على سطح وسط آغار مولر هنتون وضعت في البراد لمدة ربع ساعة حتى تمام تشرب الوسط .  
- تم إحداث حفر ضمن الوسط بواسطة ثاقب زجاجي عقيم قطر 6mm وبمعدل 3 حفر في كل طبق .

- حُضرت عينات من الزيت العطري بتركيز (100µgr/L) باستخدام مذيب ثنائي ميثيل سلفوكسيد (DMSO)، وعينة من الصاد الحيوي جنتاميسين أيضاً بتركيز (100µgr/l) باستخدام المذيب نفسه كشاهد إيجابي .  
- عبت الحفر بـ 100µL من كل من العينتين (1) و(2) المعدتين للاختبار بالإضافة للجنتاميسين .

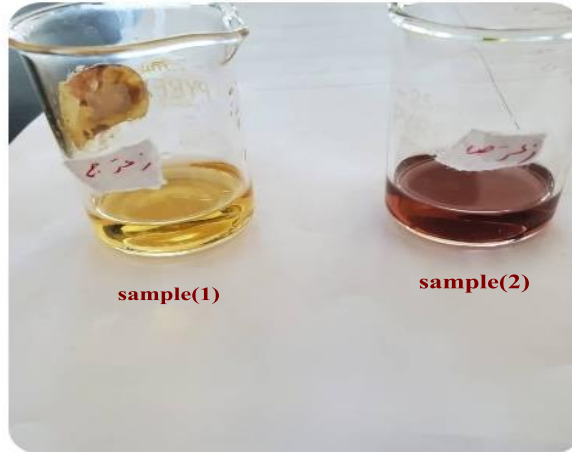
- وضعت الأطباق في البراد مدة ساعتين حتى تمام التشرب .  
- حضنت الأطباق على درجة حرارة °C (36.5-37) لمدة 24 ساعة .  
إن ظهور منطقة خالية من النمو البكتيري حول الحفر المحتوية على الزيت المستخلص المختبر أعتبر دليلاً على تأثير الزيت على البكتيريا المختبرة، أما عدم ظهور مثل هذه المنطقة سجلت نتيجة الفعالية سلبية (البكتيرية مقاومة للمستخلص المختبر)، وتم أخذ متوسط قطر منطقة التثبيط باستخدام مسطرة مدرجة .

### 3-6- تحديد الفعل المضاد للأكسدة باستخدام DPPH:

تم تحديد الفعل لمضاد للأكسدة للزيت العطري المستخلص من نبات الزعتر بطريقة الحرف بالبخار (1) و باستخدام الأمواج فوق الصوتية (2) ، حيث حضر محلول 2،2-ثنائي فينيل-1-بيكريل هيدرازيل (DPPH) بإضافة 0.01g من DPPH إلى 100mL ميتانول، ومدد المحلول بأخذ 50mL منه إضافتها إلى 100mL ميتانول .

بعد ذلك أخذ 5mL من محلول DPPH ومزج مع 0.5mL من الزيت العطري (لكل طريقة استخلاص على حدة)، ومزج جيداً وترك المزيج في الظلام لمدة نصف ساعة حتى يتحول لون

المحلول من الأصفر إلى البنفسجي الشكل (3-6). قيس امتصاصية المحلول عند طول الموجة 517nm باستخدام جهاز الطيف الضوئي.



الشكل (3-6): حزن محلول عينة الزيت مع الـ DPPH

حُسبت نسبة النشاط المضاد للأكسدة باستخدام المعادلة التالية:

$$(\%) \text{ النشاط المضاد للأكسدة} = \left( \frac{A_s - A_c}{A_s} \right) \times 100$$

حيث:

$A_s$ : امتصاصية محلول DPPH.

$A_c$ : امتصاصية المزيج ( DPPH مع الزيت المستخلص ) [10].

4- النتائج والمناقشة:

1-4- تحديد كمية الزيت المستخلص من نبات الزعتر:

كمية الزيت المستخلصة من نبات الزعتر الأخضر بطريقة الجرف بالبخار كانت 0.11g، بينما

كانت كمية الزيت المستخلصة باستخدام الأمواج فوق الصوتية 0.49g.

يُظهر الجدول (1-4) المقارنة بين الطريقتين المستخدمتين في استخلاص الزيت العطري من نبات الزعتر الأخضر.

**الجدول(1-4) :** المقارنة بين الطريقتين المستخدمتين في استخلاص الزيت العطري من نبات  
الزعتر الأخضر

طريقة الاستخلاص	درجة الحرارة °C	زمن الاستخلاص	المردود %	نوع المذيب
الجرف بالبخار	100	3h	0.78	الماء
الأمواج فوق الصوتية	30	30min	3.5	نظامي هكسان

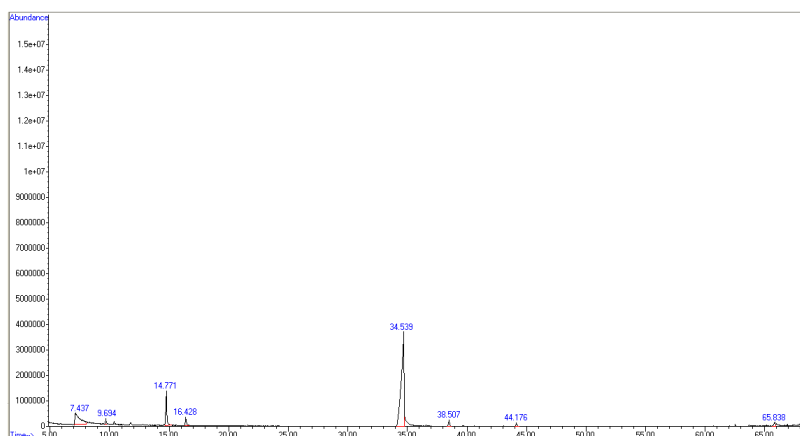
يعود الفرق الكبير في كمية الزيت المستخلص بين طريقة الجرف بالبخار وطريقة الاستخلاص باستخدام جهاز الأمواج فوق الصوتية إلى قدرة الأمواج فوق الصوتية على توفير طاقة ميكانيكية مكثفة تمزق جدران الخلايا النباتية بشكل فعال، مما يسهل إطلاق الزيوت. كما ساهمت ظروف الاستخلاص المعتدلة (درجة حرارة منخفضة (30°C) ولمدة قصيرة (30min) في الحفاظ على المركبات الحساسة للحرارة ومنع تحللها، على عكس التقطير بالبخار الذي يعمل عند (100°C) لمدة 3 ساعات. بالإضافة إلى ذلك، فإن استخدام المذيب العضوي غير القطبي (الهكسان) في طريقة الأمواج فوق الصوتية كان أكثر كفاءة وكيميائياً ملائماً لاستخلاص الزيوت من استخدام الجرف بالبخار [11,12].

**2-4- تحديد التركيب الكيميائي للزيت المستخلص من نبات الزعتر:**

**1-2-4- التركيب الكيميائي للزيت المستخلص بطريقة الجرف بالبخار:**

يبين الشكل (1-2-4) والجدول(1-2-4) المركبات الكيميائية في الزيت العطري المستخلص من نبات الزعتر بطريقة الجرف بالبخار بعد تحليله بجهاز GC/MS ، حيث أظهرت النتائج احتواء الزيت على 8 مركبات، وكانت أكثرها تواجداً

(5-Isopropyl-2-methylphenol(Carvacrol)) بنسبة 66.43% ، و (Isopropyl-5-methylpheno(thymol)) بنسبة 16.05% ،  
(1,8-Cineole) بنسبة 9.24% .



الشكل (1-2-4): كرموتوغرام GC/MS للزيت العطري المستخلص من الزعتر  
بالحرف بالبخار

الجدول (1-2-4): التركيب الكيميائي للزيت العطري المستخلص من نبات الزعتر بالجرف  
بالبخار

Number peak	Compound	Retention Time (min)	Percentage Area%
1	Isopropyl-3-methylphenol thymol	7.4344	16.0479
2	alpha.-Pinene,	9.696	1.1577
3	1,8-Cineole	14.771	9.2386
4	2,6-Dimethyl-1,3,5,7-octatetraene	16.4258	2.5494
5	2-Methyl-5-(1-methylethyl)phenol, Carvacrol)	34.5398	66.4279
6	1,3-Bis-(2-cyclopropyl,2-methylcyclopropyl)-but-2-en-1-one	38.5046	1.9948
7	trans-Caryophyllene	44.1725	1.0642
8	trans-1-(1Z-hexenyl)-2-vinylcyclopropane	65.8376	1.5194

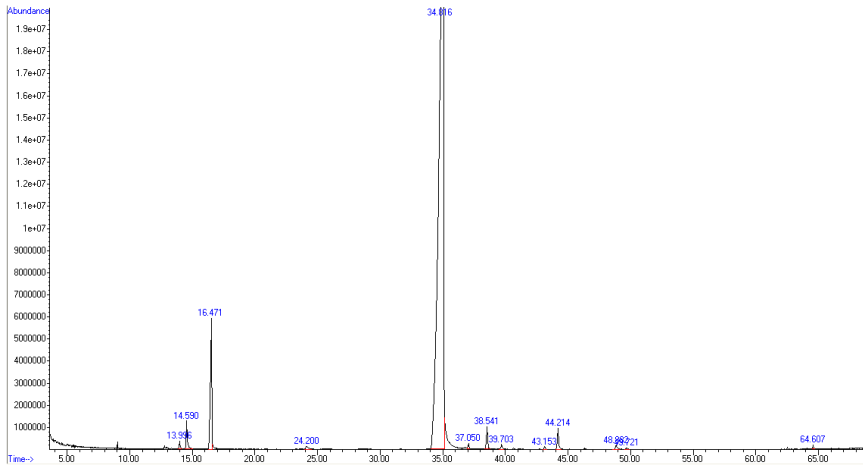
#### 2-2-4- التركيب الكيميائي للزيت المستخلص باستخدام الأمواج فوق الصوتية:

يبين الشكل (2-2-4) والجدول (2-2-4) التركيب الكيميائي للزيت العطري المستخلص من نبات الزعتر باستخدام تقنية الموجات فوق الصوتية، مع مقارنة بالزيت المستخلص بطريقة بالحرف بالبخار بعد تحليل العينات بجهاز GC/MS. وقد كشفت النتائج عن اختلاف واضح في التركيب الكيميائي بين الطريقتين، حيث احتوى الزيت المستخلص بالموجات فوق الصوتية على 14 مركباً، بينما اقتصر الزيت المُستخلص بالحرف بالبخار على 8 مركبات فقط. أكثر المركبات تواجداً في الزيت المستخلص بالموجات فوق الصوتية:

1. 5-Isopropyl-2-methylphenol(Carvacrol) بنسبة عالية جداً بلغت  
90.88%

2. (Isopropyl-5-methylphenol) thymol بنسبة 5.05%

3. p-Cymene بنسبة 0.94%



الشكل (2-2-4): كروماتوغرام GC/MS للزيت العطري المستخلص من الزعتر بالأمواج فوق الصوتية

الجدول (2-2-4): التركيب الكيميائي للزيت العطري المستخلص من نبات الزعتر بطريقة الأمواج فوق الصوتية

Number peak	Compound	Retention Time (min)	Percentage Area%
1	2-.BETA.-PINENE	12.7784	<b>0.0824</b>
2	1,3,8-p-Menthatriene	13.9782	<b>0.2395</b>
3	p-Cymene	14.5436	<b>0.939</b>
4	Isopropyl-3-methylphenol thymol	16.5225	<b>5.0478</b>
5	<b>2-Methyl-5-(1-methylethyl)phenol, Carvacrol)</b>	35.0502	<b>90.8772</b>
6	3-ETHYLIDENE-2,2-DIMETHYL-NORBORNANE	36.0224	<b>0.1012</b>
7	Phenol, 2-methyl-5-(1-methylethyl)	37.0498	<b>0.1878</b>
8	trans-Caryophyllene	38.5461	<b>0.8923</b>
9	(-)-Alloaromadendrene	39.6908	<b>0.1841</b>
10	(-)-Alloaromadendrene	43.1453	<b>0.1122</b>
11	beta.-Bisabolene	44.221	<b>0.8978</b>
12	3-Propenylpenta-3,4-dienal	48.8408	<b>0.2461</b>
13	.alpha.-Selinene	49.6958	<b>0.0814</b>
14	N-(2-FURFURYL)-N''-(3,4-DIOXYMETHYLENE.	64.5897	<b>0.1113</b>

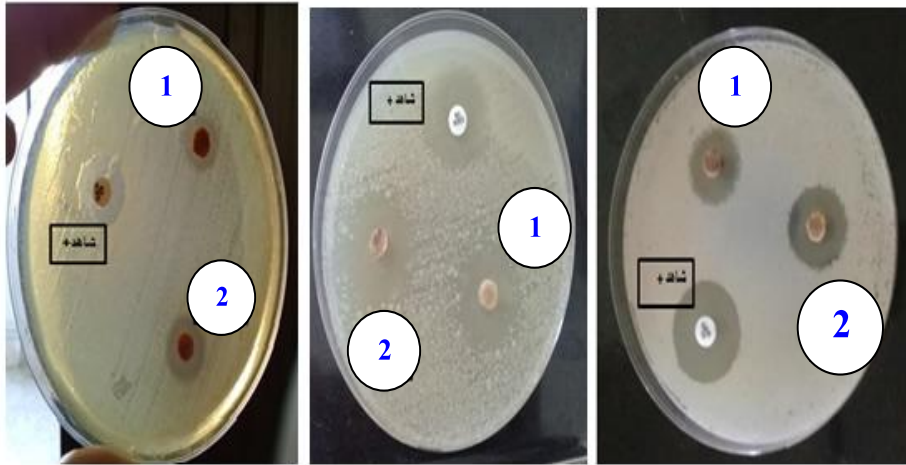
يعود الاختلاف في التركيب الكيميائي للزيت العطري المستخلص من الزعتر بين طريقتي التقطير بالبخار والاستخلاص بالموجات فوق الصوتية بشكل أساسي إلى اختلاف آلية العمل ودرجة الحرارة.

فالجرف بالبخار، والذي يعمل عند درجة حرارة عالية (100°C) لمدة طويلة 3 ساعات ، يعرض المركبات الحساسة للحرارة للتبخر أو التحلل، مما يقلل من تنوعها ويؤدي إلى تكوّن نواتج تحلل ثانوية.

في المقابل، تعمل تقنية الموجات فوق الصوتية في ظروف لطيفة (30°C) لمدة قصيرة (30 دقيقة) توفر الطاقة الميكانيكية للأمواج تمزيقاً فعالاً للخلايا دون الحاجة لحرارة عالية، مما يحافظ على المركبات الحساسة ويمكن من استخلاص عدد أكبر من المكونات، بما في ذلك التربينات الخفيفة والمركبات غير القطبية التي قد تتلف بالحرارة [13].

#### 3-4- دراسة النشاط البيولوجي للزيت المستخلص من نبات الزعتر:

تم دراسة النشاط البيولوجي لعينتي الزيت العطري المستخلصة من نبات الزعتر الأخضر، بطريقة الجرف بالبخار (1) و باستخدام الأمواج فوق الصوتية (2) في مخبر الجراثيم في مديرية الصحة في حمص على جرثومة إيجابية الغرام (*Staphylococcus Aureus S. T*)، وجرثومتين سلبية الغرام (*E. Col*) و (*Pseudomonas aeruginosa*). ويوجد شاهد إيجابي من الجينتاميسين كمضاد حيوي ، حيث تم تحضير محاليل العينات بمحل DMSO وبتركيز مشترك 100 µgr/ml، و تم تقدير الفعالية بعد إجراء هذه الدراسة بقياس قطر هالة تثبيط نمو الجراثيم في الأطباق ، ودونت النتائج وفق الجدول (3-4) من خلال الشكل (3-4).



*Pseudomonas aeruginosa*      *Escherichia coli*      *Staphylococcus aureus*

الشكل (3-4): مناطق التثبيط للزيت (1) والزيت (2) المستخلصين ببالحرف بالبخار والأمواج فوق الصوتية اتجاه الجراثيم

الجدول (3-4): أقطار مناطق التثبيط لزيت الزعتر المستخلص بطريقتي التقطير المائي والأمواج فوق الصوتية اتجاه الجراثيم

قطر منطقة التثبيط (mm)	العينة بتركيز 100µgr/L	نوع الجرثومة
15	(1)	<i>Staphylococcus aureus</i> ايجابية الغرام
17	(2)	
20	جنتاميسين	
17	(1)	<i>Escherichia coli</i> سلبية الغرام
21	(2)	
16	جنتاميسين	
11	(1)	<i>Pseudomonas aeruginosa</i> سلبية الغرام
12	(2)	
13	جنتاميسين	

أظهر زيت الزعتر العطري المستخلص (بكلا الطريقتين) فعالية مضادة للميكروبات ضد البكتيريا موجبة وسالبة الغرام، حيث تفوق الزيت العينة (2) (المستخلصة بالأمواج فوق الصوتية) بشكل ملحوظ على الزيت العينة (1) (المستخلص بالحرف البخار) في جميع الاختبارات، وذلك بحسب قياس قطر منطقة التثبيط. كانت الفعالية ضد البكتيريا سالبة الغرام (*E. coli*) مذهلة، حيث تفوقت العينة (2) حتى على المضاد الحيوي (الجنتاميسين). تدعم هذه النتائج تفوق طريقة الاستخلاص الحديثة [14].

4-4- دراسة النشاط المضاد للأكسدة للزيت المستخلص من نبات الزعتر:  
يوضح الجدول (4-4) نتائج دراسة الفعالية المضادة للأكسدة والنسب المئوية للقدرة على تثبيط  
الجذور الحرة .

الجدول(4-4): نتائج دراسة الفعالية المضادة للأكسدة والنسب المئوية للقدرة على تثبيط DPPH

العينة	النسب المئوية للنشاط المثبط لـ DPPH (%)
(1)	41.24
(2)	85.42

يبين الجدول السابق تفوق ملحوظ في الفعالية المضادة للأكسدة للعينة (2) الزيت المستخلص  
بطريقة الامواج فوق الصوتية مقارنة بالعينة ( 1) الزيت المستخلص بطريقة الجرف بالبخار ،  
يعزى هذا التفاوت في الأداء إلى اختلاف طريقة الاستخلاص، حيث أن الطريقة المستخدمة  
للعينة (2) كانت أكثر كفاءة في استخلاص المركبات الفينولية النشطة (مثل الكارفاكروول  
والثيمول) المسؤولة عن هذه الخاصية [15] .

#### 5- الاستنتاجات والتوصيات:

1. أثبتت طريقة الاستخلاص باستخدام طريقة الأمواج فوق الصوتية تفوقاً واضحاً على طريقة الجرف بالبخار، حيث حققت مردوداً أعلى ، وزيتاً أكثر نقاءً، من خلال ارتفاع نسبة المركب الفعال (الكارفاكرول) إلى %90.88 مقارنة بـ %66.43 .
2. أعطت طريقة الأمواج فوق الصوتية زيتاً أكثر تنوعاً، حيث تم تحديد 14مركباً مقارنة بـ 8 مركبات فقط في الزيت المستخلص بالبخار .
3. أظهر الزيت المستخلص بالموجات فوق الصوتية نشاطاً مضاداً للميكروبات ومضاداً للأكسدة أقوى بشكل ملحوظ من الزيت المستخلص بالجرف بالبخار، وتفوق على المضاد الحيوي القياسي (الجنتاميسين) في مكافحة بكتيريا *E. coli* .
4. يعزى تفوق طريقة استخلاص الزيت من نبات الزعتر باستخدام الأمواج فوق الصوتية إلى كفاءة الاستخلاص العالية وظروف العمل عند درجة حرارة منخفضة ( $30^{\circ}\text{C}$ )، وزمن قصير (30min) التي تحافظ على المركبات النشطة بيولوجياً، على عكس الحرارة العالية والزمن الطويل في الجرف بالبخار التي قد تتسبب في تحللها أو فقدانها.

#### التوصيات:

1. يُوصى باعتماد تقنية الاستخلاص بمساعدة الأمواج فوق الصوتية كطريقة مثلى لاستخلاص الزيوت العطرية من الزعتر والنباتات الطبية العطرية الأخرى، نظراً لكفاءتها العالية وجودة المنتج النهائي.
2. نظراً للفعالية البيولوجية المتميزة للزيت المستخلص بالموجات فوق الصوتية، يُوصى بإجراء مزيد من الدراسات لتقييم فعاليته اتجاه أنواع أخرى من البكتريا.

## 6- المراجع: References

- [1]. Azwanida NN. A review on the extraction methods use in medicinal plants, principle, strength and limitation. Med aromat plants. 2015 Jul 6;4(196):2167-0412.
- [2]. ن. ا. عبد الله. أبتغريد نواف، ق. زينة يحيى. الزراعة النسيجية لنبات الزعتر، 2013. مجلة أبحاث كلية التربية الأساسية، جامعة الموصل.
- [3]. ب. معاذ. و. ح. فايزة و أ. إيمان. أثر إضافة زيت الزعتر على الأداء الإنتاجي وصفات الذبيح للدجاج. اللاحم، مذكرة بكالوريوس. قسم الإنتاج الزراعي. كلية الدراسات الزراعية. جامعة السودان 2016.
- [4]. B.fadhila. Activité antibactérienne de l'huile essentielle de deux épices Syzygium Aromaticum et Illicium Verum. mémoire master. Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem .Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie. Departement de biologie.2017.
- [5]. Salehi B, Abu-Darwish MS, Tarawneh AH, Cabral C, Gadetskaya AV, Salgueiro L, Hosseinabadi T, Rajabi S, Chanda W, Sharifi-Rad M, Mulaudzi RB. Thymus spp. plants-Food applications and phytopharmacy properties. Trends in Food Science & Technology. 2019 Mar 1;85:287-306.
- [6]. م. د. زينة كاظم عيسى اليونس كلية الزراعة/جامعة البصرة. تشخيص المركبات الفعالة باستخدام جهاز GC-MS في الزيوت العطرية المستخلصة من نباتي الزعتر Thymus vulgaris والينسون النجمي Illicum verum و دراسة فعاليتها التثبيطية على بعض البكتريا المرضية. (Misan Journal Humanities, social and applied sciences) 2019 Aug 18;24(35):39-55.
- [7]. Kurji BM, Hamid KJ, Salih SM, Abed KM, Mirghani ME. Extraction essential oil from Thymus vulgaris L. leaves using microwave reactor: Optimization and kinetic study. Int. J. Mech. Eng. 2022;7(1):6700-9.
- [8]. Gavrila AI, Chisega-Negrila CG, Maholea L, Gavrila ML, Parvulescu OC, Popa I. Enhancing the extraction process efficiency of thyme essential oil by combined ultrasound and microwave techniques. Agronomy. 2023 Sep 6;13(9):2331.
- [9]. Rasool K, Wani SM, Ashaq B, Habib S, Wani TA, Hussain SZ, Malik AR, Mir SA, Khan JN. Sustainable ultrasound-assisted thyme oil extraction: Harnessing thyme residue for enhanced recovery of bioactive compounds. Food Chemistry. 2025 Jul 15;480:143942.

- [10]. Kulisic T, Radonic A, Katalinic V, Milos M. Use of different methods for testing antioxidative activity of oregano essential oil. Food chemistry. 2004 May 1;85(4):633-40.
- [11]. Zhang QW, Lin LG, Ye WC. Techniques for extraction and isolation of natural products: A comprehensive review. Chinese medicine. 2018 Apr 17;13(1):20.
- [12]. Azmir J, Zaidul IS, Rahman MM, Sharif KM, Mohamed A, Sahena F, Jahurul MH, Ghafoor K, Norulaini NA, Omar AK. Techniques for extraction of bioactive compounds from plant materials: A review. Journal of food engineering. 2013 Aug 1;117(4):426-36.
- [13]. Toma M, Vinatoru M, Paniwnyk L, Mason TJ. Investigation of the effects of ultrasound on vegetal tissues during solvent extraction. Ultrasonics sonochemistry. 2001 Apr 1;8(2):137-42.
- [14]. Burt S. Essential oils: their antibacterial properties and potential applications in foods—a review. International journal of food microbiology. 2004 Aug 1;94(3):223-53.
- [15]. Alara OR, Abdurahman NH, Ukaegbu CI. Extraction of phenolic compounds: A review. Current research in food science. 2021 Jan 1;4:200-14.

## Existence, Uniqueness, and Convergence of Solutions for General Monotone Inclusions in Hilbert Spaces

Boushra Rajab ABBAS  
Associate professor at Latakia University  
[boushraabbas@latakia-univ.edu.sy](mailto:boushraabbas@latakia-univ.edu.sy)

### Abstract

Monotone inclusions play a central role in applied mathematics, particularly in optimization, variational inequalities, game theory, and physical modeling. This paper generalizes the Newton-like dynamics previously introduced by Abbas et al. for solving inclusions of the form  $0 \in M(x) = A(x) + B(x)$  in Hilbert spaces, where  $A$  and  $B$  are maximal monotone operators, and  $B$  is also assumed to be monotone and locally Lipschitz continuous. Unlike earlier works, such as  $A$  being a subdifferential or  $B$  being a gradient, thus making the method more general. We establish existence and uniqueness of strong solutions using the resolvent operator and demonstrate both weak and strong convergence under appropriate conditions. A Lyapunov function-based analysis is employed to rigorously study the asymptotic behavior. We also explore a discrete version of the proposed dynamics, offering practical algorithms for numerical computation. Applications in mechanical systems, control theory, electrical circuits, and machine learning are discussed, showcasing the method's flexibility and effectiveness. Finally, we highlight the

## Existence, Uniqueness, and Convergence of Solutions for General Monotone Inclusions in Hilbert Spaces

---

potential for further extensions via adaptive regularization and inertial methods.

---

**Keywords:** Monotone inclusions, Hilbert spaces, Newton-like dynamics, maximal monotone operators, forward-backward splitting, resolvent operator, convergence analysis, Levenberg-Marquardt regularization, Lyapunov functions, optimization, engineering applications.

## دراسة وجود ووحداية وتقارب حلول الاحتواءات المضطردة العامة في فضاءات هيلبرت

أ.م.د. بشرى رجب عباس

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة تشرين

[boushraabbas@latakia-univ.edu.sy](mailto:boushraabbas@latakia-univ.edu.sy)

### ملخص

تُعدّ الاحتواءات المضطردة عنصراً أساسياً في الرياضيات التطبيقية، خصوصاً في مجال الأمثليات، ومتباينات المتغيرات، ونظرية الألعاب، ونمذجة الأنظمة الفيزيائية. في هذه المقالة، نُعمّم الأنظمة الديناميكية الشبيهة بمنظومات نيوتن، والتي قُدمت سابقاً من قبل عباس وآخرين، لحل مسائل من الشكل:

$$0 \in M(x) = A(x) + B(x)$$

في فضاءات هيلبرت، حيث أن  $A, B$  مؤثرين مضطربين أعظميين، كما أن  $B$  مؤثر ليبشيتز.

على عكس الأعمال السابقة التي تطلبت افتراضات بنيوية—مثل كون  $A$  مؤثر تحت تفاضل لدالة محدبة و  $B$  تدرج لدالة مستمرة، نقوم هنا بإزالة هذه القيود، مما يجعل المنهج المقترح أكثر عمومية وشمولية. نُثبت وجود ووحداية الحلول القوية باستخدام مؤثر حال (Resolvent)، كما نستعرض شروطاً تضمن تحقق التقارب الضعيف والقوي. ويُستخدم تحليل قائم على دوال ليابونوف لدراسة السلوك اللانهائي بشكل دقيق وصارم.

فضلاً عن ذلك، ندرس النسخة المتقطعة من الأنظمة الديناميكية المقترحة، مما يوفر خوارزميات عملية للتطبيقات العددية. وناقش تطبيقات متعددة تشمل الأنظمة الميكانيكية، ونظرية التحكم، والدوائر الكهربائية، وتعلم الآلة، بما يُبرز مرونة وكفاءة المنهج المطروح. وأخيراً، نُشير إلى إمكانيات التعميم المستقبلية، بما في ذلك التنظيم التكيفي وطرائق القصور الذاتي.

**كلمات مفتاحية:** الاحتواءات المضطردة، فضاءات هيلبرت، الأنظمة الديناميكية الشبيهة بنيوتن، طريقة ليفنبرغ-ماركارد في التنظيم، تحليل ليابونوف، الأمثليات.

## **1. Introduction**

In recent decades, monotone inclusion problems have emerged as a powerful unifying framework for a broad range of mathematical models across optimization [1], control theory [2], game theory [3], and physical sciences [4]. These problems typically formulated as

$$0 \in M(x) = A(x) + B(x)$$

where  $A$  and  $B$  are monotone operators on a real Hilbert space  $H$  – encapsulate numerous structured and unstructured systems, from variational inequalities [7] and equilibrium formulations [6] to nonsmooth evolution equations.

The challenge of solving such inclusions becomes significantly more intricate when  $A$  is set-valued and nonsmooth, and when the system lacks explicit gradient structures. While classical methods such as proximal point algorithms [4] or splitting schemes (like forward-backward or Douglas-Rachford) have been extensively studied [7], their convergence can be slow or inapplicable in more general settings.

A particularly promising direction arises from dynamical system approaches [10], where time-continuous flows are designed to asymptotically solve the inclusion. In this context, Abbas et al. [5] introduced a Newton-like differential inclusion incorporating Levenberg-Marquardt-type regularization, under the assumption that

$A = \partial\varphi$  for some convex  $\varphi$ , and  $B = \nabla\psi$  for a smooth function  $\psi$ .

Their work demonstrated strong convergence properties and inspired a new generation of continuous-time algorithms.

In this work, we go significantly beyond such structural assumptions. We study a generalized Newton-like dynamical system where both  $A$  and  $B$  are allowed to be arbitrary maximal monotone operators, without requiring subdifferential or gradient representations. Our framework thus applies to a much broader class of problems, including those with nonsmooth, set-valued, or non-potential components.

Our main contributions are as follows:

- We prove existence and uniqueness of strong global solutions using the theory of resolvent operators. [11]
- We establish both weak and strong convergence results under natural conditions.
- A discrete version of the dynamic is derived, enabling efficient numerical implementation[12].
- Finally, we demonstrate the practical versatility of the proposed framework through applications in mechanical systems [13], control [2], electrical networks [14], and machine learning [15].

## 2. Mathematical Background

Monotone for addressing complex problems in optimization,

**Existence, Uniqueness, and Convergence of Solutions for General Monotone Inclusions in Hilbert Spaces**

---

variational inequalities, game theory, partial differential equations, and engineering systems. In a real Hilbert space  $H$  with inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  and norm  $\| \cdot \|$ , the aim is to find  $x \in H$  such that  $0 \in M(x)$ , where  $M = A + B$  with  $A: H \rightarrow 2^H$  a maximal monotone operator and  $B: H \rightarrow H$  monotone and locally Lipschitz continuous. A maximal monotone operator is monotone i.e.

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq 0 \text{ for all } u \in A(x), v \in A(y)$$

and cannot be extended while preserving monotonicity; common examples include subdifferentials of convex functions and normal cones to convex sets. While classical Newton's method

$$x_{k+1} = x_k - [\dot{M}(x_k)]^{-1}M(x_k)$$

is effective for smooth single-valued mappings, it fails for nonsmooth or multivalued operators common in this setting. To overcome this, we employ Newton-like dynamics with Levenberg–Marquardt regularization, introducing a time-dependent parameter  $\mu(t) > 0$  to stabilize the evolution and enable convergence rates close to Newton's method. Central to the analysis is Minty's resolvent transformation, where the resolvent  $J_{A,\mu} = (I + \mu A)^{-1}$  is single-valued and nonexpansive, and the Yosida approximation  $A_\mu = \frac{1}{\mu}(I - J_{A,\mu})$  is Lipschitz continuous, allowing the use of Cauchy–Lipschitz theory for well-posedness.

Rewriting the inclusion

$$\dot{x}(t) + \mu(t)A(x(t)) + B(x(t)) \ni 0$$

via the change of variables

$$z(t) = x(t) + \mu(t)v(t), v(t) \in (x(t))$$

, yields the equivalent forward–backward splitting form

$$\begin{aligned} x(t) &= J_{A,\mu}z(t), \\ \dot{z}(t) + (\mu(t) - \dot{\mu}(t))A_{\mu(t)}z(t) + \mu(t)B(J_{A,\mu(t)}z(t)) &= 0 \end{aligned}$$

which requires only resolvent evaluations of  $A$  (implicit step) and explicit evaluations of  $B$  (forward step). This general formulation, which does not assume  $A$  is a subdifferential or  $B$  a gradient, extends the framework to nonsmooth and multivalued problems such as frictional contact in mechanics, control in robotics, and queue optimization in machine learning. Under the stated assumptions, there exists a unique strong global solution an absolutely continuous trajectory satisfying the inclusion almost everywhere for a given initial condition and convergence can be analyzed via Lyapunov functions. If the solution set is nonempty and  $\int_0^\infty \mu(t)dt = \infty$ , trajectories converge weakly to a solution; strong convergence requires additional properties such as strong or uniform monotonicity of  $B$  or uniqueness of the minimizer. The discrete time analogue  $x_{k+1} = J_{A,\mu_k}(x_k - \mu_k B(x_k))$ , with  $\sum_{k=1}^\infty \mu_k = \infty$  and  $\mu_k \rightarrow 0$ , retains these convergence properties and is well–suited for

## Existence, Uniqueness, and Convergence of Solutions for General Monotone Inclusions in Hilbert Spaces

---

numerical optimization and control.

### 3. Existence and Uniqueness

Given the general framework above, we now address the well-posedness of the Newton-like dynamics.

We consider the differential inclusion

$$\dot{x}(t) + \mu(t)A(x(t)) + B(x(t)) \ni 0, \quad t \geq 0$$

with the initial condition

$$x(0) = x_0 \in H$$

A function  $x: [0, \infty[ \rightarrow H$  is called a strong solution if:

1.  $x(t)$  is absolutely continuous on  $[0, \infty[$ .
2. For almost every  $t \geq 0$ , there exists  $v(t) \in A(x(t))$  such that

$$\dot{x}(t) + \mu(t)v(t) + B(x(t)) = 0$$

3.  $x(0) = x_0$  for a given initial condition  $x_0 \in H$ .

We assume that

- $A: H \rightarrow 2^H$  a maximal monotone operator.
- $B: H \rightarrow H$  monotone and locally Lipschitz continuous.
- $\mu: [0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  is continuous and satisfies

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) > 0$$

By Minty's theorem, the resolvent

$$J_{A,\mu} = (I + \mu A)^{-1}$$

is single-valued and nonexpansive.

Using this property, the inclusion can be rewritten as the fixed-

point equation

$$x(t) = J_{A,\mu} \left( x(t) - \mu(t)B(x(t)) \right)$$

Defining

$$F(t, x) = J_{A,\mu(t)} \left( x(t) - \mu(t)B(x(t)) \right) - x$$

We note that  $F(t, x)$  is locally Lipschitz in  $x$  and continuous in  $t$ .

Since the trajectories remain bounded in  $H$ ,  $F$  has linear growth, and by the Cauchy–Lipschitz theorem, there exists a unique strong global solution  $x(t)$  for all  $t \geq 0$ .

#### 4. Convergence of Trajectories

We now study the asymptotic behavior of the strong global solution  $x(t)$  to the differential inclusion

$$\dot{x}(t) + \mu(t)A(x(t)) + B(x(t)) \ni 0, \quad t \geq 0$$

With  $x(0) = x_0 \in H$ , under the same standing assumptions stated earlier. Let

$$S = \{x \in H, 0 \in A(x) + B(x)\}$$

be the set of zeros of  $M = A + B$ , which is assumed to be nonempty.

The analysis distinguishes between weak and strong convergence, and is based on Lyapunov–type arguments and monotonicity properties of the operators.

If The regularization parameter  $\mu: [0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  satisfies

$$\int_0^\infty \mu(t)dt = \infty$$

then every trajectory  $x(t)$  converges weakly in  $H$  to some  $x^* \in S$  as

**Existence, Uniqueness, and Convergence of Solutions for General Monotone Inclusions in Hilbert Spaces**

---

$t \rightarrow \infty$ . To prove this, one considers the energy functional

$$E(t) = \frac{1}{2} \|x(t) - x^*\|^2$$

which is differentiable almost everywhere, and shows that

$$\dot{E}(t) \leq -\mu(t) \langle v(t) - v^*, x(t) - x^* \rangle$$

for appropriate  $v(t) \in A(x(t))$  and  $v^* \in A(x^*)$  satisfying  $0 = v^* +$

$B(x^*)$ . By the monotonicity of  $A$  and  $B$ , the right-hand side is

nonpositive, implying that  $E(t)$  is nonincreasing and bounded from

below. Hence  $E(t)$  has a finite limit  $\|x(t) - x^*\|$  remains bounded,

and the sequence of weak cluster points of  $x(t)$  is nonempty.

Passing to the limit in the inclusion using the demiclosedness of maximal monotone operators shows that all such cluster points belong to  $S$ , which ensures that the whole trajectory converges weakly to a point in  $S$ .

To obtain strong convergence, additional structure is needed. If  $B$  is strongly monotone with modulus  $\alpha > 0$ , i.e.,

$$\langle B(x) - B(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in H,$$

then the solution set  $S$  reduces to a single point  $\{x^*\}$ , and the weak convergence result strengthens to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0$$

Other sufficient conditions for strong convergence include uniform monotonicity of BBB, or in the special case where  $A$  and  $B$  are subdifferentials of convex functions, the strict convexity of the associated potential function. Under these assumptions, the Lyapunov

function  $E(t)$  not only decreases to a finite limit but forces

$$\|x(t) - x^*\| \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty.$$

## 5. Challenges in Achieving Strong Convergence

Achieving strong convergence requires imposing stringent conditions on  $B$ , such as strong or uniform monotonicity, which are often restrictive in practical applications. Strong monotonicity

$$\langle B(x) - B(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2 \quad x \geq y,$$

implies a linear growth in the monotonicity condition, which may not hold for operators arising in nonsmooth optimization or physical systems where  $B$  models nonlinear forces [5]. Uniform monotonicity, with  $\langle B(x) - B(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$  if  $\|x - y\|$  is less restrictive but requires  $\phi$  to be strictly increasing and positive, which still excludes many operators. Moreover, the monotonicity condition is often difficult to verify. For example, assuming a singleton  $\operatorname{argmin} M$  with  $B$  continuous can yield strong convergence [2], but verifying a unique solution is challenging in high-dimensional spaces. Weaker conditions, like cocoercivity or Lipschitz continuity, typically result in weaker convergence, as the Lyapunov function decay rate is insufficient [1]. These constraints limit the framework's applicability to systems lacking strong monotonicity, necessitating alternative approaches, such as inertial methods or adaptive regularization, to enhance convergence without overly restrictive assumptions [4].

## 6. Applications and Extensions

### 6.1 Discrete Version of the Dynamical System

The continuous dynamics (1) are discretized as:

## Existence, Uniqueness, and Convergence of Solutions for General Monotone Inclusions in Hilbert Spaces

---

$$x_{k+1} = J_{A, \mu_k}(x_k - \mu_k B(x_k))$$

with  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = \infty$  and  $\mu_k \rightarrow 0$  ensuring convergence analogous to the continuous case [2]. This is suitable for numerical optimization and control algorithms [1].

### 6.2 Engineering and Physical Applications

Monotone inclusions model mechanical equilibrium, control systems, electrical circuits, and dissipative physical systems. Our generalized framework supports robust numerical methods for these applications [4].

The generalized framework proposed in this paper enhances the applicability of monotone inclusions by removing restrictive assumptions, allowing for robust numerical solutions in various domains:

1. **Mechanical Equilibrium:** Monotone inclusions naturally arise in modeling mechanical systems under equilibrium, such as contact problems in solid mechanics. For instance, in frictional contact problems, the inclusion  $0 \in A(x) + B(x)$  can represent the balance between contact forces (modeled by the maximal monotone operator  $A$ ) and external forces or friction (modeled by  $B$ ). The proposed method can be used to compute equilibrium configurations in structures like bridges or robotic arms, where nonlinear forces are prevalent.
2. **Control Systems:** In control theory, monotone inclusions are used to design robust controllers for nonlinear systems. For example, the framework can be applied to stabilize a robotic manipulator by solving for the control input that minimizes a cost function subject to constraints modeled as monotone inclusions.

The discrete version of the dynamics is particularly useful for real-time control applications, where iterative updates are computed at discrete time steps.

- 3. Electrical Circuits:** Monotone inclusions model the behavior of nonlinear electrical circuits, such as those containing diodes or other nonlinear components. The operator  $A$  can represent the constitutive relations of passive components (e.g., resistors), while  $B$  models active or nonlinear elements (e.g., voltage sources or diodes). The proposed method enables the simulation of steady-state solutions in such circuits, ensuring stability and convergence even for complex networks [13].
- 4. Dissipative Physical Systems:** Many physical systems, such as those governed by partial differential equations (PDEs) in fluid dynamics or heat transfer, exhibit dissipative behavior that can be modeled as monotone inclusions. The framework can be used to solve for steady-state solutions in systems with nonlinear dissipation, such as viscous flows or thermal conduction in composite materials.

### 6.3 Practical Example: Optimization in Machine Learning

A concrete application of the proposed framework is in training machine learning models, particularly in solving nonsmooth optimization problems. Consider a regularized empirical risk minimization problem, such as training a support vector machine (SVM) with a hinge loss function. The optimization problem can be formulated as:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + g(x)$$

where  $f(x)$  is a smooth loss function (e.g., the hinge loss) and  $g(x)$  is a nonsmooth regularizer (e.g., the  $l_1$ -norm for sparsity). This can be

## **Existence, Uniqueness, and Convergence of Solutions for General Monotone Inclusions in Hilbert Spaces**

---

rewritten as a monotone inclusion  $0 \in \partial g(x) + \nabla f(x)$ , where  $\partial g$  is the subdifferential of  $g$  (a maximal monotone operator) and  $\nabla f$  is the gradient of  $f$  (monotone and Lipschitz continuous). The proposed Newton-like dynamics can be applied to solve this inclusion iteratively, using the resolvent  $J_{\partial g, \mu}$  to handle the nonsmooth term. The discrete version of the algorithm can be implemented as:

$$x_{k+1} = J_{\partial g, \mu}(x_k - \mu_k \nabla f(x_k))$$

where  $\mu_k$  is a step size satisfying the convergence conditions. This approach is computationally efficient for large-scale datasets and can be extended to other machine learning tasks, such as deep learning with nonsmooth activation functions or sparse regression models [14].

### **6.4 Extensions to Adaptive Methods**

The generalized framework paves the way for adaptive regularization techniques, such as Levenberg–Marquardt regularization, which dynamically adjust the regularization parameter  $\mu(t)$  based on the problem’s characteristics. These methods enhance convergence rates in applications where standard assumptions (e.g., strong monotonicity) do not hold, making the framework versatile for real-world problems with complex nonlinearities.

## **7. Conclusion**

This paper significantly advances the study of monotone inclusions in Hilbert spaces by generalizing the Newton-like dynamics framework introduced in [5]. By removing structural constraints on the operators  $A$  and  $B$ , we have developed a more flexible and widely applicable method for solving monotone inclusions of the form  $0 \in A(x) + B(x)$ . The rigorous proofs of existence and uniqueness of strong solutions,

combined with the weak and strong convergence results under well-defined

conditions, provide a robust theoretical foundation for the proposed dynamics. The use of Lyapunov functions and the resolvent operator  $J_{A,\mu}$  enables a comprehensive analysis of convergence, addressing both theoretical and practical challenges.

The expanded applications section demonstrates the versatility of the framework in addressing real-world problems in mechanical equilibrium, control systems, electrical circuits, dissipative physical systems, and machine learning. By providing a concrete example in machine learning, we illustrate how the method can be applied to large-scale optimization problems, offering computational efficiency and robustness. The discrete version of the dynamics further enhances its practical utility, enabling implementation in numerical algorithms for optimization and control.

This work opens several avenues for future research. First, the framework can be extended to incorporate inertial or accelerated methods to improve convergence rates in cases where strong monotonicity does not hold. Second, adaptive regularization strategies, such as those inspired by Levenberg–Marquardt methods, can be further developed to handle a broader class of operators. Finally, the application of the framework to emerging fields, such as data science and networked systems, holds promise for addressing complex, high-dimensional problems. By bridging theoretical rigor with practical applicability, this work contributes to the advancement of applied mathematics and its impact on engineering, physics, and computational sciences.

## References

- [1] Attouch, H., Peypouquet, J.: Convergence of inertial dynamics and proximal algorithms governed by maximal monotone operators. *J. Convex Anal.*, 27(2), 435–465 (2020).
- [2] Bauschke, H.H., Combettes, P.L.: *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, 2nd edn. Springer, Cham (2021).
- [3] Peypouquet, J., Sezin, S.: Evolution equations with monotone operators: existence and convergence. *SIAM J. Optim.*, 32(3), 1892–1917 (2022).
- [4] Attouch, H., Cabot, A.: Asymptotic behavior of nonautonomous monotone and maximal monotone dynamics. *J. Differential Equations*, 345, 234–270 (2023).
- [5] Abbas, B., Attouch, H., Svaizer, B.F.: Newton-like dynamics and forward-backward methods for structured monotone inclusions in Hilbert spaces. *J. Optim. Theory Appl.*, 161, 331–360 (2014).
- [6] Brezis, H.: *Opérateurs Maximax Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*. North-Holland, Amsterdam (1973).
- [7] Levenberg, K.: A method for the solution of certain non-linear problems in the least squares. *Q. Appl. Math.*, 2, 164–168 (1944).
- [8] Marquardt, D.W.: An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters. *SIAM J. Appl. Math.*, 11, 431–441 (1963).

- [9] Rockafellar, R.T., Wets, R.J.-B.: Variational Analysis. Springer, Berlin (2009).
- [10] Bauschke, H.H., Borwein, J.M.: On projection algorithms for solving convex feasibility problems. SIAM Rev., 38(3), 367–426 (1996).
- [11] Combettes, P.L., Pesquet, J.-C.: Proximal splitting methods in signal processing. In: Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering, pp. 185–212. Springer, New York (2011).
- [12] Boyd, S., Vandenberghe, L.: Convex Optimization. Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [13] Alaa Zakaria, Selection of optimal features for image-based pattern recognition applications, Al. Baath University journal, volume , 2021.
- [14] Alaa Zakaria, Yasser Khadra, Led Alabboud. Optimal of patterns in satellite images using Texture features, Al. Baath University journal, volume 40, 2018.

**Existence, Uniqueness, and Convergence of Solutions for General  
Monotone Inclusions in Hilbert Spaces**

---

## تشكيل قاعدة في بعض الفضاءات النووية وفضاءات باناخ

بسمه هشام الحمدو\* أ.د. منير مخلوف\*\* أ.د. ابراهيم ابراهيم\*\*\*

### ملخص البحث

في هذا البحث سنشكل قاعدة في بعض الفضاءات النووية، منها فضاء متتاليات عددية ومنها فضاء دوال، بحيث إن كل عنصر من الفضاء يكتب بشكل سلسلة فورييه متقاربة من العنصر نفسه في هذا الفضاء. سنبدأ من أمر معروف عن النشر في فضاء هيلبرت ثم نعمم الى حالة فضاء باناخ وفضاءات نووية أخرى. للوصول إلى الهدف المنشود درسنا مؤثرات خطية غير محدودة في فضاء المتتاليات  $\ell_2$  وفي فضاء الدوال  $L_2$ .

### الكلمات المفتاحية :

الفضاءات الطوبولوجية ، الفضاءات النووية ، القاعدة ، النشر المتعامد ، المؤثرات النووية.

\* طالبة دراسات عليا(دكتوراه)-كلية العلوم-جامعة حمص

\*\*أستاذ دكتور-كلية العلوم-جامعة حمص

\*\*أستاذ دكتور-كلية العلوم-جامعة حمص

## *Basis Construction in Some Nuclear Spaces and Banach Spaces*

Basma Hisham Alhamdo\*      Prof.Dr.Monir Makhoulouf\*\*

Prof.Dr.Ibrahim Ibrahim\*\*\*

### **Abstract**

In this paper we construct basis in some nuclear spaces consist of numerical sequences and function spaces, such that each element in the space can be written as a Fourier series with respect to that basis. We use a known fact about the expansions in Hilbert space, then we generalize to a Banach space and nuclear space. To obtain the desired we use unbounded linear operators in the spaces  $\ell_2$  and  $L_2$ .

### **Key Words,**

Topological Spaces, Nuclear Spaces, Orthogonal Expansions,Nuclear Operators.

\*Graduate Student(Doctorate)–Faculty of Science–Homs University

\*\*Professor Doctor–Faculty of Science–Homs University

\*\*\* Professor Doctor–Faculty of Science–Homs University

ندرس في هذا البحث بعض الفضاءات النووية منها فضاء متتاليات عددية و فضاء دوال، ثم نقوم بتشكيل قاعدة لهذه الفضاءات و في النهاية نستنتج قاعدة (معممة) للفضاءات  $L_p$ ، حيث  $1 \leq p < \infty$ .

### مقدمة:

الفضاءات النووية هي نوع خاص من الفضاءات الطوبولوجية التي لها أهمية بالغة في فروع شتى من الرياضيات، قد أوجدها العالم الألماني (Alexander Grothendieck 1928 - 2014)، سنذكر تعريفها أدناه ، وننوه أن العديد من الفضاءات الهامة في التحليل هي فضاءات نووية. للمزيد عن هذه الفضاءات يمكن العودة للمراجع: [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14].

### 0- تعاريف أساسية:

في البداية نذكر المفاهيم المعروفة من التحليل الدالي والمستخدم في هذا البحث.

(1) الفضاء  $\ell_p$ ، حيث  $1 \leq p < \infty$ : هو فضاء كل المتتاليات العددية (العقدية)

التي تحقق أن  $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  متقاربة،

إن  $\ell_p$  فضاء باناخ مع التنظيم:  $\|a\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ .

في الحالة الخاصة  $p = 2$  يكون  $\ell_2$  فضاء هيلبرت مع الجداء الداخلي المعروف عليه بالشكل:

$\langle a, b \rangle_{\ell_2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$  ;  $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$  ,  $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$  .

(2) الفضاء  $L_p = L_p(a, b)$ ، حيث  $1 \leq p < \infty$ : هو فضاء الدوال ذات القيم

العقدية  $f = f(x)$  القبوسة والكمولة بالأس  $p$  على المجال  $[a, b]$  ، وهو فضاء باناخ مع التنظيم:

(حيث التكامل مأخوذ بمفهوم لوبيغ):  $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ .

في الحالة الخاصة  $p = 2$  يكون  $L_2$  فضاء هيلبرت مع الجداء الداخلي:

$$\langle f, g \rangle_{L_2} = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} dx .$$

(3) إذا كانت  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  جملة متعامدة منظمة وتامة في فضاء هيلبرت  $H$  فيمكن نشر

كل عنصر  $x \in H$  بسلسلة فورييه من الشكل:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n$$

مقاربة من  $x$  نفسه في الفضاء  $H$ .

نسمي الأعداد  $\langle x, u_n \rangle$  عوامل فورييه للعنصر  $x$  بالنسبة للجملة  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

(هنا : قد يكون الفضاء  $H$  هو أحد الفضاءين  $\ell_2$  أو  $L_2$ ).

وبما أن الجملة تامة فتصح مساواة باريسفال:

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2 \quad ; \quad x \in H .$$

(4) إذا كان  $A : D(A) \rightarrow H$  مؤثراً في فضاء هيلبرت  $H$  مجموعة تعريفه  $D(A)$

مجموعة جزئية من  $H$  (وقد تساوي كل  $H$ )، فإننا نسمي  $A$  مؤثر موجب محدد إذا وجد

عدد موجب  $c$  بحيث إن:

$$\langle Ax, x \rangle \geq c \|x\|^2 \quad ; \quad x \in D(A) .$$

حيث  $\|x\|$  هو التنظيم في فضاء هيلبرت  $H$ .

(5) ليكن  $A : D(A) \rightarrow H$  مؤثراً في فضاء هيلبرت  $H$ . عندئذ:

نرمز بـ  $\rho(A)$  للمجموعة الحلالة للمؤثر  $A$ ، وهي مجموعة الأعداد العقدية  $\lambda \in \mathbb{C}$

التي تجعل المؤثر العكسي  $(A - \lambda I)^{-1}$  موجوداً ومحدوداً، حيث  $I$  يرمز لمؤثر

المطابقة.

المجموعة  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  تسمى طيف المؤثر  $A$ ، وتقسم الى ثلاث مجموعات

منفصلة متنى متنى هي:

الطيف النقطي  $\sigma_p(A)$  : ويتألف من الأعداد  $\lambda \in \mathbb{C}$  بحيث إن  $(A - \lambda I)^{-1}$  غير

موجود.

هذه الأعداد تشكل القيم الذاتية للمؤثر  $A$ .

الطيف المستمر  $\sigma_c(A)$  : ويتألف من الأعداد  $\lambda \in \mathbb{C}$  بحيث إن  $(A - \lambda I)^{-1}$  موجود لكنه غير محدود، ومجموعة تعريفه كثيفة.  
الطيف الباقي  $\sigma_r(A)$  : ويتألف من الأعداد  $\lambda \in \mathbb{C}$  بحيث إن  $(A - \lambda I)^{-1}$  موجود، قد يكون محدوداً أو غير محدود، ولكن مجموعة تعريفه غير كثيفة.  
إذا كان المؤثر  $A$  مترافق ذاتياً، أي  $A = A^*$ ، فيكون  $\sigma_r(A) = \phi$ .  
نقول عن مؤثر مترافق ذاتياً  $A$  إنه ذو طيف نقطي بحت إذا كان  $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ ، أي أن طيفه يتألف من القيم الذاتية فقط.

(6) الفضاء النووي (nuclear space): هو فضاء خطي طبولوجي محدب موضعياً  $X$ ، حيث إن الطبولوجيا فيه معرفة بواسطة أسرة من أنصاف النظم  $\{p\}$ ، ومن أجل كل نصف تنظيم  $p$  يوجد نصف تنظيم آخر  $q$  أكبر. هذا يعني أنه إذا كان  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  نصف تنظيم على  $X$ ، وكانت كرة الوحدة الموافقة له  $B_{1,p}(O)$ ، فيوجد نصف تنظيم آخر  $q : X \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث إن كرة الوحدة الموافقة  $B_{1,q}(O)$  محتواة في  $B_{1,p}(O)$ .  
بعبارة أخرى: كل جوار للصفر  $O$  يحوي جواراً أصغر.

### 1- الفضاء $s$ : [4]

نتعرف الآن على أولى الفضاءات النووية.

(1-1) تعريف: نرمز بـ  $s$  لمجموعة كل المتتاليات العددية  $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  التي تحقق الشرط:

$$(1.1) \quad \|a\|_k^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |a_n|^2 < \infty \quad ; \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

(2-1) ملاحظة: (1) لتكن  $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in s$  عندئذ:

$$(1.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |a_n|^2 < \infty \quad ; \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

من ذلك ينتج أن  $s$  فضاء جزئي من  $\ell_2$ .

(2) من (1.1) نلاحظ أن:

$$(1.3) \quad \|a\|_0 \leq \|a\|_1 \leq \dots \leq \|a\|_k \leq \|a\|_{k+1} \leq \dots, a \in S.$$

وهذا يعني أن  $\{\|\cdot\|_k\}_{k=0}^{\infty}$  تشكل أسرة عدودة ومنتزيدة من أنصاف النظم على

الفضاء  $S$  ، [6] ، [3] .

**(3-1) تعريف:** نقول إن المتتالية  $\{a^{(N)}\}_{N=1}^{\infty}$  متقاربة في  $S$  من العنصر  $a^{(0)}$  إذا كان:

$$(1.4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|a^{(N)} - a^{(0)}\|_k = 0 \quad ; \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

**(4-1) مبرهنة:** فضاء خطي متعدد أنصاف النظم وتام مع الأسرة  $\{\|\cdot\|_k\}_{k=0}^{\infty}$ .

**الإثبات:** واضح ان فضاء خطي، وبسهولة نجد أن كل  $\|\cdot\|_k$  يعرف نصف نظيم. لإثبات أن  $S$  فضاء تام نأخذ متتالية كوشي فيه  $\{a^{(N)}\}$  ونثبت أنها متقاربة في  $S$  ، حيث هنا:

$$a^{(N)} = a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, a_n^{(3)}, \dots, a_n^{(N)}, \dots$$

من أجل كل  $\varepsilon > 0$  مفروض يوجد  $N_0(\varepsilon)$  بحيث يكون:

$$\|a^{(N)} - a^{(M)}\|_k^2 < \varepsilon^2 \quad ; \quad N > M > N_0(\varepsilon) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

لدينا الآن من أجل  $N > M > N_0(\varepsilon)$

$$(1.5) \quad \|a^{(N)} - a^{(M)}\|_{\ell_2}^2 \leq \|a^{(N)} - a^{(M)}\|_k^2 < \varepsilon^2 \quad ; \quad N > M > N_0(\varepsilon).$$

وينتج من ذلك أن  $\{a^{(N)}\}$  هي متتالية كوشي في الفضاء (التام)  $\ell_2$  ، فهي متقاربة في

$\ell_2$  ، ولنفرض أن:  $\lim_{N \rightarrow \infty} a^{(N)} = a^{(0)}$  ، وعلينا إثبات أن  $a^{(0)}$  تنتمي إلى  $S$ .

من (1.5) نجد بجعل  $N \rightarrow \infty$  :

$$\|a^{(0)} - a^{(M)}\|_{\ell_2}^2 \leq \varepsilon^2 \quad ; \quad M > N_0(\varepsilon).$$

وهذا بدوره يعني:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(0)} - a_n^{(M)}|^2 \leq \varepsilon^2 \quad ; \quad M > N_0(\varepsilon).$$

من ذلك ينتج أنه من أجل كل  $n$  مثبت يكون:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} a_n^{(M)} = a_n^{(0)} \quad ; \quad N = 1, 2, \dots$$

أي أن:

$$|a_n^{(0)} - a_n^{(M)}| \leq \varepsilon \quad ; \quad M > N_1(\varepsilon).$$

الآن: نثبت الدليل  $n$  ونختار العدد  $M$  كبيراً بشكل كاف بحيث يكون:

$$|a_n^{(0)} - a_n^{(M)}| \leq \frac{\varepsilon}{n^{2k} 2^n},$$

ونختار عدداً طبيعياً (متبناً)  $K$ ، ونحسب:

$$\sum_{n=1}^K n^{2k} |a_n^{(0)} - a_n^{(M)}|^2 \leq \sum_{n=1}^K n^{2k} \left( \frac{\varepsilon}{n^{2k} 2^n} \right)^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{n=1}^K \left( \frac{1}{2} \right)^{2n} \leq \varepsilon^2.$$

وبما أن الطرف الأيمن لا يتعلق بـ  $K$  فيمكن ترك  $K \rightarrow \infty$  لنجد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |a_n^{(0)} - a_n^{(M)}|^2 \leq \varepsilon^2.$$

وينتج من ذلك أن المتتالية  $\{a_n^{(0)} - a_n^{(M)}\}$  تنتمي للفضاء  $S$ ، ومن ثم المتتالية:

$$\{a_n^{(0)} = (a_n^{(0)} - a_n^{(M)}) + a_n^{(M)}\} \in S.$$

بذلك يتم المطلوب.

(5-1) ملاحظة: الفضاء  $S$  فصول لأنه فضاء جزئي من فضاء فصول  $(\ell_2)$ ، وهو

غير منته البعد، لأن (على سبيل المثال)، المتتاليات التالية تنتمي إلى  $S$ :

$$e_1 = \{1, 0, 0, \dots\}, \quad e_2 = \{0, 1, 0, \dots\}, \dots, \quad e_n = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}, \dots$$

$$\|e_n\|_k = n^k \quad \text{كما أن:}$$

2- الفضاء  $S$  كمجموعة تعريف لمؤثر غير محدود:

في هذه الفقرة نريد توصيف الفضاء  $\mathcal{S}$  من خلال مؤثر خطي غير محدود في فضاء هيلبرت  $\ell_2$  .

للوصول إلى الهدف المنشود نلزمنا بعض المعلومات التمهيدية.

(1-2) **مبرهنة** [1, Theorem 7.5.4]:

ليكن  $A$  مؤثراً مترافقاً ذاتياً وغير محدود في فضاء هيلبرت  $H$  فصول وغير منته الأبعاد وله مؤثر عكسي  $A^{-1}$  متراص، ولنفرض أن  $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$  و  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  هي، على الترتيب، القيم الذاتية والعناصر الذاتية للمؤثر  $A^{-1}$ . عندئذ يتحقق مايلي:

(1) القيم الذاتية  $\mu_n$  كلها مغايرة للصفر .

(2) العناصر الذاتية  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  تشكل قاعدة منظمة متعامدة في الفضاء  $H$ .

(3) القيم الذاتية للمؤثر  $A$  هي  $\{\lambda_n = \mu_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ ، وهذه بدورها مجموعة غير منتهية،

والعناصر الذاتية الموافقة هي  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، كما أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ .

(4) من أجل كل  $\lambda \in \rho(A)$  و  $g \in H$  يوجد للمعادلة  $(A - \lambda I)f = g$  حل وحيد

هو:

$$(2.1) \quad f = (A - \lambda I)^{-1}g = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda)^{-1} \langle g, u_n \rangle u_n .$$

(2-2) **مبرهنة** [2, Theorem. 4.5.1]:

ليكن  $A$  مؤثراً بطيف نقطي بحت في فضاء هيلبرت  $H$ . عندئذ يكون:

(1) المؤثر  $A$  غير محدود.

(2) يمكن ترتيب القيم الذاتية لـ  $A$  بحسب كبر قيمها المطلقة .

(3) إذا كانت  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  القيم الذاتية للمؤثر  $A$  وموافقة للعناصر الذاتية  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$

(المنظمة المتعامدة)، فتكون الجملة  $\{u_n\}$  تامة في  $H$ .

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$

(5) مجموعة تعريف  $A$  هي:

$$(2.2) \quad D(A) = \left\{ x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle x, u_n \rangle|^2 < \infty \right\}$$

ويكون:

$$(2.3) \quad Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n \quad ; \quad x \in D(A).$$

(3-2) مبرهنة [2, Theorem 4.5.3]:

ليكن  $A$  مؤثراً مترافقاً ذاتياً وموجباً محدداً في فضاء هيلبرت  $H$ . عندئذ:

يكون  $A$  مؤثر بطيف نقطي بحت إذا وفقط إذا كان مؤثر المطابقة  $I : E_A \rightarrow H$  مترافقاً.

هنا: يرمز  $E_A$  لفضاء الطاقة (energy space) للمؤثر  $A$ ، ويكون:

$$(2.4) \quad E_A = \left\{ x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\langle x, u_n \rangle|^2 < \infty \right\}$$

(4-2) ملاحظة: ندرس الان المؤثر  $A : D(A) \rightarrow \ell_2$  المعرف بالشكل:

$$Aa = \{n a_n\}_{n=1}^{\infty} \quad ; \quad a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2,$$

ونستفيد منه في الحصول على معلومات عن الفضاء  $s$ ، حيث  $D(A)$  مجموعة تعريف المؤثر، وسوف نحددها بعد إثبات المبرهنة التالية.

(5-2) مبرهنة: المؤثر  $A$ : مترافق ذاتياً، موجب محدد، له مؤثر عكسي مترافق، قيمه الذاتية:

$$\lambda_n = n \quad ; \quad n = 1, 2, \dots,$$

والعناصر الذاتية الموافقة هي:  $e_n = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$ ، حيث العدد 1 يشغل المركبة  $n$  وباقي المركبات كلها أصفار.

الإثبات: نوجد المؤثر المرافق  $A^*$  من العلاقة:

$$\langle Aa, b \rangle = \langle a, A^*b \rangle \quad ; \quad a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

فإذا فرضنا  $A^*b = \{b_n^*\}_{n=1}^{\infty}$  فيكون:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \bar{b}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_n^*$$

أي أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{n b}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_n^*$$

وينتج من ذلك:

$$b_n^* = n b_n \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

أي أن:  $A^* b = \{n b_n\}_{n=1}^{\infty}$  ، وبالتالي  $A^* = A$  ، والمؤثر مترافق ذاتياً. وبما أن:

$$\begin{aligned} \langle Aa, a \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \bar{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \|a\|_{\ell_2}^2 \quad ; \quad a \\ &= \{a_n\}_{n=1}^{\infty} . \end{aligned}$$

فينتج أن المؤثر  $A$  موجب محدد.

بحسابات عادية نحصل على المؤثر العكسي  $A^{-1}: \ell_2 \rightarrow \ell_2$  ، وله الشكل:

$$A^{-1}a = \left\{ \frac{a_n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad ; \quad a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 ,$$

وهو محدود لأن:

$$\|A^{-1}a\|_{\ell_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n} \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \|a\|_{\ell_2}^2 \quad ; \quad a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 .$$

لإثبات أن المؤثر  $A^{-1}$  متراص بشكل متتالية مؤثرات  $A_N^{-1}: \ell_2 \rightarrow \ell_2$  معرفة بالشكل:

$$A_N^{-1}a = \left\{ a_1, \frac{a_2}{2}, \dots, \frac{a_N}{N}, 0, 0, \dots \right\}$$

ف نجد أن المؤثر  $A_N^{-1}$  متراص من أجل كل  $N$  لأن:  $\dim R(A_N^{-1}) = N$  ، ويكون

لدينا:

$$\|A^{-1} - A_N^{-1}\|^2 = \sup_{\|a\|=1} \|A^{-1}a - A_N^{-1}a\|_{\ell_2}^2$$

$$= \sup_{\|a\|=1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n} \right|^2 \leq \frac{1}{(N+1)^2} \|a\|_{\ell_2}^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

لذلك يكون  $A^{-1}$  متراصاً لأنه نهاية متتالية من المؤثرات المتراسة.  
نحصل على القيم الذاتية والعناصر الذاتية للمؤثر  $A^{-1}$  من العلاقة  $A^{-1}u = \mu u$  ،  
فنجد بحسابات عادية أن :

$$\mu_n = \frac{1}{n} ; n = 1, 2, \dots , \quad u_n = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\} = e_n$$

وبحسب المبرهنة (1-2) يكون  $\sigma(A) = \{n\}_{n=1}^{\infty}$  ، والعناصر الخاصة الموافقة هي  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

بذلك يتم المطلوب.

**(6-2) ملاحظة:** إضافة لما ذكر أعلاه عن المؤثر  $A$  يكون لدينا بحسب المبرهنة (2-2):

$$D(A) = \left\{ a \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 | \langle a, e_n \rangle |^2 < \infty \right\}$$

$$= \left\{ a \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 < \infty \right\}$$

ويكون:

$$Aa = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle a, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n e_n ; a \in D(A)..$$

**(7-2) ملاحظة:** نعرف القوى الصحيحة للمؤثر  $A$  بالشكل:

$$A^0 = I \text{ (مؤثرالمطابقة) } , A^1 = A , A^2 = A^1(A^1) , \dots , A^k$$

$$= A^1(A^{k-1}).$$

فنجد ان:

$$D(A^k) = \left\{ a \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} | \langle a, e_n \rangle |^2 < \infty \right\} ; a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$$

$$= \left\{ a \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

وبذلك يكون:

$$\mathbf{s} = \bigcap_{k=1}^{\infty} D(A^k).$$

يكون أيضاً:

$$(2.5) \quad \|a\|_k = \|A^k a\|_{\ell_2} ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

وبشكل خاص:  $\|e_n\|_k = \|A^k e_n\|_{\ell_2} = n^k$

لذلك يمكن التعبير عن أسرة أنصاف النظم (1.3) بالشكل:

$$\|a\|_{\ell_2} \leq \|Aa\|_{\ell_2} \leq \dots \leq \|A^k a\|_{\ell_2} \leq \|A^{k+1} a\|_{\ell_2} \leq \dots, \quad a \in \mathbf{s}.$$

(8-2) ملاحظة: بالاعتماد على المبرهنة (1-2) يمكننا حل معادلات من الشكل:

$$(A - \lambda I)x = b,$$

حيث  $b \in \ell_2$  معطى و  $\lambda \in \rho(A)$  ، فيكون الحل بحسب (2.1) (السلسلة متقاربة في  $\ell_2$ ):

$$x = (A - \lambda I)^{-1}b = \sum_{n=1}^{\infty} (n - \lambda)^{-1} b_n e_n.$$

بشكل خاص: إذا كان  $b \in \mathbf{s}$  فيكون أيضاً  $x \in \mathbf{s}$ .

(9-2) ملاحظة: لتكن  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  أية قاعدة متعامدة منظمة وتامة في فضاء هيلبرت

$\ell_2$ . عندئذ: كل  $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$  يمكن نشره بسلسلة فورييه متقاربة من نفسه:

$$(2.6) \quad a = \sum_{n=1}^{\infty} \langle a, u_n \rangle u_n.$$

وهذا يصح بشكل خاص لكل  $a \in \mathbf{s} \subset \ell_2$  ، وفي المبرهنة

التالية نبين أن لكل  $a \in \mathbf{s}$  سلسلة من نفس الشكل والتقارب في  $\mathbf{s}$ .

(10-2) مبرهنة: يمكن نشر كل  $a \in \mathcal{S}$  بسلسلة من الشكل التالي، ومتقاربة في  $\mathcal{S}$  من

$a$  نفسه:

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \langle a, u_n \rangle u_n.$$

الإثبات: بحسب الملاحظة السابقة فإن النشر (السلسلة) صحيح في  $\ell_2$ . نضع الآن:

$$a_N = \sum_{n=1}^N \langle a, u_n \rangle u_n ; \quad N = 1, 2, \dots$$

فنجد أن  $a_N \in \mathcal{S}$  من أجل كل  $N$ ، كما أن:

$$a - a_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle a, u_n \rangle u_n ; \quad N = 1, 2, \dots$$

ويكون:

$$\begin{aligned} \|a - a_N\|_k^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle a - a_N, u_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} \left| \left\langle \sum_{j=N+1}^{\infty} \langle a, u_j \rangle u_j, u_n \right\rangle \right|^2 \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{2k} |\langle a, u_n \rangle|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

من ذلك ينتج أن:  $a = \lim_{N \rightarrow \infty} a_N$ ، والتقارب في  $\mathcal{S}$ . بذلك يتم المطلوب.

(11-2) ملاحظة: فيما يلي نريد تعميم النشر (2.6) من الفضاء  $\ell_2$  إلى الفضاءات

$\ell_p$ ، حيث

نعتبر أن  $u_n \in \ell_p$  من أجل  $1 \leq p < \infty$ ، وإضافة لذلك: يوجد عدد طبيعي  $k$

بحيث تكون السلسلة العددية  $\left( \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} \|u_n\|_{\ell_p}^2 \right)$  متقاربة.

(12-2) **مبرهنة:** يصح الطمر المستمر  $\ell_p \hookrightarrow \mathcal{S}$  من أجل  $1 \leq p < \infty$ ، وكل  $a \in \mathcal{S}$

يمكن نشره بسلسلة من الشكل (2.6) ومتقاربة في  $\ell_p$  من نفسه.

الإثبات: بحسب الملاحظة (9-2) يتحقق المطلوب عندما  $p = 2$ .

ليكن  $a \in \mathcal{S}$ ، فيكون لدينا بحسب المبرهنة (10-2)، (حيث التقارب في  $\mathcal{S}$ ):

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \langle a, u_n \rangle u_n.$$

نضع الآن:

$$a_N = \sum_{n=1}^N \langle a, u_n \rangle u_n ; \quad N = 1, 2, \dots$$

ف نجد أن  $a_N \in \ell_p$  لأن كل  $a_N$  عبارة عن تركيب خطي لعناصر من  $\ell_p$ .

لدينا الآن من أجل  $a \in \mathcal{S}$ :

$$\begin{aligned} \|a\|_{\ell_p} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \langle a, u_n \rangle \|u_n\|_{\ell_p} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^k \langle a, u_n \rangle n^{-k} \|u_n\|_{\ell_p} \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle a, u_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} \|u_n\|_{\ell_p}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|a\|_k C. \end{aligned}$$

من ذلك ينتج أن التقارب في  $\mathcal{S}$  يقتضي التقارب في  $\ell_p$ . وبحسب المبرهنة (10-2) تكون

المتتالية  $\{a_N\}$  متقاربة في  $\mathcal{S}$ ، وبالتالي متقاربة في  $\ell_p$  من نفسه، إذ لو فرضنا جدلاً

أن المتتالية  $\{a_N\}$  لها نهاية أخرى  $a' \in \ell_p$  لكان لدينا من أجل كل  $m = 1, 2, \dots$ :

$$\langle a', u_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle a, u_n \rangle \langle u_n, u_m \rangle = \langle a, u_m \rangle.$$

من ذلك ينتج أن  $a' = a$  ، والنشر (2.6) صحيح في  $\ell_p$ . بذلك يتم المطلوب.

### 3- الفضاء $S'$

نرمز بـ  $S'$  لفضاء الداليات الخطية المستمرة على  $S$  ، ونرمز لعناصره بالأحرف  $F, G, \dots$  ، ولها الشكل:

$$F : S \rightarrow \mathbb{C} ; a \mapsto F(a),$$

وأهم خواصها:

- من أجل  $F, G \in S'$  يكون:
- $F = G \Leftrightarrow F(a) = G(a) ; \forall a \in S.$
- بشكل خاص: إذا كان  $F(a) = 0$  فنكتب  $F = 0$  ، وهو الدالي الصفري.
- تعرف عوامل فورييه لـ  $F \in S'$  بالشكل:
- $a_n(F) = F(u_n) ; n = 1, 2, \dots$
- سبين لاحقاً (في النتيجة (3-4)) أن:
- $F = G \Leftrightarrow a_n(F) = a_n(G) ; n = 1, 2, \dots$

لدينا الآن الاختبار التالي:

(1-3) مبرهنة: الدالي الخطي  $F : S \rightarrow \mathbb{C}$  ينتمي إلى  $S'$  إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي  $k$  وعدد موجب  $c$  يحققان المتراجحة:

$$(2.7) \quad |F(a)| \leq c \|a\|_k ; \forall a \in S.$$

الإثبات: نعتبر أن الدالي  $F$  يحقق المتراجحة (2.7). عندئذ:

من أجل أية متتالية  $\{a_N\}$  متقاربة في  $S$  من  $a$  يكون:

$$|F(a_N) - F(a)| \leq c \|a_N - a\|_k \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

والآن: نعتبر أن  $F \in S'$  ونفرض جديلاً عدم وجود عددين  $k$  و  $c$  يحققان المتراجحة

(2.7). عندئذ: توجد في  $S$  متتالية  $\{a_N\}$  بحيث إن  $|F(a_N)| = 1$  كما أن:

$$1 = |F(a_N)| > N \|a_N\|_k ; N = 1, 2, \dots$$

ولكن من أجل  $k > N$  يكون:

$$\|a_N\|_k \leq \|a_N\|_N < \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

وينتج من ذلك أن  $a_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ ، وهذا غير صحيح. بذلك يتم المطلوب.

**(2-3) ملاحظة:** تفيدنا المبرهنة السابقة في إثبات أن  $\mathbf{s}'$  يحوي جميع الفضاءات  $\ell_p$ ،

ويتم ذلك كما يلي:

ليكن  $b \in \ell_p$  (مثبت)، ولنعرف دالياً خطياً  $F : \mathbf{s} \rightarrow \mathbb{C}$  بالشكل:

$$(2.8) \quad F_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n ; \quad a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{s}.$$

فيكون لدينا بحسب متراجحة هولدر للمجاميع (حيث  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) والمبرهنة (2-2):

$$\begin{aligned} |F_b(a)| &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \right)^{1/q} \\ &= \|b\|_{\ell_p} \|a\|_{\ell_q} \leq c \|b\|_{\ell_p} \|a\|_k. \end{aligned}$$

وحسب المبرهنة (1-3) يكون  $F_b \in \mathbf{s}'$ .

والآن لنشكل التطبيق (وهو معرف تماماً بحسب ما ذكر آنفاً):

$$\Phi : \ell_p \longrightarrow \mathbf{s}' ; \quad b \mapsto \Phi(b) = F_b.$$

ليكن  $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$  و  $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$  وليكن  $F_b$  و  $F_c$  الداليين

الموافقين، عندئذ يكون:

$$F_b = F_c \Leftrightarrow F_b(a) = F_c(a) ; \quad \forall a \in \mathbf{s}.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n.$$

فإذا أخذنا  $a = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\} \in \mathbf{s}$  حيث 1 يشغل المركبة  $n$  وباقي

المركبات كلها أصفار، نجد أن:

$$b_n = c_n ; \quad n = 1, 2, \dots$$

لذلك يكون  $b = c$ . أي أن التطبيق  $\Phi$  متباين. لذلك تصح المطابقة:

$$\ell_p \ni b \leftrightarrow F_b \in \mathbf{S}'.$$

ومن خلالها يمكن اعتبار  $\ell_p$  كفضاء خطي جزئي من  $\mathbf{S}'$ ، أي:  $\ell_p \subset \mathbf{S}'$ ، و  $1 \leq p < \infty$ .

لذلك بدلاً من  $F_b$  يمكن أن نكتب  $b$  فقط، وبناءً عليه يمكن إعادة كتابة العلاقة (2.8) بالشكل:

$$(2.8)' \quad b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n \quad ; \quad a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{S}.$$

وهنا لدينا الحالات الخاصة التالية (مع التنويه أن الكتابة  $\bar{a} = \{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$  تعني المرافق العقدي لمتتالية المرافقات  $\{\bar{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ):  
- من أجل  $a = u_m$  يكون:

$$b(u_m) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_{m,n}.$$

وبشكل خاص: من أجل  $b \in \ell_2$  يكون إضافة لذلك:

$$b(u_m) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_{m,n} = \langle u_m, \bar{b} \rangle_{\ell_2}.$$

- من أجل  $b = u_m$  و  $a = \bar{u}_\ell$  يكون:

$$u_m(\bar{u}_\ell) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n} \bar{u}_{\ell,n} = \langle u_m, u_\ell \rangle_{\ell_2} = \delta_{m,\ell}.$$

- من أجل  $b = u_m$  يكون:

$$u_m(a) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n} a_n = \langle a, \bar{u}_m \rangle_{\ell_2}.$$

في المبرهنة التالية تلزم عوامل فورييه لـ  $F \in \mathbf{S}'$  وقد عرفناها سابقاً بالشكل:

$$a_n(F) = F(u_n) \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

(3-3) مبرهنة: كل  $F \in \mathbf{S}'$  يمكن نشره بسلسلة من الشكل:

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(F) \bar{u}_n ,$$

وهذه السلسلة متقاربة في  $S'$  من نفسه.

الإثبات: بالاستفادة من المبرهنة (2-10) يكون لدينا من أجل  $F \in S'$ :

$$\begin{aligned} F(a) &= F\left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle a, u_n \rangle u_n\right) ; a \in S \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle a, u_n \rangle F(u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle a, u_n \rangle a_n(F) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(a) a_n(F) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(F) \bar{u}_n(a) = \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(F) \bar{u}_n\right)(a) . \end{aligned}$$

ومنه نحصل على المطلوب.

نتيجة (3-4): من أجل  $F, G \in S'$  يكون:

$$F = G \Leftrightarrow a_n(F) = a_n(G) ; n = 1, 2, \dots$$

ينتج ذلك من:

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(F) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(G) u_n = G .$$

### 5- كثيرات حدود تشيبشيف ومؤثر تشيبشيف

تُعطى كثيرات حدود تشيبشيف من النوع الأول  $T_n(x)$  بالعلاقات التالية:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \tilde{T}_0(x) &= 1 , \quad \tilde{T}_n(x) = \cos(n \arccos x) ; n \\ &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

أو بصيغة رودريج (حيث  $n = 1, 2, \dots$ ):

$$(4.1)' \quad \tilde{T}_0(x) = 1, \quad \tilde{T}_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right].$$

وهي تشكل جملة متعامدة على المجال  $[-1,1]$  مع دالة الوزن  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . للتأكد من ذلك نفرض  $x = \cos \theta$  (أي  $\theta = \arccos x$ ) فتأخذ الجملة (4.1) الشكل:

$$(4.2) \quad \tilde{T}_0(x) = \tilde{T}_0(\cos \theta) = 1, \quad \tilde{T}_n(x) = \tilde{T}_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

حيث إن  $0 \leq \theta \leq \pi$ . لذلك يكون لدينا:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}_n, \tilde{T}_m \rangle &= \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tilde{T}_n(x) \tilde{T}_m(x) dx \\ &= \int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \\ &= \begin{cases} 0 & ; \quad n \neq m. \\ \pi & ; \quad n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; \quad n = m \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

بتقسيم كل  $\tilde{T}_n(x)$  على نظيمه نحصل على جملة متعامدة منظمة على المجال  $[-1,1]$

مع دالة الوزن  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، هي:

$$(4.3) \quad T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_n(x) = \frac{\tilde{T}_n(x)}{\sqrt{2\pi}}; \quad n = 1, 2, \dots$$

وهذه بدورها تنتمي للفضاءات  $L_p(-1, +1)$ ، حيث  $1 \leq p < \infty$ ، ويكون:

$$(4.4) \quad \|T_0\|_{L_p} = \sqrt{\pi}, \quad \|T_n\|_{L_p} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^\pi |\cos n\theta|^p \right)^{1/p} \leq \pi.$$

نضيف أيضاً أن كثيرات الحدود  $T_n(x)$  هي الدوال الذاتية لمؤثر تشبيبيشيف التفاضلي:

$$(4.5) \quad A = -(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + 1,$$

موافقة للقيم الذاتية:

$$(4.6) \quad \mu_n = n^2 + 1 \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

بحسابات عادية نجد ان المؤثر  $A$  موجب محدد، فله جذر تربيعي، سنرمز له بـ  $T =$

$$\lambda_n = \sqrt{\mu_n} = \sqrt{n^2 + 1} \quad \text{له الدوال الذاتية } T_n(x) \text{ نفسها، والقيم الذاتية الموافقة هي } A^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{n^2 + 1}$$

فيما يلي سنكتب فقط  $L_2$  بدلاً من  $L_2(-1, +1)$ .

بحسب المبرهنة (2-2) تكون مجموعة تعريف المؤثر  $T$  هي:

$$(4.7)' \quad D(T) = \left\{ f \in L_2 : \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 1) |\langle f, T_n \rangle|^2 < \infty \right\},$$

ويكون:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n^2 + 1} \langle f, T_n \rangle T_n \quad ; \quad f \in D(T).$$

وبما أن:

$$n^2 \leq n^2 + 1 \leq 2n^2 \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

والسلسلتان:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 1) |\langle f, T_n \rangle|^2 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\langle f, T_n \rangle|^2$$

تكونا متقاربتين معاً أو متباعدين معاً، فيمكن كتابة  $D(T)$  بالشكل:

$$(4.7)'' \quad D(T) = \left\{ f \in L_2 : \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |\langle f, T_n \rangle|^2 < \infty \right\}.$$

ويكون:

$$(4.8) \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} n \langle f, T_n \rangle T_n \quad ; \quad f \in D(T).$$

الآن: نعرف القوى الصحيحة للمؤثر  $T$  بالشكل:

$$T^0 = I \left( \text{مؤثرالمطابقة} \right) , T^1 = T , T^2 = T^1(T^1) , \dots , \\ T^k = T^1(T^{k-1}).$$

فنجذ ان:

$$(4.9) \quad D(T^k) = \left\{ f \in L_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle f, T_n \rangle|^2 < \infty \right\}.$$

وبما ان  $\mathcal{S} \subset \ell_2$  ، وبحسب الإيزومورفية بين الفضاءين  $L_2$  و  $\ell_2$  ، فإن كل متتالية  $\{a_n\}$  من  $\ell_2$  يقابلها دالة  $f$  من  $L_2$  وبالعكس بحيث يكون  $a_n = \langle f, T_n \rangle$  .  
بحسب (4.9) فإن المتتالية  $\{\langle f, T_n \rangle\}$  تنتمي إلى  $\mathcal{S}$  . لذلك يمكن تشكيل التطبيق:

$$\Psi : D(T^k) \rightarrow \mathcal{S} ; f \mapsto \Psi(f) = \{\langle f, T_n \rangle\}.$$

هذا التطبيق متباين وغامر . لذلك تصح المطابقة:

$$D(T^k) \ni f \leftrightarrow \{\langle f, T_n \rangle\} \in \mathcal{S}$$

بناءً على ذلك يمكن اعتبار  $\mathcal{S}$  إيزومورفية مع  $D(T^k)$  ، ويكون أيضاً:

$$(4.10) \quad \|\{\langle f, T_n \rangle\}_k\|_k^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} |\langle f, T_n \rangle|^2 = \|T^k f\|_{L_2}^2 ; k \\ = 0, 1, 2, \dots$$

##### 5- كثيرات حدود تشبيبيشيف كقاعدة لفضاء نووي والفضاء الثنوي له

في هذه الفقرة سنشكل فضاءً نووياً، نرسم له بـ  $\mathcal{D}$  ، (إيزومورفي مع الفضاء  $\mathcal{S}$  ) ، ويسمى عادة فضاء الاختبار، وهو فضاء جزئي من فضاء هيلبرت  $L_2$  ، وسوف نبين أن كثيرات حدود تشبيبيشيف  $T_n(x)$  المذكورة في الفقرة السابقة تشكل قاعدة لهذا الفضاء .

إضافة لذلك: سنبين أنها تشكل أيضاً قاعدة للفضاء الثنوي  $\mathcal{D}'$  ، ونستنتج قاعدة (معمة) للفضاءات  $L_p$  ، حيث  $1 \leq p < \infty$  . هنا: سنستفيد من كون كثيرات الحدود

$$T_n(x) \text{ تشكل قاعدة منظمة متعامدة في فضاء هيلبرت } L_2 . [14]$$

(5-1) تعريف: نرسم بـ  $\mathcal{D}$  لمجموعة جميع التتابع  $\varphi \in L_2$  والتي تحقق:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi, T_n \rangle|^2 < \infty ; \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

ونسمي  $\mathcal{D}$  فضاء الاختبار .

(2-5) ملاحظة: (أ) المجموعة  $\mathcal{D}$  ليست خالية فهي تحوي (على الأقل)  $T_n(x)$  وتركيباتها الخطية، ينتج ذلك من كون الجملة  $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  متعامدة ومنظمة، و من أجل كل  $m$  مثبت يكون لدينا:

$$\| \| T_m \| \|_k^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle T_m, T_n \rangle|^2 = m^{2k} ; \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

(ب) إذا عرفنا الأعداد  $\| \varphi \|_k$  بالشكل:

$$(5.1) \quad \| \varphi \|_k^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi, T_n \rangle|^2 ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

نحصل على أسرة من أنصاف النظم  $\{ \| \varphi \|_k \}_{k=0}^{\infty}$  على  $\mathcal{D}$  وتحقق:

$$(5.2) \quad \| \varphi \|_0 \leq \| \varphi \|_1 \leq \| \varphi \|_2 \dots ; \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

(ج) بالاستفادة من (5.2) يكون:

$$(5.3) \quad \| \varphi \|_k = \| T^k \varphi \|_{L_2} ; \quad \varphi \in \mathcal{D} , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(3-5) تعريف: يقال عن متتالية  $\{\varphi_n\}$  من  $\mathcal{D}$  إنها متقاربة من التابع  $\varphi$  إذا كان:

$$\| \varphi_N - \varphi \|_k \rightarrow 0 ; \quad N \rightarrow \infty , \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

والآن نوجد أهم خواص الفضاء  $\mathcal{D}$  .

(4-5) مبرهنة:  $\mathcal{D}$  فضاء تام مع أسرة أنصاف النظم  $(\| \varphi \|_k)_{k=0}^{\infty}$ .

الإثبات: لتكن  $\{\varphi_N\}$  متتالية كوشي في  $\mathcal{D}$ . هذا يعني:

$$\| f_M - f_N \|_k < \varepsilon ; \quad N > M > N_0(\varepsilon) , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\varepsilon > 0).$$

بما أن التتابع  $\varphi_N$  تنتمي للفضاء  $L_2$  فيكون لدينا بحسب مساواة بارسيفال:

$$\begin{aligned} \|\varphi_N - \varphi_M\|_2^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \varphi_N - \varphi_M, T_n \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi_N - \varphi_M, T_n \rangle|^2 < \varepsilon^2 ; N > M > N_0(\varepsilon) . \end{aligned}$$

وبالتالي المتتالية  $\{\varphi_N\}$  متقاربة في الفضاء  $L_2$  ، ولنضع  $\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N = \varphi_0$  .  
الآن ليكن  $K$  عدداً طبيعياً مثبتاً ، ولنكتب :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^K n^{2k} |\langle \varphi_0 - \varphi_N, T_n \rangle|^2 &= \sum_{n=1}^K n^{2k} |\langle (\varphi_0 - \varphi_M) + (\varphi_M - \varphi_N), T_n \rangle|^2 \\ &\leq 2 \left( \sum_{n=1}^K n^{2k} |\langle (\varphi_0 - \varphi_M), T_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^K n^{2k} |\langle (\varphi_M - \varphi_N), T_n \rangle|^2 \right) . \end{aligned}$$

بحسب الفرضيات فإنّ الحد الثاني في الطرف الأيمن أصغر من  $\varepsilon^2$  ، ويمكن جعل الحد الأول أصغر من  $\varepsilon^2$  باختيار  $M$  كبير بشكل كاف وبشكل مستقل عن  $K$  . لذلك يكون :

$$\sum_{n=1}^K n^{2k} |\langle (\varphi_0 - \varphi_M), T_n \rangle|^2 \leq 4\varepsilon^2 ; N > N_0(\varepsilon) .$$

وبما أنّ الطرف الأيمن مستقل عن  $K$  فيمكن جعل  $K \rightarrow \infty$  لنجد  $(\varphi_0 - \varphi_M) \in \mathcal{D}$  ، وبالتالي :

$$\varphi_0 = (\varphi_0 - \varphi_M) + \varphi_M \in \mathcal{D} .$$

ومنه نحصل على المطلوب .

(5-5) مبرهنة: (1) يمكن نشر كل  $\varphi \in \mathcal{D}$  بسلسلة فوربيه من الشكل :

$$(5.4) \quad \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle T_n .$$

وهذه السلسلة متقاربة في  $\mathcal{D}$  من  $\varphi$  نفسه .

(2) كل سلسلة من الشكل  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n$  ، حيث  $a_n \in \mathbb{C}$  ، تكون متقاربة في  $\mathcal{D}$  إذا وفقط وإذا تحقق الشرط التالي :

من أجل كل عدد صحيح غير سالب  $k$  تكون السلسلة العددية  $\sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} |a_n|^2$  متقاربة. فإذا تحقق هذا الشرط ورمزنا بـ  $\varphi$  لمجموعها، فيكون:  $a_n = \langle \varphi, u_n \rangle$ .  
الإثبات:

(1) - ليكن  $\varphi \in \mathcal{D}$  ، عندئذ يكون  $\varphi \in L_2$  ، وبالتالي له السلسلة (التقارب في  $L_2$ ):

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle T_n .$$

لنضع الآن:

$$\varphi_N = \sum_{n=0}^N \langle \varphi, T_n \rangle T_n \quad ; \quad N = 1, 2, \dots$$

ف نجد أنّ  $\varphi_N \in \mathcal{D}$  من أجل كل  $N$  ، كما أنّ:

$$\varphi - \varphi_N = \sum_{j=N+1}^{\infty} \langle \varphi, T_j \rangle T_j .$$

ويكون لدينا:

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_N\|_k^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi - \varphi_N, T_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi, T_n \rangle|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 . \end{aligned}$$

أي أنّ  $\{\varphi_N\}$  متقاربة في  $\mathcal{D}$  من التابع  $\varphi$  وبالتالي (5.4) صحيحة.

(2) لنفرض أنّ السلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$  متقاربة في  $\mathcal{D}$  ولنرمز لمجموعها بـ  $\varphi$ ، فيكون:

$$\langle \varphi, T_n \rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j, T_n \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_j |\langle T_j, T_n \rangle|^2 = a_n .$$

من ناحية ثانية لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} \left| \left\langle \sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j, T_n \right\rangle \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} |a_n|^2 .$$

ومنه نحصل على المطلوب.

(5-6) نتيجة: (1) كثيرات حدود تشيبيشيف  $\{T_n(x)\}$  تشكل قاعدة للفضاء  $\mathfrak{D}$ .  
(2) الفضاءان  $\mathfrak{D}$  و  $\mathfrak{S}$  إيزومورفيان (كما ذكرنا في بداية الفقرة)، ويتم التأكد من ذلك كما يلي (مع الاستفادة من الإثبات السابق)، حيث تشكل التطبيق:

$$\Phi : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{S} ; f \mapsto \Phi(\varphi) = \{\langle \varphi, T_n \rangle\}.$$

هذا التطبيق متباين وغامر. لذلك تصح المطابقة:

$$(*) \quad \mathfrak{D} \ni \varphi \leftrightarrow \{\langle \varphi, T_n \rangle\} \in \mathfrak{S}.$$

ويكون :

$$\|\Phi(\varphi)\|_k^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi, T_n \rangle|^2 = \|\varphi\|_k^2 ; \quad \forall \varphi \in \mathfrak{S}.$$

إضافة لذلك يكون لدينا المقابلة:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} D(T^k) = \mathfrak{D} \leftrightarrow \mathfrak{S} = \bigcap_{k=0}^{\infty} D(A^k),$$

حيث  $A$  هو المؤثر المذكور في الملاحظة (2-4) والمبرهنة (2-5) و  $T$  هو مؤثر

تشيبيشيف.

(3) بناءً على ماتقدم والمقابلة (\*) يمكن الحصول على قاعدة للفضاء  $\mathfrak{S}$  بواسطة  $T_n$

كما يلي:

$$\begin{aligned} \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle T_n &\leftrightarrow \{\langle \varphi, T_n \rangle\} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle e_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle \{ \langle T_n, T_m \rangle \}. \end{aligned}$$

في المبرهنة التالية نبين أن الفضاء  $\mathfrak{D}$  محتوى في كل الفضاءات  $L_p$  وليس فقط في  $L_2$ .

(7-5) مبرهنة: الطمر المستمر  $L_p \hookrightarrow \mathfrak{D}$  محقق من أجل  $1 \leq p < \infty$ .

الإثبات: بحسب ماسبق، من الواضح أن المبرهنة صحيحة في حالة  $p = 2$ .  
الآن: ليكن  $\varphi \in \mathfrak{D}$ ، ولنضع:

$$\varphi_N = \sum_{n=0}^N \langle \varphi, T_n \rangle T_n \quad ; \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

ف نجد أن  $\varphi_N \in L_p$  من أجل  $1 \leq p < \infty$ ، ولدينا من أجل  $N > M > N_0(\varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} \|\varphi_N - \varphi_M\|_{L_p} &= \left\| \sum_{n=M+1}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle T_n \right\|_{L_p} \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} |\langle \varphi, u_n \rangle| \|T_n\|_{L_p} \leq \\ &\leq c \sum_{n=M+1}^N n^k |\langle \varphi, T_n \rangle| \cdot n^{-k} \\ &\leq c \left( \sum_{n=M+1}^N n^{2k} |\langle \varphi, T_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{n=M+1}^N n^{-2k} \right)^{1/2} \leq C \|\varphi\|_k \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

لذلك فإن  $\{\varphi_N\}$  متتالية كوشي في  $L_p$ ، فهي متقاربة ولنفرض أن:

$$g = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \langle \varphi, T_n \rangle T_n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle T_n.$$

من ناحية ثانية: لدينا من أجل  $m = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\langle g, u_m \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle \langle T_n, T_m \rangle = \langle \varphi, T_m \rangle.$$

من ذلك ينتج أن:  $\varphi = g$  وبالتالي  $\mathfrak{D} \subset L_p$ .

لدينا الآن من أجل  $\varphi \in \mathfrak{D}$  (وبحسب متراجحة شفارتز):

$$\|\varphi\|_{L_p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\langle \varphi, T_n \rangle| \cdot n^{-k} \cdot \|T_n\|_{L_p}$$

$$\leq c \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi, T_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} \right)^{1/2} .$$

$$\leq \| \varphi \|_k \cdot C .$$

ومنه نحصل على المطلوب .

نتنقل الآن لدراسة الفضاء الثنوي للفضاء  $\mathcal{D}$ ، ونرمز له بـ  $\mathcal{D}'$ ، وهو فضاء الداليات الخطية المستمرة على  $\mathcal{D}$ . نرمز للداليات بأحرف كبيرة  $T, G, \dots$ ، ولكل منها الشكل:

$$F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C} ; \quad \varphi \mapsto F(\varphi).$$

وتسمى عادة توزيعات.

نقول عن توزيعين  $F, G \in \mathcal{D}'$  إنهما متساويان، ونكتب  $F = G$ ، إذا كان:

$$F(\varphi) = G(\varphi) ; \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

وبشكل خاص: إذا كان  $F(\varphi) = 0$  فنكتب  $F = 0$  ونسميه التوزيع الصفري.

نقول عن متتالية توزيعات  $\{F_N\}$  إنّها متقاربة من التوزيع  $F$  إذا كان:

$$F_N(\varphi) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} F(\varphi) ; \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} .$$

من أجل التوزيع  $F \in \mathcal{D}$  نسمي الأعداد  $F(T_n)$  عوامل فورييه للتوزيع  $F$  ونكتب:

$$a_n(F) = F(T_n) ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

لدينا الآن الاختبار التالي:

(8-5) **مبرهنة:** ليكن  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  دالياً خطياً. عندئذ: يتكافأ الشرطان التاليان:

$$F \in \mathcal{D}' \quad (1)$$

(2) يوجد عدد طبيعي  $k$  وعدد ثابت موجب  $c$  بحيث إن:

$$(5.5) \quad |F(\varphi)| \leq c \cdot \| \varphi \|_k ; \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} .$$

الإثبات: (2)  $\Leftrightarrow$  (1): لدينا  $F$  دالي خطي فرضاً ولنثبت أنّه مستمر .

لتكن  $\{\varphi_N\}$  متتالية من عناصر  $\mathcal{D}$  ومتقاربة من  $\varphi$  عندئذ:

$$|F(\varphi_N) - F(\varphi)| = |F(\varphi_N - \varphi)| \leq c. \|\varphi_N - \varphi\|_k \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

(1)  $\Leftarrow$  (2): نفرض جديلاً عدم وجود العددين  $c$  و  $k$  بحيث تتحقق المتراجحة (5.5).  
عندئذ:

توجد في  $\mathcal{D}$  متتالية  $\{\varphi_N\}$  بحيث يكون  $|F(\varphi_N)| = 1$ ، كما أن:

$$1 = |F(\varphi_N)| > N. \|\varphi\|_N ; N = 1, 2, \dots$$

ولكن من أجل  $k < N$  يكون لدينا:

$$\|\varphi\|_k \leq \|\varphi\|_N < \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

ومنه ينتج أن  $\varphi_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$  في  $\mathcal{D}$ ، وهذا يخالف الفرض. وبذلك يتم المطلوب.

**(9-5) ملاحظة:** تفيدنا المبرهنة السابقة لإثبات أن  $\mathcal{D}'$  يحوي جميع الفضاءات  $L_p$ .

من أجل كل  $f \in L_p$  (مثبت) نعرّف دالياً خطياً  $F_f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  بالشكل:

$$(5.6) \quad F_f(\varphi) = \int_{-1}^{+1} f(x)\varphi(x) dx ; \varphi \in \mathcal{D}.$$

بحسب متراجحة هولدر للتكاملات (حيث  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) والمبرهنة (7-5) يكون

لدينا :

$$|F_f(\varphi)| \leq \|f\|_p \cdot \|\varphi\|_q \leq c. \|f\|_p \cdot \|\varphi\|_k ; \varphi \in \mathcal{D}.$$

وبحسب المبرهنة (8-5) يكون  $F_f(\varphi) \in \mathcal{D}'$ .

والآن نشكل التطبيق:

$$\Phi : L_p \rightarrow \mathcal{D}' ; f \mapsto \Phi(f) = F_f ,$$

ليكن  $f, g \in L_p$  وليكن  $F_f, F_g \in \mathcal{D}'$  التوزيعين الموافقين لهما. إذا كان  $F_f = F_g$

فيكون:

$$F_f(\varphi) = F_g(\varphi) ; \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

لذلك يكون:

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - g(x)]\varphi(x) dx = 0 \quad ; \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

من ذلك ينتج أن  $f(x) - g(x) = 0$  وبالتالي  $f = g$  في  $L_p$ . أي أن التطبيق  $\Phi$  متباين،

وبالتالي تصح المطابقة:

$$(5.7) \quad L_p \ni f \leftrightarrow F_f \in \mathcal{D}'.$$

بناءً على المطابقة السابقة يمكن اعتبار أن كل  $f \in L_p$  يمثل توزيعاً  $F_f$  من  $\mathcal{D}'$ ، ويمكن أن نرمز بـ  $f$  لهذا التوزيع. لذلك يمكن كتابة (5.6) بالشكل:

$$(5.8) \quad f(\varphi) = \int_{-1}^{+1} f(x)\varphi(x) dx \quad ; \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad (f \in L_p).$$

وهنا لدينا الحالات الخاصة التالية:

- من أجل  $\varphi = T_n$  يكون:

$$(5.9) \quad f(T_n) = \int_{-1}^{+1} f(x)T_n(x) dx = a_n(f).$$

- من أجل  $f = T_n$  يكون:

$$(5.10) \quad T_n(\varphi) = \int_{-1}^{+1} T_n(x)\varphi(x) dx = \langle \varphi, T_n \rangle = \langle T_n, \bar{\varphi} \rangle.$$

- ومن أجل  $\varphi = T_m$  و  $f = T_n$  يكون:

$$(5.11) \quad T_n(T_m) = \int_{-1}^{+1} T_n(x)T_m(x) dx = \langle T_n, T_m \rangle = \delta_{n,m}.$$

إضافة لذلك وبناءً على المطابقة (5.7) يمكن أن نكتب:

$$|f(\varphi)| \leq c. \|f\|_p. \|\varphi\|_k \quad ; \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

وبذلك نحصل على الطمر المستمر  $\mathcal{D}' \hookrightarrow L_p$ ، حيث  $1 \leq p < \infty$ . من هذا والمبرهنة

$$(7-5) \quad \text{يكون: } \mathcal{D} \hookrightarrow L_p \hookrightarrow \mathcal{D}' \quad , \quad \text{حيث } 1 \leq p < \infty.$$

الآن: ليكن  $f \in L_p$  وليكن  $F_f \in \mathcal{D}'$  التوزيع الموافق، فتكون عوامل فورييه لهذا التوزيع:

$$a_n(F_f) = F_f(T_n) = \int_{-1}^{+1} f(x)T_n(x) dx = a_n(f) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

أي أن عوامل فورييه للتوزيع  $F_f$  هي نفسها عوامل فورييه للدالة  $f$  المنتجة لهذا التوزيع.

المبرهنة التالية تبين لنا أن كثيرات الحدود  $T_n(x)$  تشكل قاعدة للفضاء  $\mathcal{D}'$ .  
**(10-5) مبرهنة:** (1) كل توزيع  $F \in \mathcal{D}'$  يمكن نشره بسلسلة من الشكل:

$$(5.12) \quad F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(F) T_n.$$

(2) السلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$  ، حيث  $a_n \in \mathbb{C}$  ، تكون متقاربة في  $\mathcal{D}'$  إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

يوجد عدد طبيعي  $k$  بحيث تكون السلسلة العددية  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} |a_k|^2$  متقاربة. فإذا تحقق

ذلك ورمزنا بـ  $F$  لمجموع السلسلة فيكون:  $a_n = a_n(F)$ .

**الإثبات:** (1) ليكن  $F \in \mathcal{D}'$ . عندئذ: من أجل كل  $\varphi \in \mathcal{D}$  يكون لدينا بحسب (5.10):

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= F \left( \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle T_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle F(T_n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\varphi) a_n(F) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(F) T_n \right) (\varphi). \end{aligned}$$

ومنه نحصل على (5.12).

(1) لنأخذ متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$  وهي:

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n T_n \quad ; \quad N = 1, 2, \dots$$

عندئذ من أجل أي  $\varphi \in \mathcal{D}$  يكون بحسب (5.10):

$$|S_N(\varphi)| = \left| \sum_{n=0}^N a_n T_n(\varphi) \right| = \left| \sum_{n=0}^N a_n \langle \varphi, T_n \rangle \right|$$

$$\leq \left( \sum_{n=0}^N n^{-2k} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=0}^N n^{2k} |\langle \varphi, T_n \rangle|^2 \right)^{1/2}$$

فإذا كانت السلسلة العددية  $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-2k} |a_n|^2$  متقاربة ومجموعها  $c$  نجد أن:

$$\left| \left( \sum_{n=0}^N a_n T_n \right) (\varphi) \right| \leq c \|\varphi\|_k ; \varphi \in \mathcal{D}.$$

بجعل  $N \rightarrow \infty$  نحصل على المطلوب بحسب المبرهنة (5-8).

(11-5) نتيجة: ليكن  $f \in L_p$  وليكن  $F_f \in \mathcal{D}'$  التوزيع الموافق، عندئذ يكون بحسب (5.9):

$$F_f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (F_f) T_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (f) T_n = f.$$

(حيث يكون التقارب في  $\mathcal{D}'$ ). بذلك نحصل على نشر توزيعي (معمم) لكل تابع  $(f \in L_p)$ . هذه النتيجة تتسجم تماماً مع المطابقة (5.7).

(12-5) ملاحظة: تجدر الإشارة هنا أنه، وبشكل مشابه لما فعلناه في هذا البحث، يمكن الحصول على قواعد أخرى لفضاءات نووية، مثلاً: دوال ليجندر، لاجير ... الخ، طبعاً مع مراعاة خصوصية كل جملة من تلك الدوال.

## المراجع

- [1] V. Hutson; J. S. Pym (1980): Applications of Functional Analysis and Operator Theory. *Oxford University Press*.
- [2] Triebel, H. (1992): Higher Analysis. *Johann Ambrosius Barth, Leipzig, Berlin*.

- [3] **E. Kreyszig** (1978): Introductory Functional Analysis with Applications. *John Wiley & Sons, Inc.*
- [4] **R. Meise; D. vogn** (2023): Introduction to Functional Analysis. *Oxford University Press.*
- [5] **F. Trèves** (2006): Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. *Dover Publications, New York*
- [6] **Y. C. Wong** (2006): Schwartz Spaces, Nuclear Spaces, and Tensor Product. *Springer, Berlin.*
- [7] **H. Nlend** (2012): Nuclear and Conuclear Spaces. Introductory Courses on Nuclear and Conuclear Spaces in the Light of Duality. *North Holland, Amstrdam.*
- [8] **M. C. Mason ; D. C. Handscomb** (2003): Chebyshev Polynomials. *Chapman & Hall/CRC press LLc.*
- [9] **A.M. Mathai ; H. Haubold** (2008): Special Functions for Applied Scientists. *Springer Science+Business Media, LLC*
- [10] **N. M. Temme** (1996): Special Functions. An Introduction to the Classical. Functions of Mathematical Physics. *John Wiley & Sons, New York.*
- [11] **P. Garrett** (2017): Nuclear Space, Schwartz Kernel Theorem. [http://www. Math.umn.edu.](http://www.Math.umn.edu)
- [12] **A. Grothendieck** (1973): Topological Vector Spaces. *Gordon and Breach, London.*
- [13] **A. Pietsch** (1972): Nuclear Locally Convex Spaces. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [14] **S. Kumar** (2025): Analyzing the Relationship between Free Locally Convex Spaces and Nuclear Space Concept. Bihar university, India.

## قواعد غروبنر فوق ساحات بروفير

جامعة حمص - كلية العلوم - قسم الرياضيات

طالبة الماجستير: مايا موفق منصور

إشراف:

الدكتورة رانية جنيد      الدكتورة نور رضوان

### ملخص البحث

في هذا البحث قمنا بدراسة ساحات بروفير وعلاقتها ببعض الأنواع الأخرى من الساحات الصحيحة، وخاصة الساحات التقديرية، وقد توصلنا إلى أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الساحة الصحيحة ساحة بروفير موضعية هو أن تكون هذه الساحة ساحة تقديرية. عملنا في هذا البحث على دراسة قواعد غروبنر فوق ساحات بروفير، وانطلاقاً من العلاقة بين ساحات بروفير والساحات الأخرى كالساحة التقديرية، توصلنا إلى العديد من النتائج أهمها ما يتعلق بمسألة الانتماء لمثالية في حلقة الحدوديات فوق ساحة بروفير الموضعية، والتوصل إلى الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة مولدة لمثالية ما في ساحة بروفير الموضعية قاعدة غروبنر، كما توصلنا إلى إمكانية تطبيق خوارزمية (*Buchberger*) في الساحات التقديرية من أجل حساب قواعد غروبنر في ساحات بروفير الموضعية والنيوترية.

### الكلمات المفتاحية:

الساحة التقديرية، الساحة التقديرية المنقطعة، ساحة بروفير، قواعد غروبنر.

## Grobner Bases over Prufer Domains

Homs University – Faculty of Science – Mathematics Department

Master's Student: Maya Mowafaq Mansour

Supervised by:

Dr.Rania Junaid

Dr.Nor Radwan

### Abstract

In this research, we studied Prufer domains and their relationship with some other types of integer domains, especially Valuation domains. We concluded that the necessary and sufficient condition for an integer domain to be a local Prufer domain is that it be a Valuation domain.

In this research, we worked on studying Grobner bases over Prufer domains based on the relationship between Prufer domains and other domains, such as the Valuation domain. We reached many results the most important of them is the one which is related to the ideal membership problem in the polynomials ring over the local Prufer domain, and reaching to the necessary and sufficient condition for a generating set of an ideal to be Grobner basis in the local Prufer domain. Furthermore, we concluded that it is possible to apply the Buchberger's algorithm in the Valuation domains in order to compute Grobner bases in the local and Noetherian Prufer domains.

### Key Words:

Valuation domain, Discrete valuation domain, Prufer domain, Grobner bases.

### مقدمة البحث:

تعد قواعد غروبنر من الأساليب المهمة التي استخدمها الكثير من العلماء في حل المسائل، وذلك خلال دراستهم في مختلف مجالات الرياضيات التطبيقية والبحثية، وقد ظهرت قواعد غروبنر عام (1965) على يد العالم غروبنر، وسميت بهذا الاسم نسبة إليه، وهي نوع خاص من المجموعات المولدة لمثالية في حلقة الحدوديات بأكثر من متغير، ويعد العالم (*B. Buchberger*) من أبرز العلماء الذين قدموا نتائج مهمة فيما يتعلق بقواعد غروبنر، حيث قام بتصميم خوارزمية لإيجاد هذه القواعد، وذلك من أجل إيجاد حل لمسألة انتماء حدودية إلى مثالية في حلقة كثيرات الحدود فوق حقل ما ( حيث إنه إذا كانت  $G$  قاعدة غروبنر للمثالية  $I$ ، عندئذٍ أياً كانت الحدودية  $f$  من حلقة الحدوديات فوق حقل  $K$ ، فإن  $f$  تنتمي للمثالية  $I$  إذا وفقط إذا كان باقي قسمة  $f$  بواسطة  $G$  يساوي الصفر )، وقد نالت هذه المسألة اهتماماً كبيراً من قبل الباحثين الذين عملوا على تعميم خوارزمية (*Buchberger*) في العديد من الساحات، مثل ساحة المثاليات الرئيسية والساحات التقديرية وغيرها من الساحات. قمنا في هذا البحث بدراسة ساحات بروفير، وإضافة بعض الشروط عليها من أجل حساب قواعد غروبنر، وذلك انطلاقاً من العلاقة بين ساحات بروفير وبعض الساحات الشهيرة التي تمت دراسة قواعد غروبنر عليها سابقاً [7], [8], [9].

### هدف البحث:

نهدف في بحثنا هذا إلى دراسة أحد تطبيقات قواعد غروبنر فوق ساحات بروفير الموضوعية، والتي يمكننا من خلالها تحديد ما إن كانت حدودية ما تنتمي لمثالية في حلقة الحدوديات فوق ساحة بروفير الموضوعية، ونهدف أيضاً إلى إيجاد خوارزمية من أجل حساب قواعد غروبنر في ساحة بروفير الموضوعية والنيوتونية.

جميع الحلقات التي سنتعامل معها في دراستنا ضمن هذه البحث هي ساحات صحيحة مالم نذكر خلاف ذلك.

## 1. ساحات بروفير:

### تعريف. 1.1: [5]

تُسمى الساحة الصحيحة  $V$  ساحة تقديرية (*Valuation domain*)، إذا كان من أجل أي مثاليين  $A$  و  $B$  من  $V$ ، فإنه إما  $B \subseteq A$  أو  $A \subseteq B$ .

### تمهيدية. 1.1: [5]

لنكن  $V$  ساحة تقديرية، عندئذٍ كل مثالية منتهية التوليد في  $V$  تكون مثالية رئيسية.

### مبرهنة. 1.1: [5]

لنكن  $V$  ساحة صحيحة نيوترية وليست حقلاً، عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة:

1.  $V$  ساحة تقديرية.
2. مجموعة العناصر غير القابلة للقلب في  $V$  تشكل مثالية رئيسية غير صفرية في  $V$ .
3. الساحة  $V$  مغلقة بشكل كامل، وتملك مثالية أولية فعلية وغير صفرية وحيدة.

### تعريف. 2.1: [2]

تُسمى الساحة الصحيحة  $R$  ساحة تقديرية متقطعة

(*Discrete valuation domain*)، إذا كانت  $R$  ساحة مثاليات رئيسية، وتملك مثالية أولية غير صفرية وحيدة.

### مبرهنة. 2.1: [2]

لنكن  $R$  ساحة صحيحة، عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة:

1.  $R$  ساحة تقديرية متقطعة.
2.  $R$  ساحة مثاليات رئيسية وفيها مثالية أعظمية وحيدة  $P \neq 0$ .

3.  $R$  ساحة صحيحة نيوثرية وموضعية. تملك مثالية أعظمية رئيسية وحيدة غير صفرية.
4.  $R$  ساحة صحيحة نيوثرية ومغلقة بشكل كامل، وتملك مثالية أولية غير صفرية وحيدة.

## مبرهنة. 3.1:

لنكن  $R$  ساحة صحيحة وليست حقلاً، عندئذٍ الشرطان الآتيان متكافئان:

1.  $R$  ساحة تقديرية متقطعة.

2.  $R$  ساحة تقديرية ونيوثرية.

البرهان:

$1 \Leftrightarrow 2$  ينتج مباشرةً من المبرهنة (2, 1).

$2 \Leftrightarrow 1$  لنكن  $R$  ساحة تقديرية ونيوثرية، عندئذٍ حسب التمهيدية (1, 1)، فإن كل مثالية

في  $R$  هي مثالية رئيسية، ومنه تكون  $R$  ساحة مثاليات رئيسية، وحسب المبرهنة (1, 1)، فإن  $R$  تملك مثالية أولية غير صفرية وحيدة، بالتالي حسب التعريف، تكون  $R$  ساحة تقديرية متقطعة.

## مبرهنة. 4.1: [2]

لنكن  $R$  ساحة صحيحة موضعية وليست حقلاً، عندئذٍ  $R$  ساحة تقديرية متقطعة إذا وفقط إذا كانت كل مثالية كسرية غير صفرية لـ  $R$  عكوسة.

## تعريف. 3.1: [5]

تُسمى الساحة الصحيحة  $R$  ساحة بروفير (*Prüfer domain*)، إذا كانت كل مثالية منتهية التوليد وغير صفرية في  $R$  عكوسة.

مثال:

- كل ساحة مثاليات رئيسية هي ساحة بروفير.
- حلقة كثيرات الحدود بمتغير واحد فوق حقل ما  $K$  هي ساحة بروفير.

مبرهنة. 5.1: [5]

إذا كانت  $R$  ساحة بروفير، عندئذٍ كل مثالية كسرية منتهية التوليد لـ  $R$  عكوسة.

البرهان:

لتكن  $A$  مثالية كسرية منتهية التوليد لـ  $R$ ، عندئذٍ يوجد عنصر  $d \in R$  بحيث تكون

$dA$  مثالية في  $R$ ،

لنثبت أن المثالية  $dA$  منتهية التوليد.

بما أن  $A$  مثالية منتهية التوليد، عندئذٍ توجد  $a_1, \dots, a_s \in A$  بحيث  $A = \langle a_1, \dots, a_s \rangle$ ، ومن

ثم

$$\forall da \in dA : da = d \sum_{i=1}^s r_i a_i = \sum_{i=1}^s r_i da_i ; r_i \in R$$

ومنه نجد أن المثالية  $dA$  منتهية التوليد، وبما أن  $R$  ساحة بروفير، عندئذٍ فإن المثالية  $dA$  تكون

عكوسة، وبالتالي توجد مثالية كسرية  $B \perp R$  بحيث  $(dA)B = R$ ، فيكون  $A(dB) = R$ ،

ومنه المثالية  $A$  عكوسة.

مبرهنة. 6.1: [5]

إذا كانت  $R$  ساحة صحيحة، عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة:

1.  $R$  ساحة بروفير.
2. كل مثالية غير صفرية من  $R$  ومولدة بعنصرين عكوسة.
3. إذا كان  $AB = AC$ ، حيث  $A, B, C$  مثاليات من  $R$  و  $A$  مثالية غير صفرية منتهية التوليد، عندئذٍ  $B = C$ .
4. حلقة النسب  $R_P$  ساحة تقديرية، وذلك من أجل أي مثالية أولية فعلية  $P$  من  $R$ .
5.  $A(B \cap C) = AB \cap AC$ ، وذلك أيًا كانت المثاليات  $A, B, C$  من  $R$ .
6.  $(A + B)(A \cap B) = AB$ ، وذلك أيًا كانت المثاليات  $A, B$  من  $R$ .

7. إذا كانت  $A, C$  مثاليات من  $R$  حيث  $C$  مثالية غير صفرية ومنتھية التوليد و  $A \subseteq C$ ، فإنه توجد مثالية  $B$  من  $R$  تحقق  $A = BC$ .
8.  $(A + B): C = A:C + B:C$ ، وذلك أياً كانت المثاليات  $A, B, C$  من  $R$  حيث  $C$  مثالية منتھية التوليد.
9.  $C: (A \cap B) = C:A + C:B$ ، وذلك أياً كانت المثاليات  $A, B, C$  من  $R$  بحيث  $A, B$  مثاليات منتھية التوليد.
10.  $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$ ، وذلك أياً كانت المثاليات  $A, B, C$  من  $R$ .

## نتيجة 1.1: [5]

لنكن  $R$  ساحة صحيحة، عندئذٍ  $R$  ساحة بروفير إذا فقط إذا كانت  $R_M$  ساحة تقديرية، وذلك من أجل كل مثالية أعظمية  $M$  من  $R$ .

## تمهيدية 2.1: [5]

لنكن  $R$  حلقة و  $A, B$  مثاليتين في  $R$ ، عندئذٍ  $A = B$  إذا فقط إذا كان  $A_M = B_M$ ، وذلك من أجل كل مثالية أعظمية  $M$  في  $R$ .

## مبرهنة 7.1: [6]

لنكن  $R$  ساحة صحيحة، عندئذٍ  $R$  ساحة بروفير إذا كانت  $R_M$  ساحة بروفير، وذلك من أجل كل مثالية أعظمية  $M$  في  $R$ .

البرهان:

لنكن  $A, B, C$  مثاليات في  $R$  بحيث  $A$  منتھية التوليد و  $AB = AC$ . ولنثبت أن  $B = C$ .

يكفي أن نبرهن أن  $BR_M = CR_M$ ، وذلك من أجل كل مثالية أعظمية  $M$  في  $R$ .

لتكن  $M$  مثالية أعظمية ما في  $R$ ، عندئذ تكون  $AR_M$  مثالية منتهية التوليد و  $ABR_M = ACR_M$ ، ومنه  $AR_M \cdot BR_M = AR_M \cdot CR_M$ ، وبما أن  $R_M$  ساحة بروفير، عندئذ فإن  $BR_M = CR_M$ ، وبالتالي حسب التمهيدية (2.1)، يكون  $B = C$ .

سنقوم بدراسة العلاقة بين ساحات بروفير الموضعية والحلقات التقديرية، وذلك من خلال المبرهنة الآتية، والتي سيكون لها دوراً أساسياً في دراستنا لقواعد غروبنر فوق ساحات بروفير في الفقرة الثالثة من هذا البحث.

### مبرهنة 8.1:

لتكن  $R$  ساحة صحيحة موضعية، عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1.  $R$  ساحة بروفير.

2.  $R$  ساحة تقديرية.

البرهان:

$1 \Leftarrow 2$ . لنفرض أن  $R$  ساحة بروفير موضعية، عندئذ تكون  $R_P$  ساحة تقديرية، وذلك من أجل المثالية الأعظمية  $P$ .

لتكن  $A, B$  مثاليات في الحلقة  $R$ ، عندئذ تكون  $AR_P, BR_P$  مثاليات في الحلقة  $R_P$ ، ولنبين أن  $A \subseteq B$  لنفرض أن  $AR_P \subseteq BR_P$ .

أياً كان  $a \in A$ ، فإن  $a/1 \in BR_P$ ، عندئذ يوجد عنصر  $r \in R \setminus P$  بحيث  $ra \in B$ ، ولتكن  $C = \langle r \rangle$  المثالية المولدة بالعنصر  $r$ .

إذا كانت  $C \neq R$ ، عندئذ فإن  $C$  تكون محتواة في المثالية الأعظمية  $P$ ، وهذا غير ممكن، لذلك

$C = R$ ، عندئذ  $1 \in C$ ، وهكذا يوجد  $x \in R$  بحيث  $1 = xr$ ، بالتالي  $a = xra \in B$ ، ومنه نجد أن  $A \subseteq B$ ، أي أن  $R$  ساحة تقديرية.

$1 \Leftarrow 2$ . لنفرض أن  $R$  ساحة تقديرية، ولتكن  $A$  مثالية منتهية التوليد في  $R$ ، عندئذ حسب التمهيدية (1.1)، فإن  $A$  تكون مثالية رئيسية، وبالتالي عكوسة، ومنه نجد أن  $R$  ساحة بروفير.

## 2. قواعد غروينر:

سنقوم في هذه الفقرة بدراسة قواعد غروينر على الساحات الصحيحة النيوتيرية. لذلك سنعتبر في هذه الفقرة أن أي حلقة  $R$  هي ساحة صحيحة نيوتيرية دوماً ما لم نذكر خلاف ذلك.

### تعريف 1.2: [1]

لنكن  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  حلقة الحدوديات بعدد منتهٍ من المتغيرات فوق  $R$ ، حيث  $n$  عدد صحيح موجب، عندئذ:

- تُسمى كل حدودية من الشكل:  $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ ;  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  أحادية حد (*monomial*) أو جداء قوة (*Power product*)، وسنرمز لها اختصاراً  $X^\alpha$  حيث  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ .
- تُسمى كل حدودية في  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  من الشكل:  $cX^\alpha$ ;  $c \in R$  حد (*term*).

سنرمز اختصاراً للحلقة  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  بالرمز  $\mathcal{R}$ . كما سنرمز لمجموعة كل أحاديات الحد في الحلقة  $\mathcal{R}$  بالرمز  $T^n$ .

### تعريف 2.2: [1]

لنكن  $X^\alpha, X^\beta \in \mathcal{R}$  أحاديتي حد حيث  $X^\alpha = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$  و  $X^\beta = x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$  عندئذ نقول إن  $X^\alpha$  تقسم  $X^\beta$  إذا كان  $a_i \leq b_i$  وذلك من أجل كل  $i = 1, \dots, n$ . ونرمز لذلك بالرمز:  $X^\alpha | X^\beta$ ، ومن الواضح أن علاقة يقسم تشكل علاقة ترتيب جزئي على  $T^n$ .

ونقول إن  $aX^\alpha$  يقسم  $bX^\beta$  حيث  $a, b \in R$ ، إذا كان  $X^\alpha | X^\beta$  و  $a$  يقسم  $b$  في  $R$ .

نحتاج في دراستنا هذه إلى ترتيب عناصر  $T^n$  وفق علاقة ترتيب ثنائية. ومن الجدير بالذكر أنه يوجد هناك عدة أنواع لترتيب الحدود في  $T^n$  سنذكر منها في بحثنا هذا الترتيب المعجمي.

### تعريف. 3.2: [1]

يعرف الترتيب المعجمي (*lexicographical order*) على  $T^n$ ، مع اعتبار أن  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$  كالتالي: من أجل  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ ، عندئذ يكون  $X^\alpha <_{lex} X^\beta$  إذا فقط إذا كانت  $\alpha_i < \beta_i$  حيث  $\beta_i, \alpha_i$  أول مسططين مختلفين في  $\alpha, \beta$  بدءاً من اليسار. سوف نعبّر دائماً عن هذا الترتيب بـ "*lex*".

### تعريف. 4.2: [3]

لتكن  $f \in \mathcal{R}$ ، عندئذ الحدودية  $f$  تكتب بالشكل:  $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X^\alpha$ ;  $c_\alpha \in \mathbb{R}$  حيث  $c_\alpha \neq 0$  من أجل عدد منته فقط، وتسمى المجموعة  $\{X^\alpha; c_\alpha \neq 0\}$  حاملاً  $f$  (*support of f*).  
نلاحظ من أجل أي حدودية  $f$  فإن  $\text{supp}(f)$  تكون مجموعة منتهية. كما أن  $\text{supp}(f) = \emptyset$  إذا فقط إذا كانت  $f = 0$ .

### تعريف. 5.2: [1]

إذا كانت  $<$  علاقة ترتيب حدود على  $T^n$ ، ولتكن الحدودية  $f \in \mathcal{R}$ ،  $f \neq 0$ ، عندئذ إن  $f$  تكتب بالشكل الآتي:

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X^\alpha$$

حيث  $X^\alpha \in T^n$ ،  $0 \neq c_\alpha \in \mathbb{R}$

وبالتالي يمكننا تعريف المفاهيم والرموز الآتية:

$$mdeg(f) = \alpha \in \mathbb{N}^n; X^\alpha = \max\{X^\alpha \in \text{Supp}(f), c_\alpha \neq 0\} \quad \bullet$$

(*the multidegree of f*)

$$deg(f) = |mdeg(f)| \quad \bullet$$

(*the degree of f*)

- $lp(f) = X^{mdeg(f)}$  جداء القوة الرئيسي في  $f$   
(the leading powerb product of  $f$ )
- $lc(f) = a_{mdeg(f)}$  المعامل الرئيسي في  $f$   
(the leading coefficient of  $f$ )
- $lt(f) = lc(f)lp(f)$  الحد الرئيسي في  $f$  (the leading term of  $f$ )

تعريف. 6.2: [1]

لنكن  $E$  مجموعة جزئية من الحلقة  $\mathcal{R}$ ، عندئذٍ المجموعة المعرفة بالشكل الآتي:

$$Lt(E) = \langle lt(e) ; e \in E \rangle$$

تكون مثالية في  $\mathcal{R}$ ، وتسمى مثالية الحد الرئيسي لـ  $E$

(the leading term ideal of  $E$ )

تعريف. 7.2: [4]

نقول إن الحدودية  $f \in \mathcal{R} \neq 0$  قابلة للاختزال (تختزل) بواسطة المجموعة  $G \subseteq \mathcal{R}$  إذا

كان:

$$.lt(f) \in Lt(G)$$

تعريف. 8.2: [1]

لنكن  $f$  و  $h$  حدوديتان من  $\mathcal{R}$  و  $H = \{f_1, \dots, f_s ; f_i \neq 0 (1 \leq i \leq s)\}$  مجموعة

جزئية غير خالية من  $\mathcal{R}$ ، نقول إن  $f$  تختزل بخطوة واحدة إلى  $h$  بواسطة  $H$  إذا فقط إذا

كانت:

$$h = f - (c_1 X_1 f_1 + \dots + c_s X_s f_s)$$

وذلك من أجل  $c_1, \dots, c_s \in \mathcal{R}$  وجداءات القوة  $X_1, \dots, X_s$  حيث  $lp(f) = X_i lp(f_i)$

وذلك من أجل كل  $i$  عندما  $c_i \neq 0$  و  $lt(f) = c_1 X_1 lt(f_1) + \dots + c_s X_s lt(f_s)$

ونعبر عن ذلك بالرمز:  $f \xrightarrow{H} h$ .

تعريف. 9.2: [1]

لنكن  $f$  و  $h$  حدوديتان من  $\mathcal{R}$  و  $H = \{f_1, \dots, f_s; f_i \neq 0 (1 \leq i \leq s)\}$  مجموعة جزئية غير خالية من  $\mathcal{R}$ ، نقول إن  $f$  تختزل إلى  $h$  بواسطة عناصر  $H$  إذا وفقط إذا وجدت مجموعة من الحدوديات  $h_1, \dots, h_{t-1} \in \mathcal{R}$  بحيث:

$$f \xrightarrow{H} h_1 \xrightarrow{H} h_2 \xrightarrow{H} h_3 \dots \xrightarrow{H} h_{t-1} \xrightarrow{H} h$$

ونعبر عن ذلك بالرمز:  $f \xrightarrow{+} h$ ، ويكون عندئذٍ  $f - h \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ .

تعريف. 10.2: [4]

لنكن  $I$  مثالية في  $\mathcal{R}$  و  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t; g_i \neq 0, (1 \leq i \leq t)\} \subseteq I$  نقول إن  $G$  قاعدة غروبينر للمثالية  $I$  إذا وفقط إذا كان  $LT(G) = LT(I)$ .

مبرهنة. 1.2: [1]

لنكن  $I$  مثالية غير صفرية في  $\mathcal{R}$  و  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t; g_i \neq 0, (1 \leq i \leq t)\} \subseteq I$  عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة:

1.  $LT(G) = LT(I)$  (قاعدة غروبينر للمثالية  $I$ ).
2. من أجل أي حدودية  $f \in \mathcal{R}$ ، فإن  $f \in I$  إذا وفقط إذا كانت  $f \xrightarrow{+} 0$ .
3. أيًا كانت الحدودية  $f \in I$ ، عندئذٍ فإن  $f = \sum_{i=1}^m h_i g_i$  حيث  $h_1, h_2, \dots, h_m \in \mathcal{R}$  و  $lp(f) = \max_{1 \leq i \leq m} \{lp(h_i)lp(g_i)\}$ .

نتيجة. 1.2: [1]

إذا كانت  $G$  قاعدة غروبينر للمثالية  $I$  في  $\mathcal{R}$ ، عندئذٍ فإن  $I = \langle G \rangle$ .

هنا نلاحظ أن قاعدة غروبينر هي نوع خاص من المجموعات المولدة، ولكن من الجدير بالذكر أنه ليس بالضرورة أن تكون كل مجموعة مولدة هي قاعدة غروبينر.

### 3. قواعد غروينر فوق ساحات بروفير الموضوعية:

ندرس في هذه الفقرة خواص قواعد غروينر فوق ساحات بروفير الموضوعية، وخوارزمية إيجاد قاعدة غروينر فوق هذا النوع من الساحات أيضاً، انطلاقاً من المبرهنة (8.1) والمبرهنة (3.1).

#### تعريف 1.3:

لتكن  $R$  ساحة بروفير موضوعية و  $f \neq g$  حدوديات غير صفرية في  $R$ ، ولتكن  $<$  علاقة ترتيب على  $R$ ، وبفرض أن:

$\deg(f) = |\alpha|$  ,  $\deg(g) = |\beta|$  ;  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$   
ولتكن  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ، حيث  $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$ ، وذلك من أجل كل  $1 \leq i \leq n$  عندئذٍ فإن

$S - polynomial$  للحدوديتين  $f$  و  $g$  تُعرف بالشكل:

• إذا كان  $lc(g)$  يقسم  $lc(f)$ ، فإن:

$$S(f, g) = \frac{X^\gamma}{lp(f)} f - \frac{lc(f)}{lc(g)} \frac{X^\gamma}{lp(g)} g$$

• إذا كان  $lc(f)$  يقسم  $lc(g)$  و  $lc(g)$  لا يقسم  $lc(f)$ ، فإن:

$$.S(f, g) = \frac{lc(g)}{lc(f)} \frac{X^\gamma}{lp(f)} f - \frac{X^\gamma}{lp(g)} g$$

#### تعريف 2.3:

لنكن  $R$  ساحة بروفير موضعية و  $<$  علاقة ترتيب على  $R$ ، عندئذٍ تُعرف خوارزمية القسمة في  $R$  بالشكل:

لتكن الحدوديات  $f, f_1, \dots, f_s \in R$ ، عندئذٍ توجد حدودية  $r \in R$  و  $H = \{h_1, \dots, h_s\}$  مجموعة جزئية غير خالية من  $R$  بحيث يتحقق:

$$f = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \dots + h_s f_s + r$$

بحيث  $mdeg(f) \geq mdeg(h_i f_i)$ ، وإما أن تكون  $r = 0$  أو لا يوجد أي حد من حدود  $r$  يقبل القسمة على أي من  $lt(f_i)$  حيث  $i = 1, \dots, s$ .

وتُسمى الحدودية  $r$  باقى قسمة  $f$  بواسطة  $H$ ، وسنعبّر عن ذلك بالرمز:  $f \xrightarrow{H} r$ .

تعتبر المبرهنتان (1.3) و (2.3) هما المبرهنتان الأساسيتان بالنسبة لقواعد غروبنر فوق ساحات بروفير الموضعية، حيث نناقش في الأولى مسألة انتماء عنصر لمثالية في حلقة الحدوديات فوق ساحات بروفير الموضعية، أما في الثانية فقد أثبتنا أن كل مثالية من حلقة الحدوديات فوق ساحات بروفير الموضعية تملك قاعدة غروبنر، ولكن قبل الانتقال إلى هاتين المبرهنتين، سنقوم بإثبات التمهيديّة الآتية:

### تمهيديّة. 1.3:

لنكن  $R$  ساحة بروفير موضعية ولنكن  $I = \langle a_\alpha X^\alpha, \alpha \in A \subseteq \mathbb{N}^n \rangle$  مثالية في  $R$ ، عندئذٍ فإن الحد  $bX^\beta$  ينتمي للمثالية  $I$  إذا وفقط إذا وجد دليل  $\alpha \in A$  بحيث يتحقق:

$$X^\alpha \text{ يقسم } a_\alpha \text{ و } X^\beta \text{ يقسم } b.$$

البرهان:

لزوم الشرط: لنفرض أن  $bX^\beta \in I$ ، عندئذٍ فإن  $bX^\beta$  يكتب بالشكل:

$$bX^\beta = \sum_{i=1}^s c_i a_{\alpha_i} X^{\gamma_i} X^{\alpha_i}$$

حيث  $c_i, a_{\alpha_i} \in R$  و  $\gamma_i \in \mathbb{N}^n$  و  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in A$ .

بالتالي من أجل كل  $1 \leq i \leq s$ ، يكون  $\gamma_i + \alpha_i = \beta$  و  $b = \sum_{i=1}^s c_i a_{\alpha_i}$ ، ومنه نجد أن كل  $X^{\alpha_i}$  تقسم  $X^\beta$ ، وبما أن كل ساحة بروفير موضعية هي ساحة تقديرية، عندئذ فإن كل العناصر في  $R$  تكون متقارنة بالنسبة لعلاقة "يقسم"، عندئذ يوجد دليل، وليكن  $\alpha_1 \in A$ ، بحيث  $a_{\alpha_1}$  يقسم كل العناصر  $a_{\alpha_i}$ ، بالتالي فهو يقسم  $b$ .  
كفاية الشرط: واضح.

### مبرهنة 1.3:

لتكن  $R$  ساحة بروفير موضعية و  $<$  علاقة ترتيب على  $\mathcal{R}$ ، ولتكن  $I$  مثالية غير صفرية في  $\mathcal{R}$  و  $f$  حدودية في  $\mathcal{R}$ ، بفرض أن  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\} \subseteq I$  قاعدة غروينر للمثالية  $I$ ، عندئذ:

1. باقي قسمة  $f$  بواسطة  $G$  وحيد، أي توجد حدودية وحيدة  $r \in \mathcal{R}$  تحقق الخاصتين التاليتين:

i. لا يوجد أي حد في  $r$  يقبل القسمة على أي من  $lt(g_i)$ ، حيث

$$i = 1, \dots, t$$

ii. توجد حدودية  $g \in I$  بحيث  $f = g + r$

2.  $f \in I$  إذا وفقط إذا كانت  $f \rightarrow_+^G 0$ .

3.  $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_t \rangle$

البرهان:

1. بحسب خوارزمية القسمة توجد حدوديات  $r, q_1, \dots, q_t \in \mathcal{R}$  بحيث أن:

$$f = q_1 g_1 + \dots + q_t g_t + r$$

والحدودية  $r$  تحقق الخاصة (i).

وبما أن  $G$  قاعدة غروينر للمثالية  $I$ ، عندئذ فإن  $q_1 g_1 + \dots + q_t g_t \in I$ ، لنضع  $g =$

$$q_1 g_1 + \dots + q_t g_t$$

عندئذ تكون  $f = g + r$ ؛  $g \in I$

لنفرض جلاً أن الحدودية  $r$  ليست وحيدة، عندئذ توجد حدودية  $\dot{r} \in \mathcal{R}$  بحيث  $\dot{r} \neq r$  وتحقق

الخاصتين (i) و (ii)، ومن ثم توجد حدودية  $\dot{g} \in I$  بحيث  $\dot{g} = g + \dot{r}$ ، بالتالي  $f =$

$$\dot{g} + r$$

ومن ثم  $\mathbf{0} \neq \mathbf{r} - \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{g}} - \mathbf{g} \in I$  عندئذٍ بما أن قاعدة غروبنر للمثالية  $I$ ، فإنه حسب المبرهنة السابقة، يكون  $lt(\mathbf{r} - \dot{\mathbf{r}})$  يقبل القسمة على أحد العناصر  $lt(\mathbf{g}_i)$  حيث  $i = 1, \dots, t$ ، ولكن هذا مستحيل نظراً لعدم وجود أي حد في  $\mathbf{r}$  و  $\dot{\mathbf{r}}$  يقبل القسمة على أي من  $lt(\mathbf{g}_i)$  حيث  $i = 1, \dots, t$ ، وهذا تناقض مع التعريف، ومنه  $\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}$ ، أي إن الباقي وحيد.

2. إذا كانت  $\mathbf{f} \xrightarrow{G} \mathbf{0}$ ، عندئذٍ  $\mathbf{f} \in I$  عندئذٍ  $\mathbf{f} \in \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_t \rangle$ .

وبالعكس إذا كانت  $\mathbf{f} \in I$ ، عندئذٍ بما أن  $\mathbf{f} = \mathbf{f} + \mathbf{0}$  وبحسب (1)، يكون  $\mathbf{f} \xrightarrow{G} \mathbf{0}$ .  
3. ينتج مباشرةً من 2.

قبل الانتقال إلى المبرهنة (2.3) سنقوم بإثبات التمهيديّة الآتية:

### تمهيديّة. 2.3:

لنكن  $R$  ساحة بروفير موضعية وليست حقلاً، ولنكن  $I = \langle \mathbf{a}_\alpha X^\alpha, \alpha \in A \subseteq \mathbb{N}^n \rangle$  مثالية في  $R$ ، عندئذٍ توجد  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in A$  بحيث يتحقق:  $I = \langle \mathbf{a}_{\alpha_1} X^{\alpha_1}, \dots, \mathbf{a}_{\alpha_s} X^{\alpha_s} \rangle$ .  
البرهان:

لنبرهن بالاستقراء على عدد المتغيرات لحلقة كثيرات الحدود  $n$ .

من أجل  $n = 1$ ، بما أن كل ساحة بروفير موضعية هي ساحة تقديرية، عندئذٍ فإن كل العناصر في  $R$  تكون مقارنة بالنسبة لعلاقة "يقسم"، عندئذٍ يوجد  $\beta \in A$  بحيث يكون  $\mathbf{a}_\beta$  يقسم  $\mathbf{a}_\alpha$ ، وذلك من أجل كل  $\alpha \in A$ .

لنكن  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  مجموعة جزئية أعظمية من  $A$  بحيث يكون  $\gamma_1 < \beta, \dots, \gamma_k < \beta$  عندئذٍ تكون

$$I = \langle \mathbf{a}_{\gamma_1} X^{\gamma_1}, \dots, \mathbf{a}_{\gamma_k} X^{\gamma_k}, \mathbf{a}_\beta X^\beta \rangle$$

لنفرض أن القضية صحيحة من أجل  $n - 1$ .

ولنكن  $J$  مثالية في  $R[x_1, \dots, x_{n-1}]$  مولدة بالحدود  $\mathbf{a}_\alpha X^\alpha$  بحيث  $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$  و  $\mathbf{a}_\alpha X^\alpha x_n^m \in I$  حيث  $m \geq 0$ . بالتالي، حسب فرضية الاستقراء، توجد مجموعة منتهية من الحدود تولد  $J$ ، ولنكن

$$N = \{ a_{\alpha_1} X^{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_r} X^{\alpha_r} \}$$

عندئذٍ من أجل كل حد  $a_{\alpha_i} X^{\alpha_i} \in N$  يوجد  $0 \leq m_i \in \mathbb{N}$  بحيث يكون  $a_{\alpha_i} X^{\alpha_i} x_n^{m_i} \in I$ .

لتكن  $m = \max\{m_1, \dots, m_r\}$ ، ومن ثم من أجل كل  $0 \leq b < m$  فإننا سنعرف المجموعة  $N_b$  بالشكل:

$$a_{\alpha} X^{\alpha} x_n^b \in I \text{ حيث } N_b = \{ a_{\alpha} X^{\alpha} \in R[x_1, \dots, x_{n-1}] \}$$

عندئذٍ، حسب فرضية الاستقراء، توجد مجموعة منتهية من الحدود تولد  $N_b$ ، وسنرمز لها بالرمز  $N_{b_1}$ ، كما سنرمز لمجموعة كل الحدود  $a_{\alpha} X^{\alpha} x_n^b$  حيث  $a_{\alpha} X^{\alpha} \in N_{b_1}$  بالرمز  $N_{b_1} x_n^b$  بالتالي المجموعة

$$\{ a_{\alpha_1} X^{\alpha_1} x_n^{m_1}, \dots, a_{\alpha_r} X^{\alpha_r} x_n^{m_r} \} \cup \bigcup_{b=0}^{m-1} N_{b_1} x_n^b$$

تكون منتهية وتحتوي مجموعة تولد  $I$ ، لأنه أياً كان الحد  $X = a_{\alpha} X^{\alpha} x_n^d \in I$  نجد أنه إذا كان  $d \geq m$ ، عندئذٍ يوجد حد في المجموعة  $\{ a_{\alpha_1} X^{\alpha_1} x_n^{m_1}, \dots, a_{\alpha_r} X^{\alpha_r} x_n^{m_r} \}$  يقسم  $X$ .

وإذا كان  $0 \leq d < m$ ، عندئذٍ يوجد حد في  $N_{d_1} x_n^d$  يقسم  $X$ .

### مبرهنة 2.3:

لتكن  $R$  ساحة بروفير موضعية وليست حقلاً و  $<$  علاقة ترتيب على  $\mathcal{R}$ ، ولتكن  $I$  مثالية غير صفرية في  $\mathcal{R}$ ، عندئذٍ فإن المثالية  $I$  تملك قاعدة غروبنر  $G$ .

البرهان :

ينتج من التمهيدية (1.3) والتمهيدية (2.3).

### مبرهنة 3.3:

لتكن  $R$  ساحة بروفير موضعية و  $<$  علاقة ترتيب على  $\mathcal{R}$ ، ولتكن الحدوديات  $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{R}$  بحيث  $mdeg(f_i) = \gamma, 1 \leq i \leq s$ ، عندئذٍ إذا وجدت عناصر

$a_1, \dots, a_s \in R$  بحيث تكون  $mdeg(\sum_{i=1}^s a_i f_i) < \gamma$ ، عندئذٍ فإن  $\sum_{i=1}^s a_i f_i$  يكتب  
 كتركيب خطي لـ  $S(f_i, f_j)$  بمعاملات من  $R$ ، حيث  $1 \leq i, j \leq s$ ، ولكل  $S(f_i, f_j)$  تكون  $mdeg(S(f_i, f_j)) < \gamma$ .  
 البرهان:

بما أن كل ساحة بروفير موضعية هي ساحة تقديرية، عندئذٍ لنفرض أن

$$|lc(f_1)| \dots |lc(f_{s-1})| |lc(f_s)| \text{ لهذا، من أجل كل } i < j \text{ فإن:}$$

$$S(f_i, f_j) = f_i - \frac{lc(f_i)}{lc(f_j)} f_j$$

وتكون  $mdeg(S(f_i, f_j)) < \gamma$

بالتالي:

$$\sum_{i=1}^s a_i f_i = a_1 \left( f_1 - \frac{lc(f_1)}{lc(f_2)} f_2 \right) + \left( a_2 + \frac{lc(f_1)}{lc(f_2)} a_1 \right) \left( f_2 - \frac{lc(f_2)}{lc(f_3)} f_3 \right)$$

$$+ \dots + \left( a_{s-1} + \frac{lc(f_{s-2})}{lc(f_{s-1})} a_{s-2} + \dots + \frac{lc(f_1)}{lc(f_{s-1})} a_1 \right) \left( f_{s-1} - \frac{lc(f_{s-1})}{lc(f_s)} f_s \right)$$

$$+ \left( a_s + \frac{lc(f_{s-1})}{lc(f_s)} a_{s-1} + \dots + \frac{lc(f_1)}{lc(f_s)} a_1 \right) f_s$$

وبما أن  $mdeg(\sum_{i=1}^s a_i f_i) < \gamma$  عندئذٍ فإن  $a_s + \frac{lc(f_{s-1})}{lc(f_s)} a_{s-1} + \dots + \frac{lc(f_1)}{lc(f_s)} a_1 = 0$

$$\frac{lc(f_1)}{lc(f_s)} a_1 = 0$$

ذكرنا سابقاً أن كل قاعدة غروبنر لمثالية ما هي مجموعة مولدة لهذه المثالية، ولكن ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة مولدة لمثالية قاعدة غروبنر لها بشكل عام.  
 وسنقوم فيما يلي بإيجاد الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة المولدة لمثالية  $I$  في ساحة بروفير موضعية  $R$  هي قاعدة غروبنر.

مبرهنة 4.3:

لتكن  $R$  ساحة بروفير موضعية و  $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$  مثالية في  $R$ ، ولتكن  $\langle$  علاقة ترتيب على  $R$ ، عندئذٍ تكون  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$  قاعدة غروبنر للمثالية  $I$  إذا وفقط إذا كان من أجل كل  $i \neq j$  فإن باقي قسمة  $S(g_i, g_j)$  بواسطة  $G$  يساوي الصفر.

البرهان:

لزوم الشرط: لتكن  $G$  قاعدة غروبنر للمثالية  $I$ ، نلاحظ أنه من أجل أي حدوديتين  $g_i, g_j \in I$ ، حيث  $i \neq j$ ، فإن  $\langle g_i, g_j \rangle \subseteq I$ ، وبما أن  $G$  قاعدة غروبنر للمثالية  $I$ ، عندئذٍ حسب المبرهنة (1.3)، فإن  $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G} 0$ .

كفاية الشرط: لتكن  $f \in I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ ، عندئذٍ فإن:

$$f = \sum_{i=1}^s h_i g_i \quad (*)$$

حيث  $h_1, \dots, h_s \in R$  و  $mdeg(f) \leq \max_{1 \leq i \leq s} (h_i g_i)$

إذا كانت  $mdeg(f) = \max_{1 \leq i \leq s} (h_i g_i)$ ، عندئذٍ توجد مجموعة جزئية  $A \subseteq \{1, \dots, s\}$

بحيث إنه من أجل كل  $i \in A$ ، تكون  $mdeg(f) = \max_{1 \leq i \leq s} (h_i g_i)$

وبما أن  $R$  ساحة بروفير موضعية، فإن المعاملات الرئيسية  $lc(h_i g_i)$  للحدوديات  $h_i g_i$  حيث  $i \in A$  تكون متقارنة بالنسبة لعلاقة يقسم، وبالتالي يوجد دليل  $i_0 \in A$  بحيث إنه من أجل كل  $i \in A$ ، يكون  $lc(h_{i_0} g_{i_0})$  يقسم  $lc(h_i g_i)$ ، ومنه نجد أن  $lt(f) \in \langle lt(g_{i_0}) \rangle \subseteq \langle lt(g_1), \dots, lt(g_s) \rangle$  أي إن  $G$  هي قاعدة غروبنر للمثالية  $I$ .

إذا كانت  $mdeg(f) < \max_{1 \leq i \leq s} (h_i g_i)$ ، عندئذٍ توجد بعض الحدود الرئيسية في (\*) درجتها أكبر من درجة  $f$ ،

ويمكن اختصار هذه الحدود حسب المبرهنة السابقة وذلك من خلال إعادة كتابتها بدلالة  $S - polynomial$ ، وبما أن  $S - polynomial$  تختزل إلى الصفر بواسطة  $G$ ، عندئذٍ يمكن استبدالها بعبارة تتضمن اختصار أقل، ومن ثم نحصل على عبارة  $f$  لها أقل اختصار للحدود الرئيسية، ونتابع حتى نصل إلى نفس الحالة الأولى.

4. خوارزمية لحساب قواعد غروبندر في ساحات بروفير الموضوعية:

سنقدم فيما يلي خوارزمية لحساب قاعدة غروبندر لمثالية  $I$  انطلاقاً من مجموعة مولدة لها.

لتكن  $R$  ساحة بروفير موضوعية و نيوترية و  $<$  علاقة ترتيب على  $R$ ، ولتكن  $I = <$  مثالية غير صفرية في  $R$ ، عندئذٍ بالاعتماد على المبرهنة (8.1)، نجد أنه يمكننا تطبيق الخوارزمية الآتية لحساب قاعدة غروبندر من أجل المثالية  $I$  في الحلقة  $R$ .

**المدخلات:**  $g_1, \dots, g_s \subseteq R$  ,  $g_i \neq 0$  ( $1 \leq i \leq s$ )  
**المخرجات:** قاعدة غروبندر للمثالية  $\langle g_1, \dots, g_s \rangle$  حيث  $\{g_1, \dots, g_s\} \subseteq G$

**G**

البداية:

$G = \{g_1, \dots, g_s\}$

كرر:

$\hat{G} = G$

من أجل كل  $f \neq g$  في  $\hat{G}$  اعمل

$S(f, g) \xrightarrow{\hat{G}} h$

إذا  $h \neq 0$ ، عندئذٍ  $G = \hat{G} \cup \{h\}$

حتى  $G = \hat{G}$ .

مثال 1:

لتكن  $I = \langle f_1, f_2 \rangle$  مثالية في الحلقة  $R[x, y]$  حيث  $R = \mathbb{Z}_{(3)}$  هي توضع  $\mathbb{Z}$  بالنسبة للمثالية الأولية المولدة بالعدد 3 و  $f_1 = y^2 - 3$  ,  $f_2 = xy - 6$ ، وليكن  $<$  الترتيب المعجمي حيث  $x > y$ .

من أجل حساب قاعدة غروينر للمثالية  $I$  في البداية نضع

$$G = \{f_1, f_2\}$$

ولتكن  $\hat{G} = G$  بالتالي:

$$S(f_1, f_2) = \frac{xy^2}{y^2} f_1 - \frac{xy^2}{xy} f_2 = x(y^2 - 3) - y(xy - 6) = -3x + 6y$$

وهي حدودية مختزلة بواسطة  $G$  لنضع  $f_3 = -3x + 6y$ ، عندئذ:

$$G = \hat{G} \cup \{f_3\} = \{f_1, f_2, f_3\}$$

لتكن  $\hat{G} = G$  بالتالي:

$$S(f_2, f_3) = -3 \frac{xy}{xy} f_2 - \frac{xy}{x} f_3 = -3(xy - 6) - y(-3x + 6y)$$

$$= -6y^2 + 18 \xrightarrow{f_1} 0$$

$$S(f_1, f_3) = -3 \frac{xy^2}{y^2} f_1 - \frac{xy^2}{x} f_3 = -3x(y^2 - 3) - y^2(-3x + 6y)$$

$$= 9x - 6y^3$$

$$S(f_1, f_3) = 9x - 6y^3 \xrightarrow{f_3} -6y^3 + 18y \xrightarrow{f_1} 0$$

ومنه تكون المجموعة  $G = \{f_1, f_2, f_3\}$  هي قاعدة غروينر للمثالية  $I$ .

## مثال 2:

لتكن  $I = \langle f_1, f_2 \rangle$  مثالية في الحلقة  $R[x, y]$  حيث  $R = \mathbb{Z}_{\langle 2 \rangle}$  هي توضع  $\mathbb{Z}$  بالنسبة

للمثالية الأولية المولدة بالعدد 2 و  $f_2 = xy - 4$  ,  $f_1 = x^2 - 2$  , وليكن  $<$  الترتيب

المعجمي حيث  $x > y$ .

من أجل حساب قاعدة غروينر للمثالية  $I$  في البداية نضع

$$G = \{f_1, f_2\}$$

ولتكن  $\hat{G} = G$  بالتالي:

$$S(f_1, f_2) = \frac{x^2y}{x^2} f_1 - \frac{x^2y}{xy} f_2 = y(x^2 - 2) - x(xy - 4) = 4x - 2y$$

وهي حدودية مختزلة بواسطة  $G$  لنضع  $f_3 = 4x - 2y$ ، عندئذ:

$$G = \hat{G} \cup \{f_3\} = \{f_1, f_2, f_3\}$$

لتكن  $\tilde{G} = G$  بالتالي:

$$\begin{aligned} S(f_1, f_3) &= 4 \frac{x^2}{x^2} f_1 - \frac{x^2}{x} f_3 = 4(x^2 - 2) - x(4x - 2y) \\ &= 2xy - 8 \xrightarrow{f_2} 0 \end{aligned}$$

$$S(f_2, f_3) = 4 \frac{xy}{xy} f_2 - \frac{xy}{x} f_3 = 4(xy - 4) - y(4x - 2y) = 2y^2 - 16$$

وهي حدودية مختزلة بواسطة  $G$  لنضع  $f_4 = 2y^2 - 16$  عندئذٍ

$$G = \tilde{G} \cup \{f_4\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

لتكن  $\tilde{G} = G$  بالتالي:

$$\begin{aligned} S(f_1, f_4) &= 2 \frac{x^2 y^2}{x^2} f_1 - \frac{x^2 y^2}{y^2} f_4 = 2y^2(x^2 - 2) - x^2(2y^2 - 16) \\ &= 16x^2 - 4y^2 \end{aligned}$$

$$S(f_1, f_4) = 16x^2 - 4y^2 \xrightarrow{f_1} -4y^2 + 32 \xrightarrow{f_4} 0$$

$$\begin{aligned} S(f_2, f_4) &= 2 \frac{xy^2}{xy} f_2 - \frac{xy^2}{y^2} f_4 = 2y(xy - 4) - x(2y^2 - 16) \\ &= 16x - 8y \xrightarrow{f_3} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(f_3, f_4) &= \frac{xy^2}{x} f_3 - \frac{4xy^2}{2y^2} f_4 = y^2(4x - 2y) - 2x(2y^2 - 16) \\ &= 32x - 2y^3 \end{aligned}$$

$$S(f_3, f_4) = 32x - 2y^3 \xrightarrow{f_3} -2y^3 + 16y \xrightarrow{f_4} 0$$

عندئذٍ تكون المجموعة  $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  هي قاعدة غروبنر للمثالية  $I$ .

المراجع:

- [1] ADAMS,W and LOUSTAUANU , PH (1994)– An Introduction to Grobner Bases .  
American Mathematical Society , Providence , 306 P .
- [2] DUMMIT,D.S. and FOOTE,R.M.(2004)– Abstract Algebra . John  
wiley & Sons , Ins ,Third Edition.Hoboken,NJ,932.P.
- [3] ENE,V.and HERZOG,J. (2010)–Grobner Bases in Commutative  
Algebra. American Mathematical Society Providence , Rhode  
Island,Volume 130,164.p.
- [4] GIANNI,Pand TRAGE,B and ZACHARIAS,G.(1998). Grobner Bases  
and Primary Decomposition of Polynomial Ideals, Academic Press  
Limited,150.P–151.
- [5] LARSEN,M.D. and MCCARTHEY,P.J. (1971)– Multiplicative Theory  
of Ideals . Academic Press , New York and London,298.P .
- [6] LUCAS,T.G. (1986). Some Results on Prufer Rings , Pacific Journal  
of Mathematics Vol .124, NO.2, 338.P–339 .
- [7] YENGUI,I. (2005). Computing a Grobner Bases of a Polynomial  
Ideal over a Principal Domain , Department of Mathematics, Faculty of  
Sciences of Sfax,2.P–3.
- [8] YENGUI,I. (2008)–Projective Modules over Polynomial Ring and  
Dynamical Gröbner Bases , Summer School and Conference  
Mathematics , Algorithms and Proofs , Department of Mathematics ,  
Faculty of Sciences of Sfax ,3000 Sfax, Tunisia .95.p.

[9] YENGUI,I. (2021)–Computing Algebra:Course and Exercises with  
Scientific,Singapore.255.p. Solutions.World

## اصطناع استراتات بروبانول - 1 انطلاقاً من حمض الميريستيك وحمض الأوليك بوجود الأمبرلست -

15

تقديم الطالبة: علا رياض البيريني.

إشراف الدكتورة: صبا ناصيف.

### الملخص

تلعب الاستراتات دوراً محورياً في العديد من التطبيقات الصناعية واليومية، نظراً لخصائصها الفيزيائية والكيميائية المميزة حيث تستخدم بشكل واسع في مجال المستحضرات الدوائية ومواد التجميل. يعد تحضير استراتات الأحماض الدسمة باستخدام تفاعل الأستر مع الكحولات من إحدى هذه الطرق الأساسية، وقد اعتمد البحث الحالي على هذه التقنية بطريقة مبتكرة تبتعد عن استخدام الحفازات الحمضية التقليدية التي تتسبب في مشاكل بيئية وتقنية. وتم بدلاً من ذلك، استخدام الحفاز Amberlyst-15 كبديل أكثر أماناً واستدامة، نظراً لسهولة فصله وإمكانية إعادة استخدامه. تم تحضير استراتات البروبانول-1 اعتماداً على حمض الميريستيك وحمض الأوليك باستخدام الحفاز Amberlyst-15. أظهرت النتائج أن الإستر الناتج من حمض الميريستيك يملك خصائص جيدة ومردود أعلى بلغ 72% بعد 7 ساعات من التفاعل عند درجة حرارة  $80^{\circ}\text{C}$ ، في حين بلغ مردود الأستر من حمض الأوليك 69% بعد 12 ساعة. تم التأكد من بنية المركبات باستخدام تقنيات التحليل الطيفي مثل  $^1\text{H-NMR}$  و FT-IR. كما تم حساب معامل التوازن بين الماء والزيت (HLB)، بالإضافة إلى دراسة الخصائص الحرارية باستخدام التحليل الحراري التفاضلي. أظهرت النتائج كفاءة الحفاز في تحضير استراتات البروبانول-1، كما تميز الأستر الناتج من حمض الميريستيك بخصائص حرارية مناسبة، مما يجعله مرشحاً واعداً للإستخدام في التطبيقات الصناعية، مقارنة بالإستر الناتج من حمض الأوليك.

الكلمات المفتاحية:

حمض الميريستيك - حمض الأوليك - أمبرلست 15 - الإستراتات الدسمة - معامل توازن الماء والزيت (HLB) - المسح الحراري التفاضلي DSC.

## Synthesis of 1-propanol esters starting from myristic acid and oleic acid in the presence of amberlyst-15.

### Abstract

The ester plays a central role in many industrial and everyday applications due to its distinctive physical and chemical properties. It is widely used in the pharmaceutical and cosmetic fields. The preparation of fatty acid esters through esterification with alcohols is one of the fundamental methods. In this study, this technique was adopted efficiently, by avoiding the use of traditional acidic catalysts, which pose environmental and technical problems. Instead, Amberlyst-15 catalyst was used as a safer and more sustainable alternative, owing to its ease of separation and reusability. Propanol-1 esters were synthesized based on myristic acid and oleic acid using the Amberlyst-15 catalyst. The results showed that the ester derived from myristic acid exhibited good properties, with a higher yield of 72% after 7 hours of reaction at 80°C, while the ester from oleic acid achieved a yield of 69% after 12 hours. The structures of the compounds were confirmed using spectroscopic analysis techniques such as <sup>1</sup>H-NMR and FT-IR. Additionally, the water-oil partition coefficient (HLB) was calculated, and the thermal properties were studied using Differential Scanning Calorimetry (DSC). The results demonstrated the efficiency of the catalyst in preparing propanol-1 esters. The ester from myristic acid showed suitable thermal characteristics, making it a promising candidate for industrial applications, compared to the ester derived from oleic acid.

Keywords:

myristic acid, oleic acid, Amberlyst-15, fatty acid esters, hydrophilic-lipophilic balance (HLB), thin-layer chromatography, differential scanning calorimetry.

## 1. المقدمة: (Introduction)

شهدت الصناعات الكيميائية في العقود الأخيرة تطوراً ملحوظاً، مما أتاح إنتاج العديد من المركبات ذات الأهمية في التطبيقات الصناعية واليومية. ومن أبرز هذه المركبات الإسترات الدسمة، التي تتميز بخصائص فيزيائية وكيميائية مميزة مما يؤدي إلى استخدامها في الصناعات الدوائية ومواد التجميل وصناعة الأغذية، فضلاً عن دورها كمواد تشحيم وملدنات ومكونات أساسية للمستحلبات[1]. تُحضر هذه الإسترات من تفاعل الأحماض الدسمة مع الكحولات وفق أسترة فيشر[2]، تعاني تفاعلات الأسترة من انخفاض المردود بسبب وصولها إلى حالة التوازن الديناميكي الأمر الذي يحد من كفاءة الإنتاج، لذا لجأ الباحثين إلى استخدام حفازات متنوعة لتحسين المردود، حيث نالت الحفازات الحمضية الاهتمام الأكبر وكان حمض الكبريت الأكثر استخداماً لقدرته على سحب الماء ومنحه بروتونات للوسط التي تقوم ببرتنة المجموعة الكربوكسيلية وتسريع التفاعل للحصول على مردود أعلى كما أظهر كفاءة عالية ونسبة تحول تصل إلى 63.2% مقارنة بحمض كلور الماء وبارا تولوين حمض السلفونيك لإنتاج الأسيئات الإيثيلي[3] وفي ضوء أسترة الأحماض الدسمة والحصول على الأسترات الميتيلية للأحماض الدسمة بوجود حمض الكبريت تم الحصول على نسبة تحول تصل إلى 65% خلال زمن 100min [4]، كما دُرِس تفاعل الأسترة بين حمض الميريستيك مع عدد من الكحولات وتم الحصول على أعلى مردود بوجود بوتانول-1 وحمض الكبريت[5]. ورغم فعالية الحفازات الحمضية إلا أن استخدامها يرافقه تحديات متعددة منها التآكل وإنتاج نواتج ثانوية يصعب التخلص منها أو إعادة تدويرها[6]، لذا توجهت الأبحاث نحو الحفازات الصلبة غير المتجانسة التي تمتاز بسهولة الفصل وإمكانية إعادة الاستخدام، مما يجعلها أكثر أماناً وصداقة للبيئة. فقد تمت أسترة حمض البنوليك بوجود الزيوليت[7]. كما تم استخدام أكسيد الزنك المدعم بالزيوليت في أسترة الغليسيرول بالأحماض الدسمة وذلك عند درجات حرارة مرتفعة لزيادة المردود[8]. وأبدى التحفيز الأنزيمي في تفاعل أسترة الغليكويز مع الأحماض الدسمة كفاءة جيدة حيث تم الحصول على مردود عالٍ [9]. يُعدّ الحفاز Amberlyst-15، وهو راتنج تبادل أيوني قوي الحموضة، خياراً مثالياً لهذه التطبيقات، إذ يمتاز بقدرته العالية على تحفيز تفاعلات الأسترة، مع الحفاظ على كفاءته عبر عدة مرات حيث استخدم في عملية أسترة حمض الأوليك بوجود الإيثانول حيث تم الوصول إلى حالة الاتزان بعد حوالي 6 ساعات، مع تحقيق نسبة تحول تزيد عن 60% [10]. ومع ذلك، لم يتم العثور على أي دراسات تتناول أسترة البروبانول-1 مع حمض الأوليك وحمض الميريستيك بوجود Amberlyst 15 كمحفز. ويبين الجدول 1 عدد من الحفازات المستخدمة في أسترة الأحماض الدسمة في ظل ظروف تجريبية مختلفة من درجة حرارة وزمن تفاعل ومردود.

جدول 1: استخدام حفازات مختلفة ضمن شروط مختلفة لاصطناع أسترات أحماض دسمة

المواد المتفاعلة	الحفاز المستخدم	درجة الحرارة T(C°)	زمن التفاعل (min)	المردود	المرجع
Oleic acid/ 1-octanol	DBSA (dodecylbenzene sulfonic acid)	23	1440	98%	11
Oleic acid/ n-Butanol	Zr(SO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> . 4H <sub>2</sub> O	120	480	94.5%	12
Palm fatty acid distillate (PFAD)/ Methanol	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	120	70	99.4	13
Oleic acid/ Methanol	Amberlyst-46	100	120	98.6	14
1Oleic acid / Stigmasterol	Candida rugosa lipase	45	960	97.3	15

2. هدف البحث وأهميته (Research Aim and importance) :

- 1- يهدف البحث إلى تطوير منهجية فعالة وخضراء لتحضير استرات دسمة انطلاقاً من حموض دسمة مشبعة (الميريستيك) وأخرى غير مشبعة (الأوليك) وذلك بإجراء التفاعل في الطور السائل باستخدام الحفاز الصلب (Amberlyst-15) بدلاً من الطريقة التقليدية بالصهر الحمضي، حيث تتيح هذه الطريقة تحسين مردود التفاعل ضمن شروط معتدلة.
- 2- دراسة الاستقرار الحراري للاسترات المحضرة باستخدام المسح الحراري التفاضلي (DSC) لتحديد مدى ملاءمتها للتطبيقات الصناعية.

3. القسم العملي:

3.1 الأجهزة والأدوات المستخدمة:

1- ميزان تحليلي حساس بدقة تصل إلى 0.0001 gr

2- ميزان حرارة لمراقبة درجة حرارة التفاعل.

- 3- سخانة كهربائية مزودة بمحرك مغناطيسي.
- 4- فرن تجفيف كهربائي.
- 5- مضخة مائية موصولة بمكثف عكوس.
- 6- حوالة زجاجية ثنائية المأخذ سعة 100 ml
- 7- قمع فصل زجاجي سعة 100 ml
- 8- ديبين ستارك.
- 9- جهاز طيف الأشعة ماتحت الأحمر FT-IR -4100 ومن شركة Jasco اليابانية.
- 10- جهاز طيف الطنين النووي المغناطيسي بروتوني نموذج 400 MHZ من شركة Bruker السويسرية.
- 11- صفائح كروموتوغرافيا الطبقة الرقيقة من الألمنيوم مطلية بالسيليكا جل 60F254 قياس 20\*20 من شركة Merck الألمانية.
- 12- ورق ترشيح من شركة Macherey-Nagel/ Germany ذو مسامات 110 mm (syringe filter) بمسام تساوي (0.45) ميكرو متر.
- 13- جهاز المسح الحراري التفاضلي - مخبر الهندسة البيئية - كلية الهندسة المدنية - جامعة حمص.

### 3.2 المواد الكيميائية المستخدمة:

- 1- حمض الميريستيك بنقاوة 98% من إنتاج شركة Merck.
- 2- حمض الأوليك بنقاوة 99% من إنتاج شركة Merck.
- 3- البروبانول-1 بنقاوة 99.9% من إنتاج شركة Sigma Aldrich.
- 4- أمبرليست-15 عالي النقاوة من شركة Merck.

5- التولوين نقاوة 99% من شركة Sigma Aldrich.

6- الكلوروفورم بنقاوة 99% من شركة Sigma Aldrich.

7- كبريتات الصوديوم اللامائية نقاوة 98% من شركة Merck.

### 3.3 طريقة العمل:

حُضِر استر بروبييل حمض دسم، انطلاقاً من حمض الميريستيك وحمض الأوليك، بإذابة 0.05 مول أي 11.4gr من حمض الميريستيك و 14.12gr من حمض الأوليك في 10 مل من التولوين كمذيب للفاعل. وذلك في حوجلة كروية بسعة 100 مل مزودة بحمام زيتي ومبرد عكوس، وسخانة، ومحرك مغناطيسي، بالإضافة إلى جهاز ديين ستارك. بعد إذابة الحمض تماماً، يُضاف إلى المحلول 0.58 غرام من حفاز أمبرليست-15، ثم تُرفع درجة الحرارة إلى 80 درجة مئوية، ويُضاف البروبانول-1 بمقدار 0.05 مول كمتفاعل. يتم سحب الماء الناتج خلال التفاعل بواسطة جهاز ديين ستارك، مع تتبع التفاعل من خلال كروماتوغرافيا الطبقة الرقيقة باستخدام جملة جرف مكونة من (دي كلورو الإيثان- الهكسان). عند انتهاء التفاعل، يُترك المزيج ليبرد إلى درجة حرارة الغرفة، ثم يُرشح لإزالة الحفاز غير المتجانس، ويُبخّر المذيب بدرجة حرارة الغرفة. بعدها، يُحل البقايا في مذيب الكلوروفورم (20ml) ويُفصل باستخدام قمع فصل، حيث يتم جمع الطبقة العضوية المحتوية على المنتج، ثم تُغسل بكمية قليلة من الماء الساخن درجة حرارة 80 C<sup>o</sup> لتؤثر على مذيب الكلوروفورم أربع مرات متتالية. عقب ذلك، يُجفف المنتج باستخدام كبريتات الصوديوم اللامائية وتُرشح للحصول على الاستر النقي. [16]

### 4. النتائج والمناقشة:

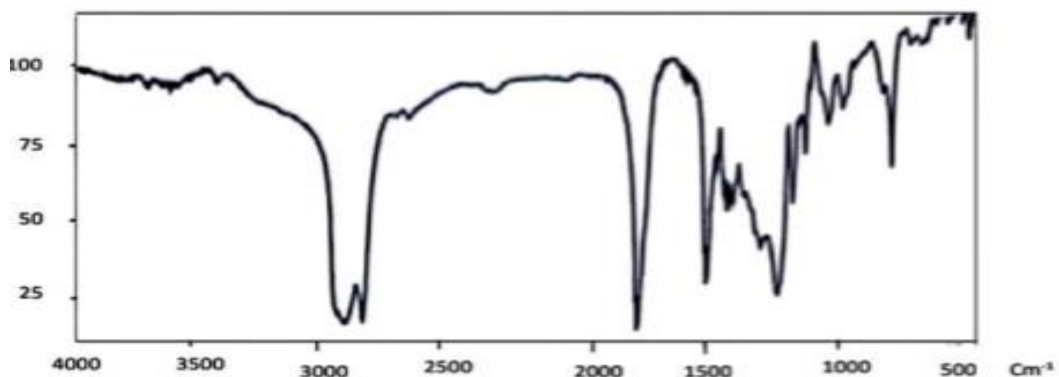
تُظهر النتائج الواردة في الجدول 2 أن عملية استرة حمض الميريستيك وحمض الأوليك مع البروبانول-1 أدت إلى تكوين الأسترات الموافقة ضمن نفس الظروف التجريبية. حيث لوحظ أن حمض الميريستيك بلغ حالة الاتزان بعد مدة زمنية قدرها سبع ساعات، مع مردود نسبته 72%، في حين استغرقت عملية استرة حمض الأوليك مدة أطول لتحقيق التوازن، إذ بلغت 12 ساعة مع مردود قدره 69%. يعكس هذا التباين في الزمن اللازم للوصول إلى الحالة متوازنة تفوق سرعة استرة حمض الميريستيك على حمض الأوليك، ويُعزى ذلك إلى الاختلاف في طول سلسلة الأحماض الدهنية، إذ يُعد طول السلسلة عاملاً مؤثراً على معدل التفاعل. فمن المتوقع أن يؤدي زيادة طول السلسلة إلى تقليل معدل التفاعل، بالإضافة إلى الإعاقة الفراغية الناجمة من وجود الرابطة المزدوجة، مما يُحد من سرعة التفاعل. كما أن سرعة التفاعل تختلف وفقاً لنوع الرابطة في الأحماض الدهنية. إذ تبين أن الأحماض المشبعة، التي تقتصر إلى روابط مزدوجة، تتفاعل بمعدلات أسرع مقارنة بالأحماض غير المشبعة التي تحتوي على

روابط مزدوجة. ويُعزى ذلك إلى أن وجود الرابطة المزدوجة يقلل من مرونة السلسلة، ويزيد من استقرار الحمض، مما يُبطئ من سرعة التفاعل. بالتالي، يمكن الاستنتاج أن وجود الرابطة المزدوجة يُؤثر سلبياً على معدل التفاعل، هذا يتوافق مع النتائج التي أظهرت أن استرة حمض الميريستيك (المشبعة) كانت أسرع من حمض الأوليك (غير المشبعة).

جدول 2: نتائج استرة حمض الميريستيك وحمض الأوليك مع البروبانول-1 ضمن نفس الشروط

رقم التجربة	الحمض الدسم	الغول المستخدم	الحفاز 5% وزناً من الحمض	درجة الحرارة	المذيب	زمن التفاعل	مردود التفاعل
1	حمض الميريستيك	البروبانول-1	أمبرليست-15	80°C	التولوين	7 hours	72%
2	حمض الاوليك	البروبانول-1	أمبرليست-15	80°C	التولوين	12 hours	69%

تم إثبات هوية الاسترات الناتجة باستخدام مطيافية ماتحت الأحمر حيث يبين الشكل (1) طيف ماتحت الأحمر لاستر ميريستات البروبيل وأهم ما يميز الطيف ظهور عصابة امتطاط عند ( $1215 \text{ cm}^{-1}$ ) العائدة لتشكّل الرابطة الاسترية. ويظهر الجدول 3 قيم أهم العصابات في الطيف.

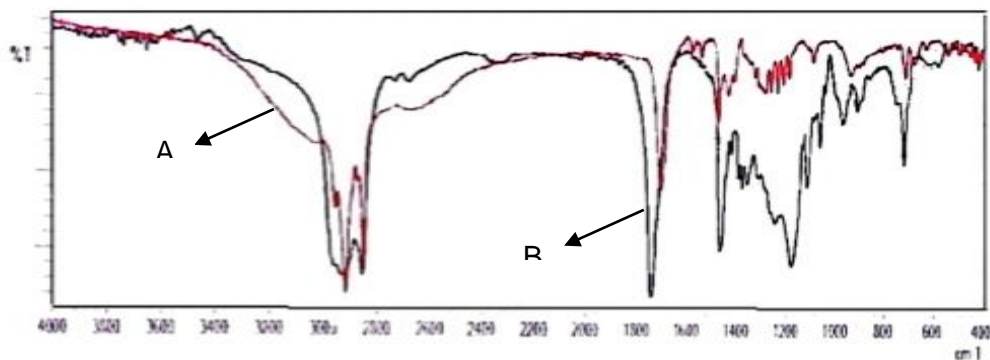


الشكل 1: طيف ماتحت الأحمر للاسترات الناتج ميريستات البروبيل.

جدول 3: أهم عصابات الامتصاص في طيف ماتحت الأحمر للاسترات ميريستات البروبيل.

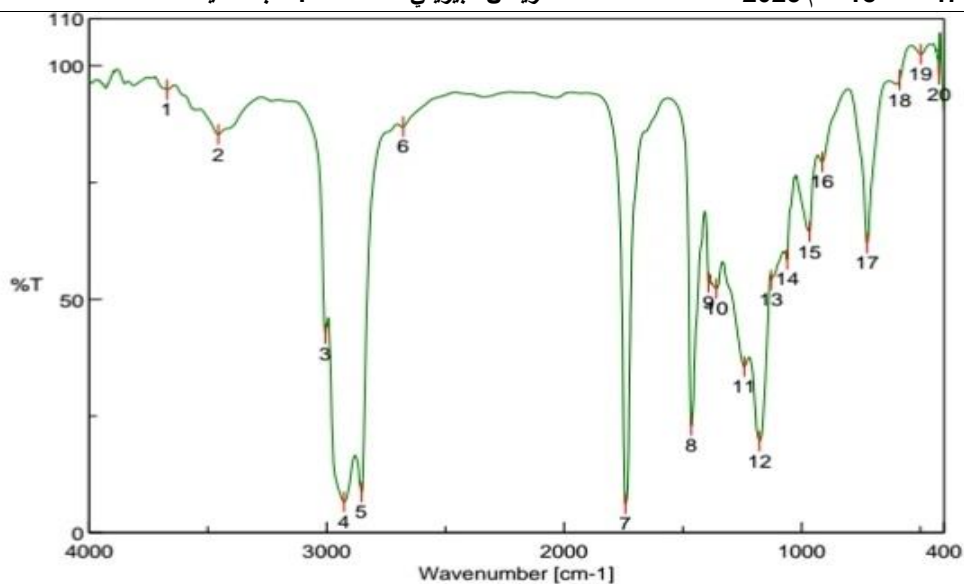
المجموعة الوظيفية	الإمتصاص الموافق $\text{cm}^{-1}$
C=O	1750
C-O	1215
$\text{C}_{\text{sp}^3}\text{-H}$	2950

وبمقارنة طيف ماتحت الأحمر للاسترات الناتج ميريستات البروبيل مع طيف ماتحت الأحمر لحمض الميريستيك، نلاحظ انزياح عصابة الامتصاص العائدة للمجموعة الكربونيلية نحو الأعداد الموجية الأكبر دالاً على تشكل الإستر، واختفاء عصابة الإمتصاص التابعة لمجموعة OH الموجودة في الحمض وظهور عصابة جديدة عند  $1215 \text{ cm}^{-1}$  عائدة للرابطة الاسترية وهذا ما يوضحه الشكل 2.



الشكل 2: A طيف ماتحت الأحمر لحمض الميريستيك، B طيف ماتحت الأحمر للاسترات الناتج ميريستات البروبيل.

كما يبين الشكل (3) هوية الاسترات الناتج من تفاعل حمض الأوليك مع البروبانول-1 (أولييات البروبيل) أهم ما يميز الطيف ظهور عصابة امتصاص عند  $1177 \text{ cm}^{-1}$  عائدة لتشكيل الرابطة الاسترية، ويبين الجدول 4 أهم قيم عصابات الامتصاص في الطيف.



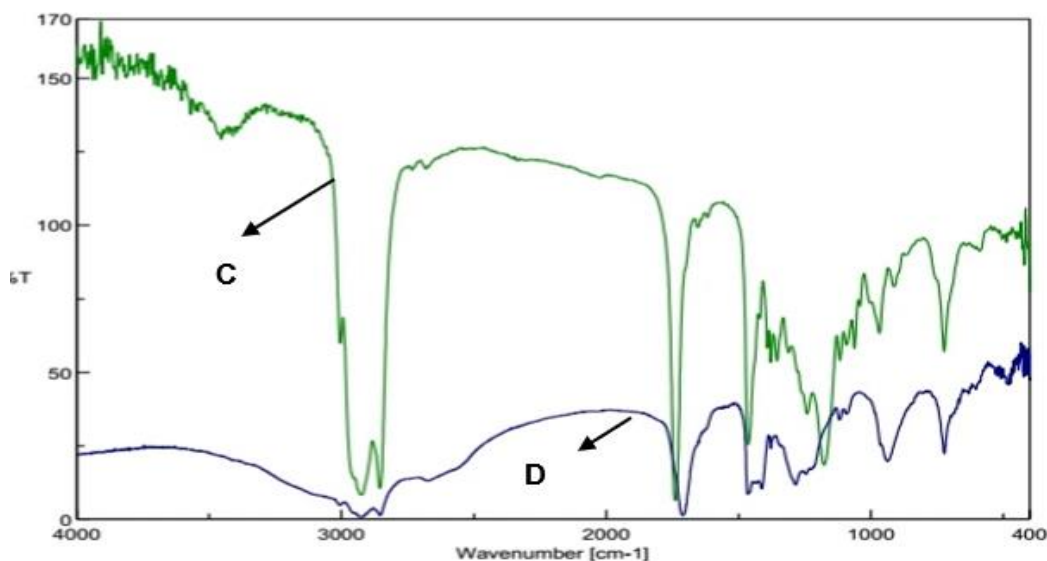
الشكل 3: طيف ماتحت الأحمر للاستر الناتج أوليات البروبيل.

جدول 4: أهم عصابات الامتصاص في طيف ماتحت الأحمر للاستر أوليات البروبيل.

الإمتصاص الموافق $\text{cm}^{-1}$	المجموعة الوظيفية
1741	C=O
1177	C-O
2926	$\text{C}_{\text{sp}^3}\text{-H}$
1612	C=C

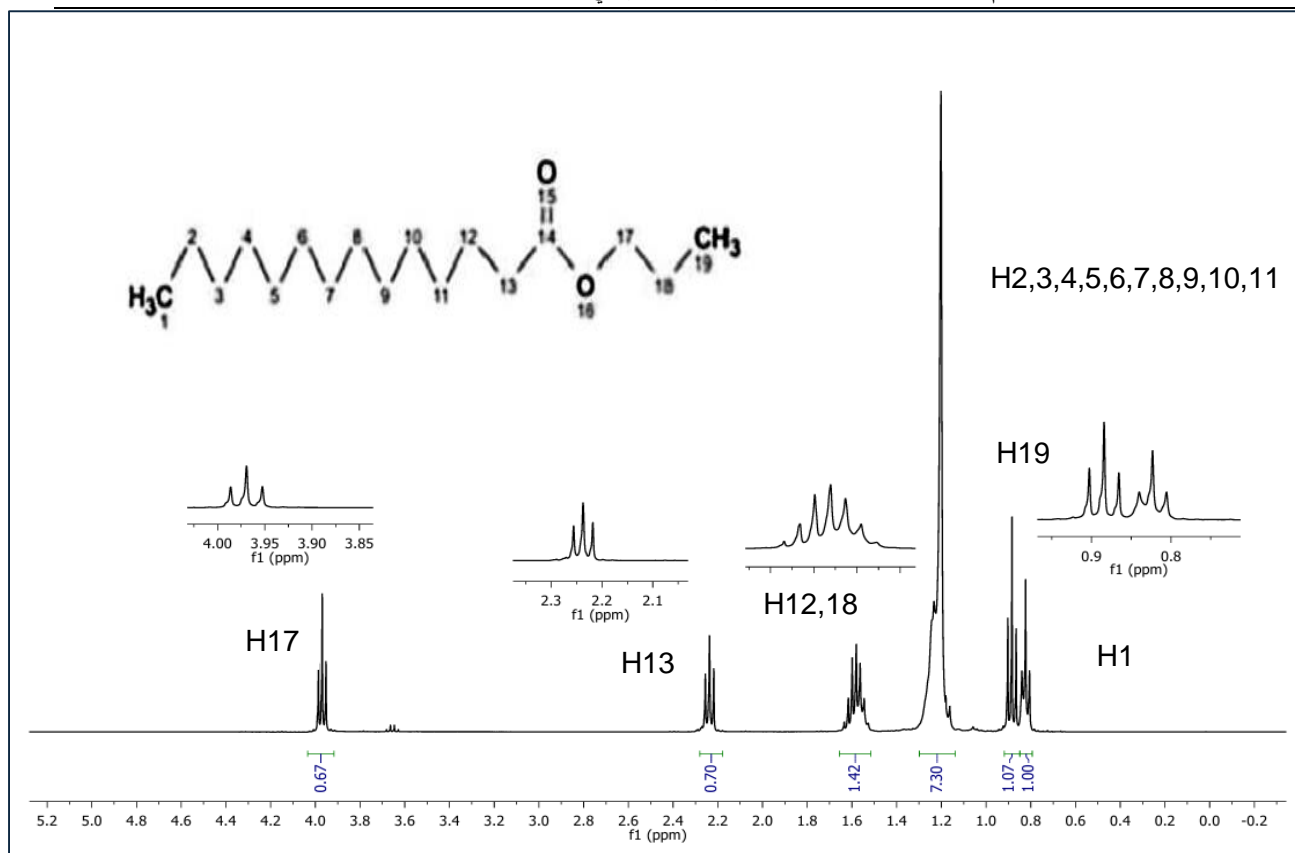
وبمقارنة طيف ماتحت الأحمر لمركب أوليات البروبيل مع طيف ماتحت الأحمر لحمض الأوليك في الشكل (4) نلاحظ انزياح عصابة الإمتصاص العائدة لمجموعة الكربونيل في أوليات البروبيل نحو الأعداد الموجية الأكبر مقارنة مع حمض الأوليك

واختفاء عصابة الإمتصاص التابعة لمجموعة OH الموجودة في الحمض وظهور عصابة امتصاص جديدة عائدة لتشكل الرابطة الأسترية .



الشكل 4: طيف ماتحت الأحمر استر أوليات البروبيل، D طيف ماتحت الأحمر حمض الأوليك

كما تم الاعتماد على مطيافية الرنين النووي المغناطيسي في إثبات هوية الاسترات الناتجة حيث يبين الشكل (5) طيف الطنين النووي المغناطيسي البروتوني  $^1\text{H-NMR}$  لمركب استر ميريسينات البروبيل باستخدام مذيب الكلورفورم المديتر، حيث نلاحظ وجود (16) بيئة بروتونية، منها (10) بيئات بروتونية ظهرت كإشارة واحدة معقدة، وأهم ما يميز الطيف وجود الإشارة عند 4 (ppm) عائدة لبروتونات الميثيلين  $\text{OCH}_2$  واختفاء الإشارة العائدة لزمرة OH وهذا دليل على تشكل الإستر. ويوضح الجدول 5 قيم الانزياحات للإشارات البروتونية.



الشكل 5: طيف الطنين النووي البروتوني <sup>1</sup>H-NMR لإستر ميريسات البروبيل.

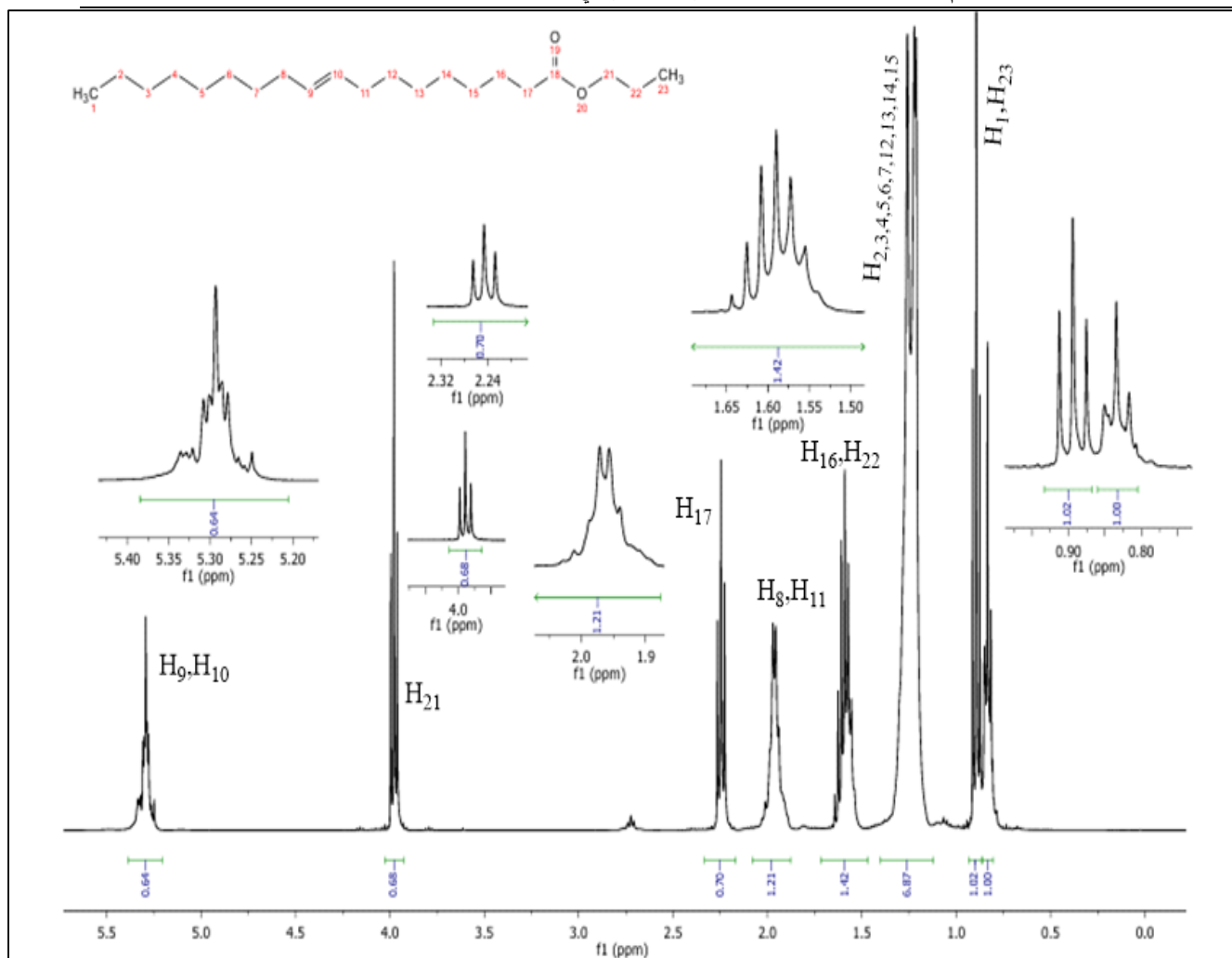
جدول 5: قيم الانزياحات الكيميائية للبروتونات للعائلة لإستر ميريسات البروبيل.

رقم ذرة الهيدروجين	الانزياح الكيميائي <sup>1</sup> H-NMR	نوع ذرة الهيدروجين
1	0.8 (t-3H)	أليفاتية
19	0.9 (t-3H)	أليفاتية
13	2.3 (t-2H)	أليفاتية
17	4-4.3 (t-2H)	أليفاتية

اصطناع استرات بروبانول -1 انطلاقاً من حمض الميريستيك وحمض الأوليك بوجود الأمبرلست-15

أليفاتية	1.2-1.4 (m-20H)	2,3,4,5,6,7,8,9,10,11
أليفاتية	1.5-1.7 (m-2H)	12
أليفاتية	1.6-1.7 (m-2H)	18

كما يبين الشكل رقم (6) طيف الطنين النووي المغناطيسي البروتوني  $^1\text{H-NMR}$  لمركب استر أوليات البروبيل بإستخدام مذيب الكلورفورم المديتر، نلاحظ وجود (20) منها (10) بيئات بروتونية ظهرت كإشارة واحدة معقدة، وأهم مايميز الطيف وجود الإشارة عند (4 Ppm) عائدة لبروتونات الميثيلين  $\text{OCH}_2$  واختفاء الإشارة العائدة لزمرة  $\text{OH}$ ، ويوضح الجدول (6) قيم الانزياحات الكيميائية العائدة لكل مجموعة بروتونية.



الشكل 6: طيف الطنين النووي البروتوني 1H-NMR لإستر أوليات البروبيل.

جدول 6 : قيم الانزياحات الكيميائية للبروتونات العائدة لإستر أوليات البروبيل.

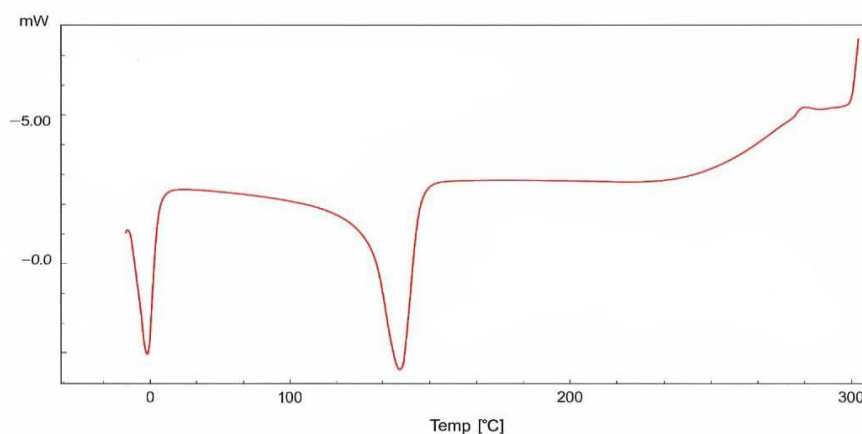
رقم ذرة الهيدروجين	الانزياح الكيميائي <sup>1</sup> H-NMR	نوع ذرة الهيدروجين
1	0.89(t-3H)	أليفاتية
23	1 (t-3H)	أليفاتية
(2,3,4,5,6,7,12,13,14,15)	1.3(m-20H)	أليفاتية
(16,22)	1.6(m-4H)	أليفاتية
(8,11)	2(q-4H)	أليفاتية
17	2.3(t-2H)	أليفاتية
21	4.1(t-2H)	أليفاتية
(9,10)	5.4(m-2H)	أليفاتية

## دراسة الخصائص الحرارية للإسترات المحضرة:

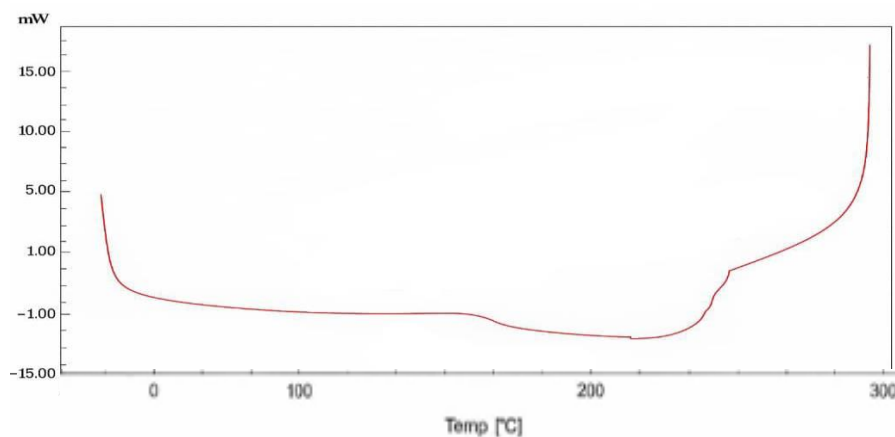
دُرِس السلوك الحراري لكل من إستر ميريسينات البروبيل وإستر أوليات البروبيل باستخدام المسح الحراري التفاضلي (DSC). وبمقارنة السلوك الحراري لكل من إستر ميريسينات البروبيل (الناتج من حمض الميريستيك) وإستر أوليات البروبيل (الناتج من حمض الأوليك)، لوحظ تباين واضح مرتبط بالبنية الكيميائية للأحماض الدهنية. فقد أظهر ميريسينات البروبيل قمة انصهار حادة ومحددة بوضوح في مجال ضيق من درجات الحرارة (~43-45°C)، مما يعكس انتظاماً في البنية الجزيئية وانتقالاً طورياً واضحاً بين الحالة الصلبة والسائلة وهذا ما يوضحه الشكل (7). هذا السلوك يُعزى إلى الطبيعة المشبعة لحمض الميريستيك، حيث تسمح الروابط الأحادية بتكدس جزيئي أكثر انتظاماً يؤدي إلى نقطة انصهار محددة، كما أنه حافظ على ثباته الحراري ضمن درجات حرارة مرتفعة دون تحلل واضح. بالمقابل، لم يُظهر أوليات البروبيل قمة انصهار واضحة في منحنى DSC كما هو موضح في الشكل (8)، وظل في الحالة السائلة ضمن مدى درجات الحرارة المدروسة. ويعود ذلك إلى وجود رابطة مزدوجة في البنية الكربونية، والتي تمنع الترتيب البلوري الكامل وتؤدي إلى انصهار تدريجي غير محدد. كما أن هذه البنية غير المشبعة تجعله أكثر عرضة للتغيرات الحرارية والأكسدة مقارنةً بميريسينات البروبيل.

وبذلك يمكن القول إن إسترات الأحماض الدهنية المشبعة (مثل ميريستات البروبيل) تُظهر خصائص حرارية أكثر وضوحًا وانتظامًا من إسترات الأحماض غير المشبعة (مثل أوليات البروبيل)، مما يعكس تأثير درجة التشبع على الثبات الحراري والسلوك الطوري. وهذا يفتح المجال أمام استخدام ميريستات البروبيل في تطبيقات تتطلب ثباتًا حراريًا وانتقالًا فيزيائيًا محددًا، بينما قد يكون أوليات البروبيل أكثر ملاءمة لتطبيقات تحتاج سيولة وخواص فيزيائية مرنة عند درجات حرارة الغرفة [16].

**الشكل 8: منحنى المسح الحراري التفاضلي لمركب أوليات البروبيل.**



**الشكل 7: منحنى المسح الحراري التفاضلي لمركب ميريستات البروبيل.**



حساب معامل التوازن الهيدروفيلي-الهيدروفوبي (HLB):

تم حساب قيمة معامل التوازن الهيدروفيلي-الهيدروفوبي (HLB) للمركبين الناتجين وفق طريقة Griffin:

$$HLB=20*Mh/M$$

$M_h$  الكتلة الجزيئية للجزء المحب للماء من الجزيء.

$M$  الكتلة الجزيئية للمركب بالكامل.

فكانت قيمة معامل التوازن الهيدروفيلي-الهيدروفوبي لمركب استر ميريسينات البروبيل (4.36)، في حين قيمة معامل التوازن الهيدروفيلي-الهيدروفوبي لمركب استر أوليات البروبيل (3.64). لوحظ أن قيمة معامل التوازن الهيدروفيلي-الهيدروفوبي للمركبات الناتجة أقل من  $HLB < 10$  وبالتالي فإن المركبات الناتجة قابلة للذوبان في الزيت وغير قابلة للذوبان في الماء ويعزى ذلك لزيادة طول السلسلة الكربونية.

#### 5. الاستنتاجات:

- 1) -أظهرت نتائج الأسترة أن حمض الميريستيك المشبع يعطي مردوداً أعلى بالمقارنة مع حمض الأوليك غير المشبع من حيث سرعة التفاعل.
- 2) أظهرت تفاعلات الأسترة التي تم تنفيذها في الطور السائل فعالية أعلى ومردوداً أفضل مقارنة بالطريقة التقليدية بالصهر الحمضي، حيث أن العمل في الطور السائل أتاح توزيعاً أفضل للمتفاعلات وقلل من فرص حدوث تفاعلات جانبية أو تحلل حراري مما ساهم بالحصول على نواتج أنقى وتوفير بيئة تفاعلية أكثر كفاءة.
- 3) أبدى الحفاز المستخدم (Amberlyst-15) فعالية عالية في تحفيز تفاعل الأسترة، ويعد خياراً مثالياً لسهولة فصله وإمكانية إعادة استخدامه دون فقدان كفاءته مما يساهم في خفض التكاليف ويعزز الإستدامة الصناعية.
- 4) أظهرت الدراسة أن المركبات الناتجة تملك قيم معامل التوازن الهيدروفيلي-الهيدروفوبي ( $HLB > 10$ ) مما يدل على ذوبانها العالي في الزيوت وانخفاض ذوبانها في الماء وهذا يمنحها خواصاً مميزة حيث أنه من الممكن استخدامها كمكونات فعالة في مستحضرات التجميل.
- 5) أظهرت نتائج دراسة المسح الحراري التفاضلي (DSC) للمركبات الناتجة أنها تمتلك استقراراً حرارياً جيداً مما يسمح بتطبيقها في مجالات تتطلب مقاومة للحرارة.

#### 6. المراجع:

- 1 - Lesch J, editor. The German chemical industry in the twentieth century. Springer Science Business Media ; 2000 Aug 31.
- 2- Kastratović V, Bigović M. Esterification of stearic acid with lower monohydroxylic alcohols. Chemical Industry and Chemical Engineering Quarterly. 2018;24(3):283-91.
- 3 - Jyoti G, Keshav A, Anandkumar J, Bhoi S. Homogeneous and heterogeneous catalyzed esterification of acrylic acid with ethanol: reaction kinetics and modeling. International Journal of Chemical Kinetics. 2018 May;50(5):370-80.
- 4- Bakar SA, Yusup S, Ahmad MM, Quitain AT, Sasaki M, Goto M, Uemura Y, Ahmad J. Comparative study on two-step fatty acid methyl ester (FAME) production from high FFA crude palm oil using microwave technique and conventional technique. Advanced Materials Research. 2014 Jun 25;917:87-95.
- 5 -Kastratović V, Bigović M. Esterification of stearic acid with lower monohydroxylic alcohols. Chemical Industry and Chemical Engineering Quarterly. 2018;24(3):283-91.
- 6 -Blanco M, Castillo M, Beneyto R. Study of reaction processes by in-line near-infrared spectroscopy in combination with multivariate curve resolution: esterification of myristic acid with isopropanol. Talanta. 2007 Apr 30;72(2):519-25.
- 7 - Fawaz EG, Salam DA, Daou TJ. Esterification of linoleic acid using HZSM-5 zeolites with different Si/Al ratios. Microporous and Mesoporous Materials. 2020 Mar 1;294:109855.
- 8- Singh D, Patidar P, Ganesh A, Mahajani S. Esterification of oleic acid with glycerol in the presence of supported zinc oxide as catalyst. Industrial & Engineering Chemistry Research. 2013 Oct 23;52(42):14776-86.
- 9 - Yang Z, Huang ZL. Enzymatic synthesis of sugar fatty acid esters in ionic liquids. Catalysis Science & Technology. 2012;2(9):1767-75.
- 10 - Hykkerud A, Marchetti JM. Esterification of oleic acid with ethanol in the presence of Amberlyst 15. Biomass and Bioenergy. 2016 Dec 1;95:340-3.
- 11 - Gang L, Xinzong L, Eli W. Solvent-free esterification catalyzed by surfactant-combined catalysts at room temperature. New Journal of Chemistry. 2007;31(3):348-51.

- 12- Juan JC, Zhang J, Yarmo MA. Efficient esterification of fatty acids with alcohols catalyzed by Zr (SO<sub>4</sub>)<sub>2</sub>· 4H<sub>2</sub>O under solvent-free condition. *Catalysis letters*. 2008 Dec;126(3):319-24.
- 13- Chongkhong S, Tongurai C, Chetpattananondh P, Bunyakan C. Biodiesel production by esterification of palm fatty acid distillate. *Biomass and Bioenergy*. 2007 Aug 1;31(8):563-8.
- 14 - Ilgen O. Investigation of reaction parameters, kinetics and mechanism of oleic acid esterification with methanol by using Amberlyst 46 as a catalyst. *Fuel Processing Technology*. 2014 Aug 1;124:134-9.
- 15- Chang M, Zhang T, Feng W, Wang T, Liu R, Jin Q, Wang X. Preparation of highly pure stigmasteryl oleate by enzymatic esterification of stigmasterol enriched from soybean phytosterols. *Lwt*. 2020 Jun 1;128:109464.
- 16- Sarı A, Biçer A, Karaipekli A. Synthesis, characterization, thermal properties of a series of stearic acid esters as novel solid–liquid phase change materials. *Materials Letters*. 2009 May 31;63(13-14):1213-6.