مجلة جامعة حمص

سلسلة العلوم الأساسية

مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 48 . العدد 4

1448 هـ - 2026 م

الأستاذ الدكتور طارق حسام الدين رئيس جامعة حمص **المدير المسؤول عن المجلة**

أ. د. وليد حمادة	**رئيس تحرير مجلة جامعة حمص للعلوم الإنسانية**
د.نعيمة عجيب	**رئيس تحرير مجلة جامعة حمص للعلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية**

د.محمد فراس رمضان	عضو هيئة التحرير
د. مضر سعود	عضو هيئة التحرير
د. ممدوح عبارة	عضو هيئة التحرير
د. موفق تلاوي	عضو هيئة التحرير
د. طلال رزوق	عضو هيئة التحرير
د. أحمد الجاعور	عضو هيئة التحرير
د. الياس خلف	عضو هيئة التحرير
د. روعة الفقس	عضو هيئة التحرير
د. محمد الجاسم	عضو هيئة التحرير
د. خليل الحسن	عضو هيئة التحرير
د. هيثم حسن	عضو هيئة التحرير
د. أحمد حاج موسى	عضو هيئة التحرير

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة حمص

سورية . حمص . جامعة حمص . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : 2138071 31 963 ++

. موقع الإنترنت : www.homs-univ.edu.sy

. البريد الالكتروني : journal.homs-univ.edu.sy

ISSN: 1022-467X

شروط النشر في مجلة جامعة حمص

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
- طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
- **اذا كان الباحث طالب دراسات عليا:**

يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقته على النشر في المجلة.

- **اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:**

يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.

- **اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :**

يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.

- **اذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :**

يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.

- **يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):**

عنوان البحث . . ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1- مقدمة

2- هدف البحث

3- مواد وطرق البحث

4- النتائج ومناقشتها .

5- الاستنتاجات والتوصيات .

6- المراجع.

- **يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (الآداب – الاقتصاد– التربية – الحقوق – السياحة – التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):**
- عنوان البحث . . ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1. مقدمة.
2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
3. أهداف البحث و أسئلته.
4. فرضيات البحث و حدوده.
5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
7. منهج البحث و إجراءاته.
8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
9. نتائج البحث.
10. مقترحات البحث إن وجدت.
11. قائمة المصادر والمراجع.

7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:

أ- قياس الورق 17.5×25 B5.

ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 – يمين 2.5- يسار 2.5 سم

ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8

ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20

ـ كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي ـ العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.

ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.

8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.

9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.

10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة ـ الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة ـ سنة النشر ـ وتتبعها معترضة (–) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة ـ دار النشر وتتبعها فاصلة ـ الطبعة (ثانية . ثالثة) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة.

وفيما يلي مثال على ذلك:

–MAVRODEANUS, R1986– **Flame Spectroscopy**. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

ـــ بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة ـــ المجلد والعدد (كتابة مختزلة) وبعدها فاصلة ـــ أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة.

مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases **Clinical Psychiatry News** , Vol. 4. 20 – 60

ج. إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد بالبنود (أ و ب) ويكتب في نهاية المراجع العربية: (المراجع In Arabic)

رسوم النشر في مجلة جامعة حمص

1. **دفع رسم نشر (50000) ل.س أربعون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.**
2. **دفع رسم نشر (200000) ل.س مئة الف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .**
3. **دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .**
4. **دفع مبلغ (15000) ل.س ستة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.**

المحتوى

اسم البحث	اسم الباحث	الصفحة
اصطناع ميتيل فينيل كربامات عن طريق إعادة ترتيب هوفمان الكهروكيميائي بوجود هاليدات الصوديوم	د. صبا ناصيف + الباحث : أحمد العساف	32-11
عزل وتشخيص بعض مسببات الأمراض المنقولة من عينات التربة في محافظة دمشق وريفها	د. بثينة الأشقر	68-33
حل المعادلات التفاضلية الخطية الضبابية ذات الأمثال الثابتة من المرتبة الثانية والتي لا تحتوي على المشتق من الرتبة الأولى باستخدام تحويل لابلاس الضبابي	ثائر الشربعي د. أحمد الجاعور د. صفاء شيخ السوق	92-69
التوليد الضعيف في الزمر التبديلية منتهية التوليد	هيفاء صويص د. إيمان الخوجة د.عدنان الطيباني	126-93

اصطناع ميتيل فينيل كربامات عن طريق إعادة ترتيب هوفمان الكهروكيميائي بوجود هاليدات الصوديوم

الدكتورة صبا ناصيف الباحث أحمد العساف

الملخص

مع انتشار مفهوم الكيمياء الخضراء، سعى الكيميائيين لإيجاد طرائق اصطناع صديقة للبيئة، فكان الاصطناع العضوي الكهربائي أحد أهم هذه الطرائق حيث يعتمد على استخدام الأقطاب الكهربائية لإنجاز عمليات الأكسدة والإرجاع بدلاً من استخدام مواد مؤكسدة أو مرجعة سامة. لذا لجأ البحث إلى استخدام التحفيز الكهربائي في اصطناع ميتيل فينيل كربامات عن طريق إعادة ترتيب هوفمان انطلاقاً من البنز أميد في وجود هاليدات الصوديوم(NaCl–NaBr–NaI) كوسيط والميتانول كمذيب . تم دراسة تأثير كل من النسبة المولية بين البنزأميد وبروميد الصوديوم ، ثم تم دراسة تأثير كل من كلوريد ويوديد الصوديوم على التفاعل ، تم الحصول على أعلى مردود وبزمن أقل عند استخدام بروميد الصوديوم كوسيط وبنسبة مولية (1:1) مع المادة المتفاعلة ، تمت مراقبة سير التفاعل عن طريق كروموتوغرافيا الطبقة الرقيقة (TLC) وإثبات هوية المنتج بالطرائق الطيفية (IR–^{1}HNMR–^{13}CNMR).

كما تم دراسة الفعالية البيولوجية على الجراثيم والفطور ، تم الحصول على فعالية متوسطة مقارنتاً مع المادة المرجعية الجنتامايسين على الجراثيم سلبية وإيجابية الغرام ، أما بالنسبة لدراسة الفعالية البيولوجية على الفطور تم الحصول على فعالية أعلى من المادة المرجعية الفلوكانازول .

الكلمات المفتاحية :

إعادة ترتيب هوفمان ، البنز أميد، ميتيل فينيل كربامات .

Synthesis of methyl phenyl carbamate by electrochemical Hofmann rearrangement in the presence of sodium halides

Abstract

With the spread of the concept of green chemistry , chemists sought to find environmentally friendly methods of synthesis . Electroorganic synthesis was one of the most important of these methods , as it relies on the use of electrodes to carry out oxidation and reduction processes instead of using toxic oxidizing or reducing materials .Therefore , the research resorted to using electrical stimulation in the synthesis of methyl phenyl carbamate through the Hofmann rearrangement starting from benzamide in the presence of sodium halides (NaBr-NaCl-NaI) as a mediator and methanol as a solvent . The effect of the molar ratio between benzamide and sodium bromide was studied , followed by the effect of sodium chloride and sodium iodide on the reaction . The highest yield and shortest time were obtained when using sodium bromide as a mediator at a molar ratio of (1:1) with the reactant , the progress of the reaction was monitored by thin-layer chromatography and the product identity structure was confirmed by spectroscopic methods (FT-IR,^{1}HNMR,^{13}CNMR) . The biological activity against bacteria and fungi was also studied. Moderate activity was obtained compared to the reference substance gentamicin againct Gram-negative and Gram-positive bacteria . As for the study of biological activity against fungi , higher activity was obtained than the reference substance fluconazole .

Key words :

Hofmann rearrangement , Benzamide , Methyl phenyl carbamate

1.المقدمة (Introduction) :

لاتعد تفاعلات إعادة ترتيب هوفمان من التفاعلات الحديثة في الاصطناع العضوي، فقد تم استخدام هذا التفاعل في اصطناع الأمينات والكربامات انطلاقاً من الكربوكساميد[1]، حيث اعتمد هذا التفاعل بشكل كبير على استخدام وسط قلوي مثل (NaOH) بوجود البروم ولم تكن هذه الطريقة فعالة بما يكفي ولا تنطبق على جميع الركائز العضوية [2]، لذا حسن العديد من الباحثين شروط التفاعل باستخدام بعض المؤكسدات مثل: مركبات اليود عالية التكافؤ المشتقة من يوديد البنزن والأكسون والتي تم استخدامها لتحويل ألكيل الأميدات إلى أمينات وفق إعادة ترتيب هوفمان [3] ،واستخدم (TsNBr2) *N,N*–dibromo–*p*–toluenesulfonamide لاصطناع ميتيل الكربامات[4]، كما تمت أكسدة الأميدات الحلقية باستخدام حمض ثلاثي هالو ايزو سيانوريك (trihaloisocyanuric acids) [5] . تعددت الأبحاث التي استخدمت هيدروكسيدات المعادن القلوية فقد تم الحصول على الكربامات انطلاقاً من برومو أست أميد بوجود هيدروكسيد الليثيوم وميتوكسيد الليثيوم وأعطت نتائج جيدة بمردود مرتفع [6] ، واستخدم كلوريد النحاس مع كلوريد رباعي بوتيل الأمونيوم للحصول على الكربامات بوجود أنواع مختلفة من الكحولات [7] . هناك العديد من الطرائق التي تعاني من عيوب كثيرة مثل اشتراط وجود زيادة كبيرة من عامل الأكسدة الذي قد يؤدي إلى أكسدة الكربامات وإيقاف التفاعل المطلوب. لذا لجأ الباحثين للتقليل من هذه العيوب وإيجاد شروط أكثر كفاءة من خلال استخدام طرائق مختلفة منها استخدام أشعة المايكرويف بوجود مؤكسد (TBCA) Tribromoisocyanuric acid الذي يُعد كعامل مؤكسد في وسط من ميتوكسيد الصوديوم وتم الحصول على مردود مرتفع [8]. وكان للتحفيز الكهربائي دور في تفاعلات هوفمان لكونها طريقة صديقة للبيئة تستخدم أقطاب من البلاتين لإجراء عملية الأكسدة [9].

وتحت ضوء إيجاد شروط صديقة للبيئة ومناسبة لاصطناع ميتيل فينيل كربامات ، توجه البحث إلى استخدام التحفيز الكهربائي عن طريق امرار التيار الكهربائي بواسطة الأقطاب (الزنك كاتود والغرافيت أنود) وباستخدام هاليدات الصوديوم كوسيط في وجود الميتانول .

2.هدف البحث وأهميته (Research Aim and Importance):

نظراً لأهمية التحفيز الكهربائي في تسريع التفاعلات العضوية وفي توجيه التفاعل نحو المنتج المطلوب وتجنب النواتج الثانوية، وبما إن معظم الدراسات المرجعية استخدمت مواد مؤكسدة ومرجعة سامة في تفاعلات إعادة ترتيب هوفمان لاصطناع كربامات الميتيل ، لذا هدف البحث إلى :

1- استخدام التحفيز الكهربائي الذي يعتمد على إمرار التيار الكهربائي باستخدام المساري التي يمكن إزالتها في نهاية التفاعل ببساطة وإعادة إستخدامها بدلاً من إستخدام مواد مؤكسدة أو مرجعة سامة لإنجاز عمليات الأكسدة والإرجاع.

2- إيجاد الشروط الأمثل للتفاعل (دراسة تأثير النسبة المولية بين الحفاز ومادة التفاعل ، تأثير هاليدات الصوديوم على التفاعل).

3- تحديد هوية الناتج باستخدام المطيافيات المناسبة.

4- دراسة الفعالية البيولوجية .

3. الجزء العملي (Experimental Section):

3.1.الأجهزة والأدوات المستخدمة :

1. ميزان تحليلي حساس بدقة تصل إلى (0.0001gr).
2. ميزان حرارة لمُراقبة درجة حرارة التَّفاعل.
3. سخَّانة مُزودة بمُحرك مغناطيسي.
4. فُرن تجفيف كهربائي.
5. مِضخة مائيَّة موصولة بمكثِّف عكوس.
6. حوجلة زجاجية ثلاثية المأخذ سِعة (250 ml).
7. قمع فصل زجاجي سعة (100 ml).
8. مقياس أفوميتر DT9201A يعمل ضمن مجال 2A-2Ma .
9. مغذية تيار كهربائي DC Power إنتاج شركة PROMAX تعمل ضمن مجال كمون 12V ومجال تيار كهربائي 3A .

10. جهاز طيف الأشعة ما تحت الأحمر FT-IR-4100 من شركة Jasco اليابانية.
11. جهاز طيف الطنين النووي المغناطيسي بروتوني وكربوني نموذج 400MHZ من شركة Bruker السويسرية.
12. صفائح كروماتوغرافيا الطبقة الرقيقة من الألمنيوم مطلية بالسيليكاجل 60F254 قياس 20×20 من شركة Merck الألمانية.
13. ورق ترشيح من شركة (Macherey-Nagel / Germany) ذو مسامات (110 mm) ، (Syringe Filter) بمسام تساوي .(0.45 µm)

3.2 .المواد الكيميائية المستخدمة:

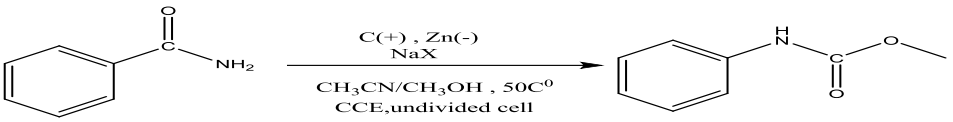
- البنزأميد بنقاوة 98% من إنتاج شركة Merck
- الميتانول بنقاوة 99.9% من إنتاج شركة Sigma Aldrich
- الأملاح المستخدمة: NaCl-NaBr-NaI جميعها عالية النقاوة 99% من إنتاج شركة Merck.
- خلات الإيتيل بنقاوة 98% من إنتاج شركة Sigma Aldrich .
- الأسيتونتريل بنقاوة 99% من إنتاج شركة Merck .
- كبريتات الصوديوم اللامائية بنقاوة 98% من إنتاج شركة BATCH .

3.3 .القسم العملي :

3.3.1 النموذج التجريبي لاصطناع ميتيل فينيل كربامات عن طريق إعادة ترتيب هوفمان الكهروكيميائي بوجود هاليدات الصوديوم :

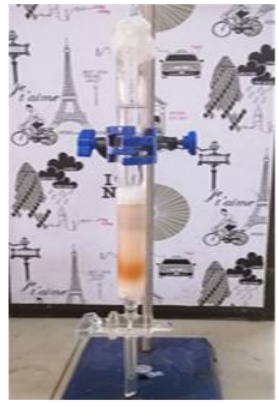
تم تجهيز خلية غير مقسمة بمحرك مغناطيسي وأقطاب كهربائية مكونة من قضبان من الغرافيت (قطرهما 7mm وطولهما 6cm) كأنود واستخدام لوح من الزنك (4cm × 2cm) كاتود ، تم إضافة البنز أميد (1mmol) مع هاليدات الصوديم ثم تم إضافة مذيب التفاعل المكون من أسيتونتريل(10ml)/ ميتانول(2ml) . تم السماح لمزيج التفاعل الناتج بالتحريك والتحليل الكهربائي في ظروف تيار ثابت

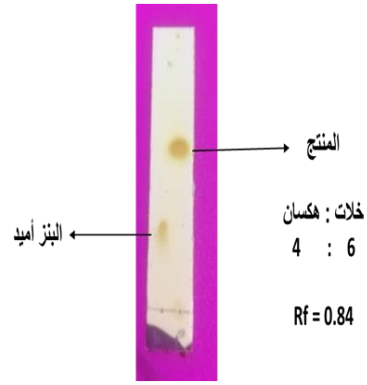
($0.015mA/cm^2$) عند $50C^0$ درجة مئوية تحت التقطير المرتد ، تم تتبع التفاعل بواسطة كروماتوغرافيا الطبقة الرقيقة TLC . وعند انتهاء التفاعل يُترك المزيج ليبرد إلى درجة حرارة الغرفة ويتم التخلص من المذيب بالتبخير، والناتج المتبقي بعد التبخير يتم حله بواسطة 20ml من خلات الايتيل، الذي يتم غسله بواسطة 10ml من الماء المقطر (تُكرر العملية ثلاث مرات). يفصل الطور العضوي ويضاف إليه كبريتات الصوديم اللامائية،وبعد جفاف الطور العضوي،تمت عملية التنقية عن طريق العامود الكروماتوغرافي وفي النهاية تم الحصول على بلورات بيضاء.



النموذج التجريبي لاصطناع ميتيل فينيل كربامات عن طريق إعادة ترتيب هوفمان الكهروكيميائي

اسم المركب	درجة الإنصهار	X
MPC	46C°	Cl
MPC	46C°	Br
MPC	46C°	I





3.4.النتائج والمناقشة:

3.4.1. دراسة تأثير النسبة المولية بين بروميد الصوديوم والبنز أميد :

من أجل إيجاد الشروط الأفضل لاصطناع ميتيل فينيل كربامات عن طريق إعادة ترتيب هوفمان الكهروكيميائي بوجود الميتانول ، تم في البداية دراسة تأثير النسبة المولية بين بروميد الصوديوم والبنز أميد كماهو موضح في الجدول 1 .

جدول 1 : دراسة تاثير النسبة المولية بين البنز أميد وبروميد الصوديوم

اسم المركب	الهاليد	النسبة المولية بروميد الصوديوم/الأميد	زمن التفاعل	المردود %
MPC	NaBr	1mmol/0.5mmol	10h	**66%**
MPC	NaBr	1mmol/1mmol	6h	**75%**

3.4.2. دراسة تأثير هاليدات الصوديوم على إعادة ترتيب هوفمان الكهروكيميائي :

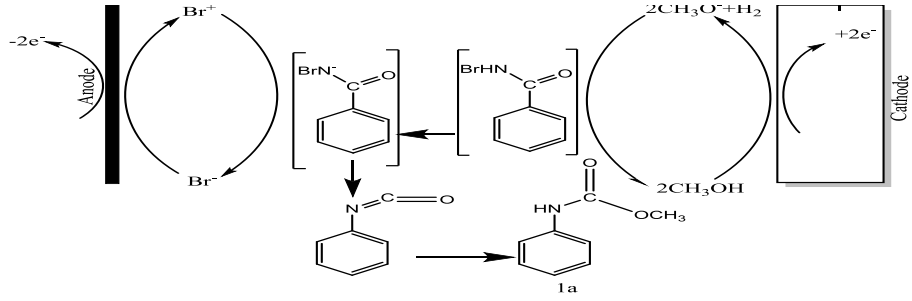
بعد تحديد النسبة المولية الأفضل تم دراسة تأثير كل من كلوريد ويوديد الصوديوم على التفاعل ، تم الحصول على أفضل النتائج عند استخدام NaBr وبزمن قدره 6h من كربامات الميتيل في حين انخفض المردود وزاد زمن التفاعل عند استخدام كلوريد ويوديد الصوديوم الذي أعطى أقل مردود وهذا يعود إلى سهولة أكسدة البروم مقارنةً بالكلور وكبر حجم ذرة اليود وهذا مايوضحه الجدول 2 .

جدول 2 : تأثير هاليدات الصوديوم على إعادة ترتيب هوفمان الكهروكيميائي

اسم المركب	الهاليد	زمن التفاعل	المردود %
MPC	NaBr	6h	**75%**
MPC	NaCl	9h	**38%**
MPC	NaI	14h	**24%**

3.4.3.الألية المقترحة لإعادة ترتيب هوفمان الكهروكيميائي :

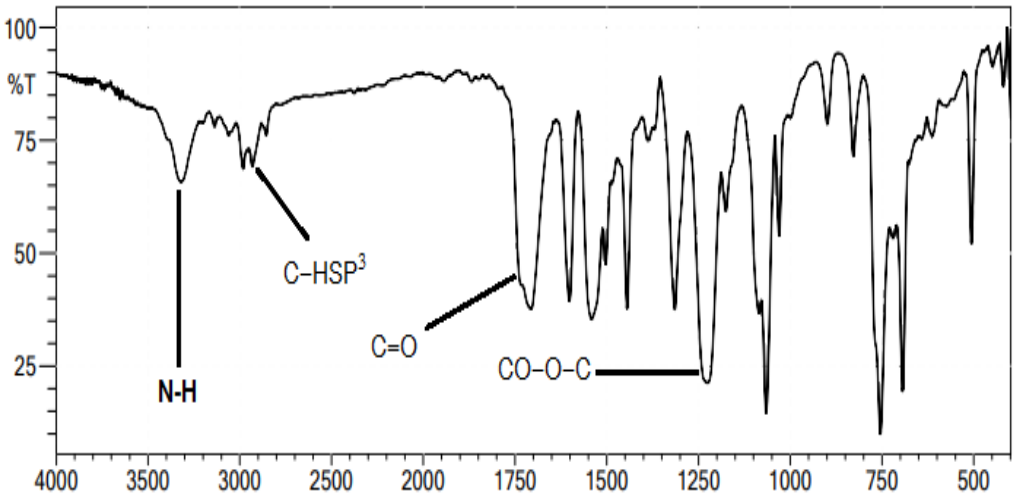
يتم الحصول على الوسط القلوي المستخدم في إعادة ترتيب هوفمان الكهروكيميائي من خلال إرجاع الميتانول عند الكاتود وانطلاق MeO^- التي تعمل على إزالة البروتون من الأميد للحصول على مركب وسطي يحمل شحنة سالبة تعمل على التقاط شوارد البروم الناتجة عن عملية الأكسدة عند الأنود وتشكيل بروميد الأميد والذي بدوره يخسر بروتون أخر للحصول على أنيون بروميد الأميد والذي يخضع الى إعادة ترتيب هوفمان ليشكل الايزوسيانات المقابلة ، والتي يتم مهاجمتها من قبل الميتانول الموجود في وعاء التفاعل للحصول على الكاربامات ، وهذا مايوضحه المخطط التالي :



الألية المقترحة لاصطناع ميتيل فينيل كربامات عن طريق إعادة ترتيب هوفمان الكهروكيميائي

3.4.4.إثبات بنية MPC بالطرائق الطيفية (IR–^{1}HNMR–^{13}CNMR):

أظهر طيف ماتحت الأحمر المبين في الشكل أهم العصابات الموجودة في مركب ميتيل فينيل كربامات والتي تظهر في الجدول 3.



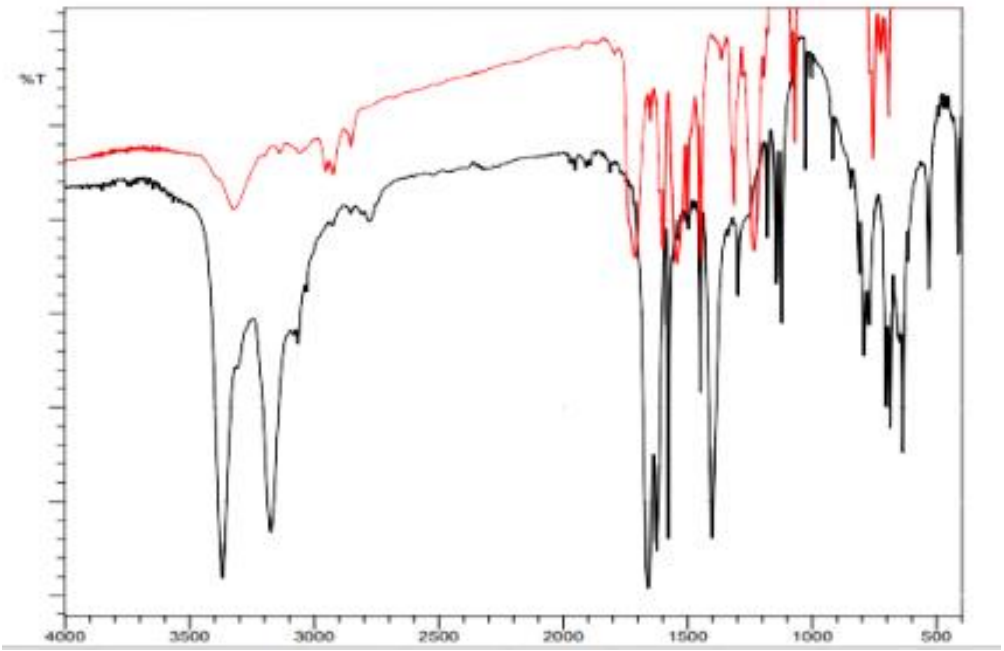
طيف IR لمركب MPC

جدول 3 : اهم عصابات الامتصاص الموجود في المركب MPC

المجموعة الوظيفية	N–H Stretch	C–H SP^2	C–H SP^3	C=O Stretch	CO–O–C Stretch
الامتطاط الموافق cm^{-1}	3329	3090	2924	1712	1243–1340

وبمقارنة طيف ماتحت الأحمر لمركب البنز أميد مع ميتيل فينيل كربامات نلاحظ انزياح عصابة الإمتصاص العائدة لمجموعة الكربونيل في الكربامات نحو الأعداد

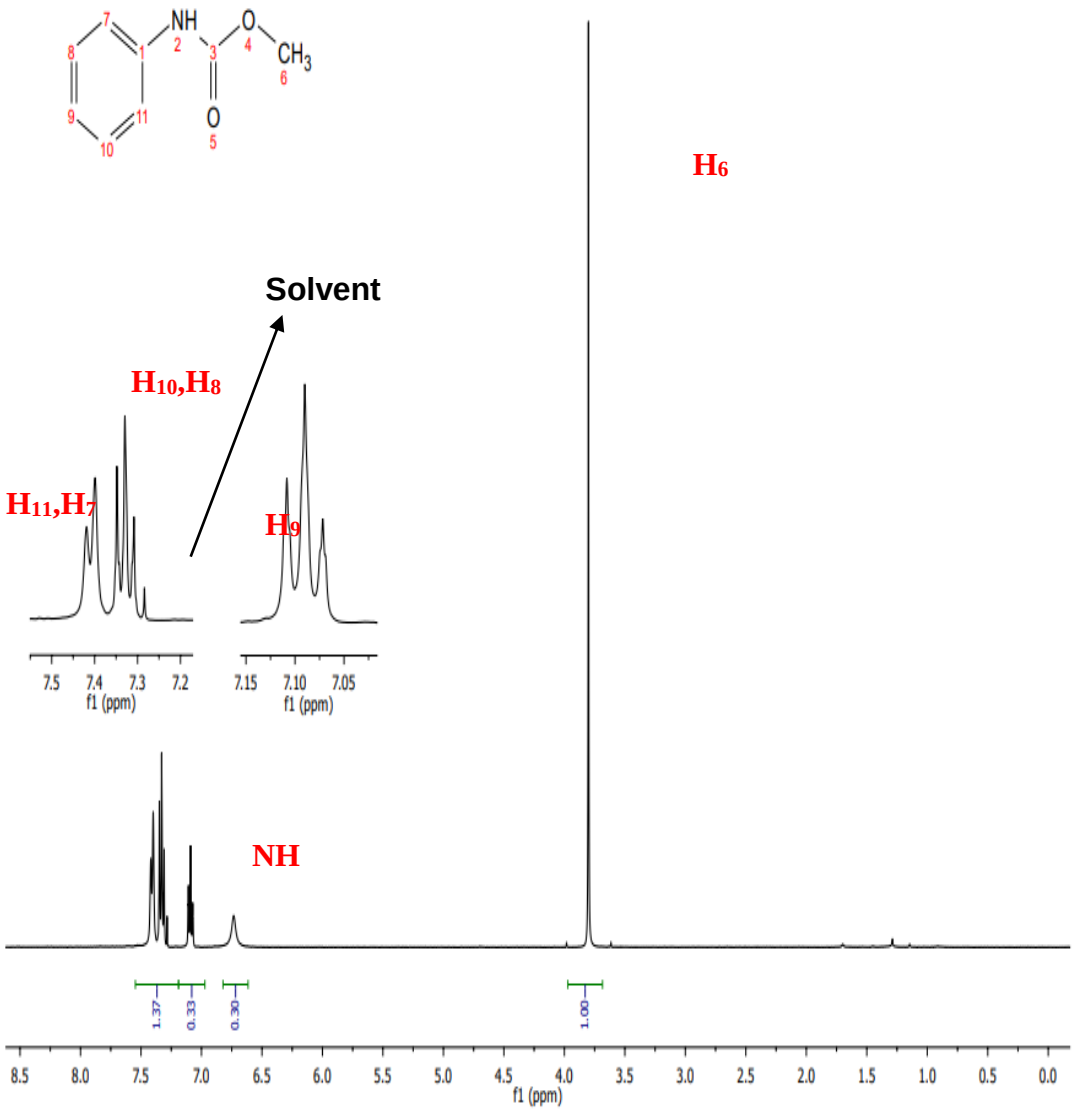
الموجيــة الأكبــر $1712cm^{-1}$ مقارنــةً مــع البنــز أميــد $1660cm^{-1}$ ، وإختفــاء عصــابتي الإمتصــاص التابعــة لمجموعــة NH_2 الموجــودة فــي البنــز أميــد وظهــور عصــابة امتصــاص وحيــدة عائــدة لمجموعــة NH للكربامــات ، وظهــور عصــابة الامتصــاص لمجموعــة الاســتر CO–O–C الموجــودة فــي الكربامــات عنــد $1240cm^{-1}$ ، وعصــابة الإمتصــاص العائــدة لزمرة $C–H_{SP^3}$ في المنتج عند $2924cm^{-1}$.



طيف التراكب IR ل البنز اميد مع MPC

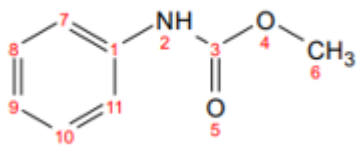
ومــن طيــف الطنــين النــووي البروتــوني $^1H–NMR$ لميتيــل فينيــل كربامــات باســتخدام مــذيب الكلورفــورم المــديتر، نلاحــظ وجــود 5 بيئــات بروتونيــة فــي المركــب مــع مراعــاة التنــاظر مبينــة فــي الجــدول 4 مــع قــيم انزياحاتهــا، وأهــم مــايميز الطيــف وجــود الإشــارة عنــد 3.8ppm أحاديــة عائــدة لــثلاث بروتونــات دالــةً علــى تشــكل الكربامــات، كمــا يبــين طيــف الطنــين النــووي الكربــوني باســتخدام مــذيب الكلوروفــورم المــديتر وجــود 6 ذرات كربــون

مبينـة فـي الجـدول 5 مـع قـيم انزياحاتهـا مـع مراعـات التنـاظر وأهـم مـا يميـز الطيـف وجـود ذرة الكربون التابعة لمجموعة الميتيل .

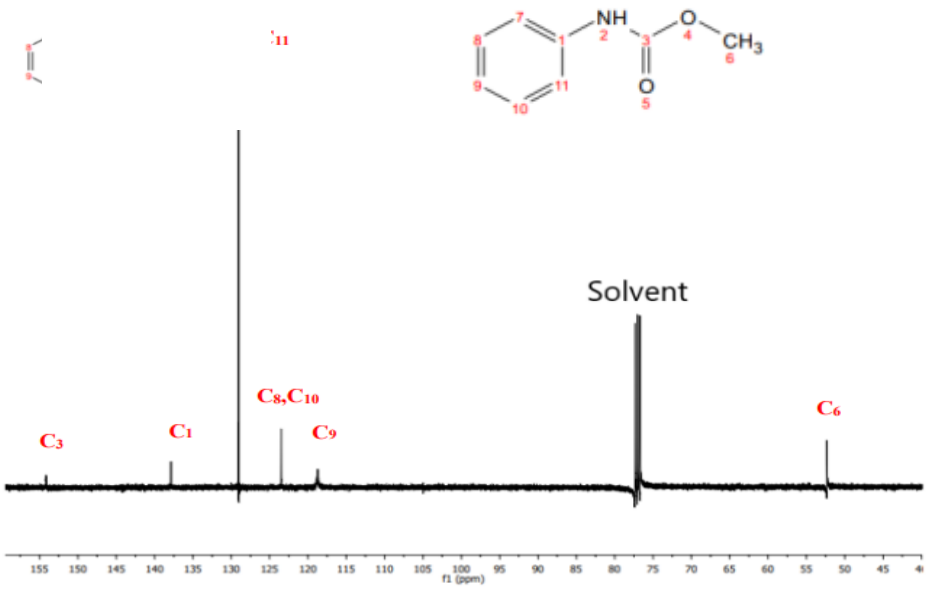


طيف ^{1}H-NMR للمركب MPC($CDCl_3$,400MHZ)

جدول 4 : قيم الانزياحات البروتونية لمركب MPC

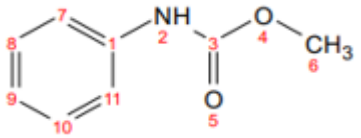


رقم ذرة الهيدروجين	^{1}H–NMR(δ,ppm)	نوع ذرة الهيدروجين
11–7	7.42 (d, J=8Hz , 2H)	عطرية
10–8	7,33 (t, J=8Hz , 2H)	عطرية
9	7,07 (t, J=7.4Hz , 1H)	عطرية
2	6.73 (br , 1H)	NH
6	3.8 (s , 3H)	أليفاتية



طيف ^{13}C-NMR MPC ($CDCl_3$,100MHz)

جدول5 : قيم انزياحات ذرات الكربون لمركب MPC



رقم ذرة الكربون	الإنزياح الكيميائيppm
6	52.27
3	154.32

118.6	**9**
123.62	**7-11**
128.64	**8-10**
137.94	**1**

3.5.دراسة الفعالية البيولوجية :

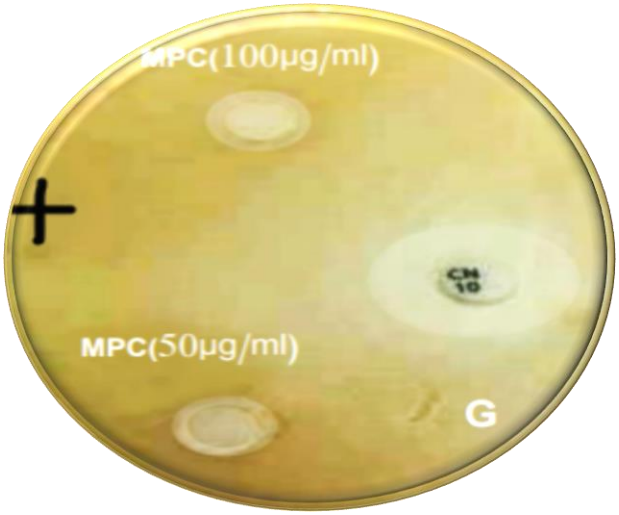
تم دراسة النشاط البيولوجي لميتيل فينيل كربامات تجاه نوعين من الجراثيم ، جرثومة المكورات العنقودية الذهبية (*Staphylococcus aureus*) وجرثومة الأشريكية (*Escherichia Coli*) ممثلة بذلك إيجابيات الغرام وسلبيات الغرام في وسط مغذي من تربتون صويا آغار (TSA) ، كما تم دراسة تأثير النشاط البيولوجي على فطر الكانديدا في وسط مغذي من من مولر هينتون آغار (MHA).

3.5.1. دراسة الفعالية البيولوجية تجاه الجراثيم :

تم دراسة النشاط البيولوجي تجاه نوعين من الجراثيم ، جرثومة المكورات العنقودية الذهبية (*Staphylococcus aureus*) وجرثومة الأشريكية (*Escherichia Coli*) ممثلة بذلك إيجابيات الغرام وسلبيات الغرام مزروعتان داخل طبقين من أطباق بيتري في وسط مغذي من TSA ، وحضرت عينات من ميتيل فينيل كربامات بتركيز 50,100µg/ml باستخدام مذيب DMSO وعينة من المادة المرجعية الجنتامايسين بتركيز 100mg/L باستخدام المذيب نفسه ، ووضعت

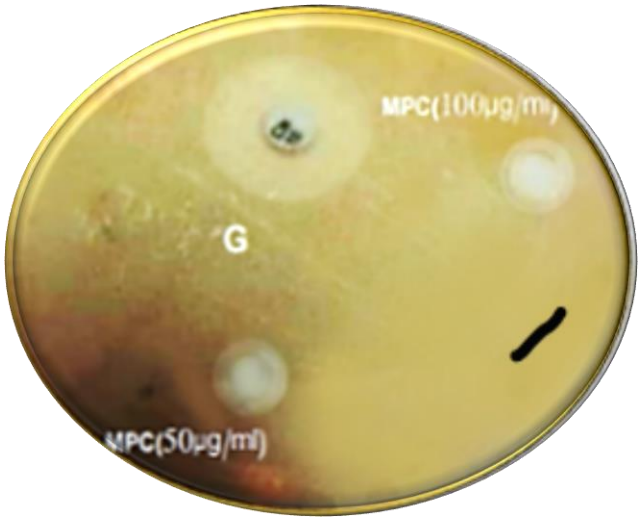
العينات في كل طبق بيتري تم إعدادها مسبقا باستخدام أسطوانات من الفولاذ المقاوم للصدأ ثم وضعت الأطباق داخل حاضنة مدة 36h بدرجة حرارة $35-37C^0$.

تم دراسة الفعالية تجاه جرثومة (*Staphylococcus aureus*) التي تم نشرها على سطح الآغار ومن ثم تم زراعة ثلاث بؤر (جنتامايسين بتركيز MPC -100mg/L بتركيز 50,100µg/ml) وتم الحصول على الطبق الموضح في الشكل:



الفعالية البيولوجية MPC بطريقة الآغار تجاه جرثومة St

كما تم دراسة فعالية البيولوجية ضد جرثومة (*Escherichia Coli*) التي تم نشرها على سطح الآغار ومن ثم تم زراعة ثلاث بؤر (جنتامايسين بتركيز MPC -100mg/L بتركيز 50,100µg/ml) وتم الحصول على الطبق الموضح في الشكل :



الفعالية البيولوجية MPC بطريقة الآغار تجاه جرثومة E.Coli

وفسرت النتائج بمقارنة أقطار التثبيط لكل من التركيزين مع قطر التثبيط للجنتامايسين مع كل جرثومة ، وتم الحصول على الجدول 6 :

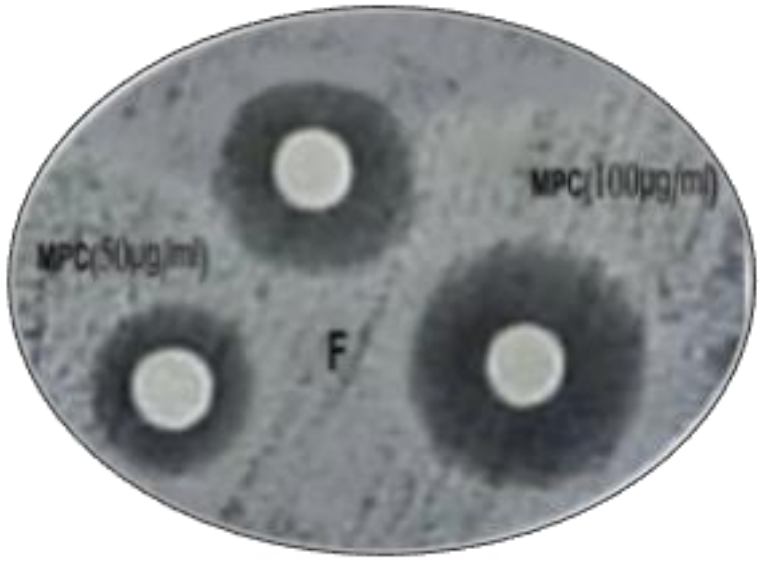
جدول 6 : أقطار التثبيط لميتيل فينيل كربامات والجنتامايسين تجاه الجراثيم سلبية وإيجابية الغرام

نوع الجرثومة	العينة	تركيز العينة	الوسط المستخدم	قطر منطقة التثبيط (mm)
S.aureas	جنتامايسين	100mg/L	TSA	20mm
	MPC	100µg/ml	TSA	10mm
		50µg/ml	TSA	10mm
E.Coli	جنتامايسين	100mg/L	TSA	22mm
	MPC	100µg/ml	TSA	11mm
		50µg/ml	TSA	11mm

3.5.2. دراسة الفعالية البيولوجية تجاه الفطور :

تم دراسة النشاط البيولوجي لميتيل فينيل كربامات على فطر الكانديدا في وسط مغذي من MHA وحضرت عينات من المركب السابق بتركيز 50,100µg/ml باستخدام مذيب DMSO وعينة من المادة المرجعية الفلوكونازول بتركيز 100mg/L باستخدام المذيب نفسه، ووضعت العينات في كل طبق بيتري تم إعدادها مسبقا باستخدام أسطوانات من الفولاذ المقاوم للصدأ ثم وضعت الأطباق داخل حاضنة مدة 48h بدرجة حرارة $35C^0$.

حيث تم نشر فطر الكانديدا على سطح الآغار ومن ثم تم زراعة ثلاثث بؤر (فلوكونازول (مضاد الفطر) بتركيز 100mg/L – MPC بتركيز 50,100µg/ml) وتم الحصول على الطبق الموضح في الشكل :



الفعالية البيولوجية MPC بطريقة الآغار تجاه فطر كانديدا

وفسرت النتائج بمقارنة أقطار التثبيط مع قطر التثبيط للفلوكونازول ، وتم الحصول على الجدول 7 :

جدول 7 : أقطار التثبيط لميتيل فينيل كربامات والفلوكونازول تجاه فطر كانديدا

الفطر	العينة	التركيز	الوسط المستخدم	قطر منطقة التثبيط
Candida	فلوكونازول	100mg/L	MHA	13mm
	MPC	100µg/ml	MHA	14mm
		50µg/ml	MHA	12mm

4.الاستنتاجات:

1. أعطى إستخدام بروميد الصوديوم نتائج أفضل لاصطناع الكاربامات كهروكيميائياً مقارنتاً بكلوريد ويوديد الصوديوم وهذا يعود الى سهولة أكسدة البروم مقارنة بالكلور وكبر حجم ذرة اليود.
2. الطريقة المستخدمة في اصطناع ميتيل فينيل كربامات كانت أكثر اقتصاداً في استخدام الغرافيت كأنود والزنك كاتود بدلاً من البلاتين .
3. الطريقة المستخدمة في اصطناع ميتيل فينيل كربامات كانت سهلة باستخدام بروميد الصوديوم كوسيط في وجود الميتانول .
4. أعطى ميتيل فينيل كربامات فعالية متوسطة على الجراثيم مقارنةً بالجنتامايسين .
5. أعطى ميتيل فينيل كربامات فعالية أكبر على جراثيم سلبية الغرام مقارنتاً بجراثيم إيجابية الغرام.
6. أعطى ميتيل فينيل كربامات فعالية أعلى من فعالية المادة المرجعية الفلوكونازول على فطر الكانديدا عند تركيز 100µg/ml .
7. تم عزل كربامات الميتيل وتنقيتها عن طريق عمليتي الإستخلاص والعامود الكروماتوغرافي ثم إثبات هويتها بالمطيافيات (IR–^{1}HNMR–^{13}CNMR).

5.المراجع:

1- Gribble GW. 9 B12 H20. Name Reactions for Homologation, Part 2. 2009 May 4:164.

2- Senanayake CH, Fredenburgh LE, Reamer RA, Larsen RD, Verhoeven TR, Reider PJ. Nature of N-bromosuccinimide in basic media: the true oxidizing species in the Hofmann rearrangement. Journal of the American Chemical Society. 1994 Aug;116(17):7947-8.

3- Zagulyaeva AA, Banek CT, Yusubov MS, Zhdankin VV. Hofmann rearrangement of carboxamides mediated by hypervalent iodine species generated in situ from iodobenzene and oxone: Reaction scope and limitations. Organic Letters. 2010 Oct 15;12(20):4644-7.

4 - Borah AJ, Phukan P. Efficient synthesis of methyl carbamate via Hofmann rearrangement in the presence of TsNBr2. Tetrahedron Letters. 2012 Jun 13;53(24):3035-7.

5 - Bastos GA, de Mattos MC. A convenient Hofmann reaction of carboxamides and cyclic imides mediated by trihaloisocyanuric acids. Tetrahedron Letters. 2021 Oct 26;83:153422.

6 - Jevtić II, Došen-Mićović L, Ivanović ER, Ivanović MD. Hofmann rearrangement of carboxamides mediated by N-bromoacetamide. Synthesis. 2016 Mar 11:1550-60.

7- Nishikawa T, Urabe D, Tomita M, Tsujimoto T, Iwabuchi T, Isobe M. One-pot transformation of trichloroacetamide into readily deprotectable carbamates. Organic Letters. 2006 Jul 20;8(15):3263-5.

8- Miranda LS, da Silva TR, Crespo LT, Esteves PM, de Matos LF, Diederichs CC, de Souza RO. TBCA mediated microwave-assisted Hofmann rearrangement. Tetrahedron letters. 2011 Apr 6;52(14):1639-40.

9- Matsumura Y, Satoh Y, Maki T, Onomura O. The electrochemically induced Hofmann rearrangement and its comparison with the classic Hofmann rearrangement. Electrochimica acta. 2000 Jun 9;45(18):3011-20

عزل وتشخيص بعض مسببات الأمراض المنقولة من عينات التربة في محافظة دمشق وريفها

د. بثينة الأشقر

ملخص البحث

تُعد التربة مستودعاً طبيعياً مهماً لمسببات الأمراض المعوية، مما قد يجعل لها دوراً كبيراً في نقل الأمراض المعوية. وتسبب الأمعائيات المنقولة بالتربة العدوى عبر تناول غذاء ملوث بالتربة أو استنشاق غبار تربة ملوث. هدفت هذه الدراسة إلى التحري عن وجود بعض الجراثيم المعوية المنقولة بالتربة وهي الإشيرشيا القولونية، السالمونيلا، والكليبسيلا في عينات تربة جمعت من مناطق مختلفة في محافظتي دمشق وريفها.

تم جمع 62 عينة تربة من تسع مناطق موزعة بين دمشق (بساتين الرازي، شارع بغداد، المهاجرين، باب توما، شيخ محي الدين) وريفها (دير الحجر، يبرود، معلولا، الصبورة). حضرت التخفيفات المتسلسلة من العينات وزرعت على وسط مغذي عام وعلى أوساط انتقائية لعزل الإشيرشيا القولونية والكليبسيلا، و السالمونيلا والشيغيلا، وحضنت الأطباق عند 37°م لمدة 24-48 ساعة. شخصت العزلات بالاختبارات الكيموحيوية، وتم تأكيد التشخيص جزيئياً باستخدام تفاعل البوليميراز المتسلسل (PCR) باستخدام مرئسات خاصة بكل جنس. تراوح اللوغاريتم العشري للتعداد الجرثومي الكلي بين 3.29 و 4.47 CFU/غ تربة، حيث سجلت أعلى القيم في منطقة يبرود (4.47) وأدناها في شارع بغداد ودير الحجر (3.29). أما التعداد على وسط EMB فقد تراوح بين 2.56 و 3.56 CFU/غ، بينما تراوح على وسط SS Agar بين 1.1 و 2.15 CFU/غ. أظهرت النتائج وجود الإشيرشيا القولونية والسالمونيلا والكليبسيلا في جميع المناطق المدروسة بنسب متفاوتة، في حين لم تعزل الشيغيلا في أي من العينات. أكدت نتائج الـ PCR وجود العصابات المتوقعة بأحجامها لكل من الجراثيم المدروسة، وكانت مطابقة بنسبة 100% مع نتائج

الاختبارات الكيموحيوية. تشير النتائج إلى انتشار واسع للجراثيم المعوية الممرضة في ترب مناطق دمشق وريفها، مع تباين في التعدادات بين مناطق الجمع.

الكلمات المفتاحية: الأمعائيات، التربة، الإشيرشيا القولونية، السالمونيلا، الكليبسيلا، تفاعل PCR، تلوث.

Isolation and Identification of Pathogens Transmitted from Soil Samples in Damascus Governorate and Its Countryside

Abstract

Soil is a significant natural reservoir for enteric pathogens, potentially playing a major role in the transmission of enteric diseases. Soil-borne Enterobacteriaceae cause infection through consumption of contaminated food or inhalation of contaminated soil dust. This study aimed to investigate the presence of some soil-transmitted enteric bacteria, namely *Escherichia coli*, *Salmonella*, and *Klebsiella*, in soil samples collected from various areas in Damascus Governorate and its countryside.

Sixty-two soil samples were collected from nine locations distributed between Damascus (Al-Razi Orchards, Baghdad Street, Muhajreen, Bab Touma, Sheikh Muhyi Al-Din) and its countryside (Deir Al-Hajar, Yabroud, Maaloula, Al-Saboura). Serial dilutions were prepared from the samples and cultured on general nutrient agar and selective media for isolation of *E. coli*, *Klebsiella*, *Salmonella*, and *Shigella*, then incubated at 37°C for 24-48 hours. Isolates were identified using biochemical tests, and identification was molecularly confirmed by Polymerase Chain Reaction (PCR) using genus-specific primers.

The logarithmic total bacterial count ranged from 3.29 to 4.47 CFU/g soil, with the highest value recorded in Yabroud (4.47) and the lowest in Baghdad Street and Deir Al-Hajar (3.29) CFU/g. Counts on EMB agar ranged from 2.56 to 3.56 CFU/g, while counts on SS Agar ranged from 1.1 to 2.15 CFU/g. The results revealed the presence of *E. coli*, *Salmonella*, and *Klebsiella* in all studied areas with varying frequencies, whereas *Shigella* was not isolated from any sample. PCR results confirmed the expected bands for each of the studied bacteria, showing 100% concordance with biochemical test results.

The findings indicate widespread occurrence of pathogenic enteric bacteria in soils of Damascus and its countryside, with variations in counts among sampling areas.

Keywords: Enterobacteriaceae, soil, *Escherichia coli, Salmonella, Klebsiella*, PCR, contamination.

1. المقدمة:

الأمراض المنقولة عبر التربة قد تسببها مجموعة واسعة من الكائنات الحية، ويمكن تقسيمها إلى مجموعتين رئيسيتين: الأولى هي الأحياء الدقيقة التي توجد بشكل طبيعي في التربة وتسبب الأمراض، والثانية هي مسببات الأمراض التي تبقى حية في التربة لفترات طويلة، مما يمكنها من نقل العدوى إلى الإنسان والحيوان والنبات. تتميز التربة باحتوائها على مجتمع ميكروبي حيوي غني وديناميكي، يتأثر بعدة عوامل تشمل الخصائص الفيزيوكيميائية للتربة، والظروف المناخية، والتفاعلات مع الكائنات الحية الأخرى (نباتية وحيوانية)، بالإضافة إلى الترسيبات المحمولة عبر الهواء أو الماء، وكذلك التدخلات البشرية [1].

هناك عدة مجموعات من الجراثيم المسببة للأمراض لدى البشر، من أبرزها الأمعائيات (Enterobacteriaceae)؛ وهي جراثيم عصوية الشكل، سالبة لصبغة غرام، توجد بشكل شائع في أمعاء البشر والحيوانات، ويُعد الإسهال من أهم أعراض الإصابة بها. تتميز هذه الجراثيم بقدرتها على مقاومة التجميد والتجفيف، وقد تتحمل درجات حرارة مرتفعة نسبياً. كما أن رطوبة التربة، إلى جانب امتصاص جزيئات الطين، يُسهمان في تعزيز بقاء هذه الكائنات المعوية [2].

في بعض الأحيان، يمكن عزل مسببات الأمراض المعوية سالبة الغرام من التربة بدلاً من الماء أو البراز. ونظراً لإمكانية وصول أي كائن حي إلى التربة عبر الماء أو الهواء الجوي، فإن التربة غالباً ما تُعتبر مصدراً رئيسياً للعدوى المنقولة بالمياه. قد تصل هذه المسببات إلى التربة نتيجة التلوث بمياه الصرف الصحي، أو النفايات البشرية والحيوانية. وفي البلدان النامية، يزداد الخطر بسبب استخدام مياه الصرف الصحي المنزلية غير المعالجة في الري الزراعي[3] .

من الممارسات التي تسهم في زيادة دخول كميات كبيرة من الأمعائيات إلى البيئة الترابية: استخدام الفضلات البشرية والحيوانية كأسمدة عضوية، والتخلص غير الملائم من الفضلات البشرية في الحدائق والمنتزهات العامة، خاصة في المناطق التي تفتقر إلى مرافق صحية مناسبة [4]

تتسبب الجراثيم المعوية سنوياً في وفاة ما بين 4 إلى 6 ملايين شخص حول العالم، وتُعد ثاني أكثر أسباب وفيات الأطفال شيوعاً على المستوى العالمي. ويصل المتوسط التقريبي للجراثيم القولونية في التربة إلى حوالي 10^6 وحدة تشكيل مستعمرة لكل غرام، وتشمل أبرزها: السالمونيلا

(*Salmonella*)، الإشيرشيا القولونية (*E. coli*)، الكليبسيلا (*Klebsiella*)، والشيغيلا (*Shigella*) [5].

تنتمي كل من السالمونيلا والشيغيلا إلى عائلة الأمعائيات، وعلى الرغم من أن معظم أفراد هذه العائلة قادرة على تخمير اللاكتوز منتجة غازاً خلال 48 ساعة (وهو ما يُعرف بالجراثيم القولونية بالمعنى الواسع)، إلا أن السالمونيلا والشيغيلا لا تخمران اللاكتوز عادةً، مما يميزهما عن غيرهما من الأمعائيات مثل الإشيرشيا القولونية والكليبسيلا [6].

العديد من سلالات جراثيم الإشيرشيا القولونية المنتشرة داخل الأمعاء غير ضارة ولا تسبب الأمراض؛ ومع ذلك هناك سلالات عديدة تنتج الذيفانات التي يمكن أن تسبب المرض لدى البشر أو الحيوانات والتي قد تكون شديدة في بعض الحالات اعتماداً على صحة المضيف ,[7] إن الإشيرشيا القولونية ذات النمط المصلي O157 السبب الأكثر شيوعاً للإسهال الجرثومي لدى الأطفال في البلدان النامية؛ حيث تتسبب في عدة مئات من ملايين حالات الإسهال وعشرات الآلاف من الوفيات على مستوى العالم كل عام [8]. وسطياً الجرعة المعدية من 10 إلى 100 جرثومة فقط كافية للتسبب في المرض، وهذا ما يُوضح الفوعة العالية نسبياً لهذا النمط المصلي من الإشيرشيا القولونية[7].

إن داء السالمونيلات ينتج عن مجموعة من الجراثيم المتحركة سالبة الغرام من جنس السالمونيلا. يشمل الجنس العديد من الأنواع الجرثومية وقد يحتوي كل نوع العديد من الأنماط المصلية. على سبيل المثال، يحتوي النوع *S. enterica* أكثر من 2500 نوع مصلي مختلف موصوف، بعضها مقيد بالمضيف وبعضها الآخر قد يكون له نطاق مضيف واسع جداً [9] . يظهر داء السالمونيلات كواحد من ثلاثة متلازمات متميزة، حمى التيفوئيد (المعوية)، التهاب الأمعاء؛ وحمى غير تيفوئيدية [10]؛ حيث أن أعراض الحمى التيفية غير نوعية مثل الإسهال أو القيء أو تضيق في التنفس؛ ولكن في بعض الحالات قد يتورم البطن والكبد والطحال يترافق مع بطء نسبي في ضربات القلب [11].

الكليبسيلا جراثيم سالبة الغرام من عائلة الجراثيم المعوية؛ عصوية الشكل. غير متحركة. غير متبوغة. ذات جدار خلوي مكون من عديد السكاكر (polysaccharides). تعد الكليبسيلا من أهم الأنماط الجرثومية الشاغلة للطب السريري والتي تؤدي لظهور أخماج ذات مدى، مثل: ذات

الرئة والتهاب الجهاز البولي وانتان الدم وغيره [12] وقد تم الكشف عن انتشار الأنواع المعندة بشدة من هذه الجراثيم بكل دول العالم مما جعلها تصبح حالة صحية عامة مهددة للحياة [13]. وتعد خيارات الأنظمة العلاجية ضد الكليبسيلا الرئوية المعندة على الأدوية محدودة للغاية، ومما يجعل الأمر أكثر سوءاً عدم قدرة الأدوية الحديثة على إحداث نجاعة كبيرة ضد هذه الجراثيم [14].

تُعد الإشيرشيا القولونية والسالمونيلا والكليبسلا الأكثر شيوعاً للأمراض التي تنتقل عن طريق الأطعمة الملوثة؛ فالسبب الرئيسي لتلوث الخضروات وبعض المحاصيل بهذه الجراثيم هو من التربة [15]. وعلى الرغم من أن الطرائق الرئيسية لانتقال الأمعائيات هي مياه الصرف الصحي الملوثة للطعام أو الماء، لكن أيضاً يمكن أن تبقى الإشيرشيا القولونية والسالمونيلا والكليبسلا في التربة لفترات زمنية طويلة كافية تؤدي إلى الإصابة. ويُعتبر محتوى رطوبة التربة العامل الرئيسي الذي يؤثر على طول فترة بقاء الأمعائيات في التربة؛ حيث يمكن أن تبقى حية في التربة الجافة لمدة 14 يوماً وأطول في التربة الرطبة [16]. وقد أظهر Avery وزملاؤه [17] أنها يمكن أن تعيش على سطح النباتات لمدة تصل إلى 6 أسابيع؛ وفي التربة لمدة 8 أسابيع؛ مع الأخذ بعين الاعتبار رطوبة التربة، ونوع السماد المُستخدم. كما أن السالمونيلا والإشرشيا القولونية والكليبسلا تصل للتربة غالباً عبر الأسمدة المستخدمة في تسميد التربة؛ والتي تبقى قادرة على الاستمرار حتى 231 يوماً مسببة تلوث الخضروات [18].

2. هدف البحث:

تُعد بكتيريا الأمعائيات من المجموعات الجرثومية واسعة الانتشار في البيئات المختلفة، ولا سيما التربة، حيث تلعب دوراً مهماً في الدورات الحيوية للمواد العضوية، كما تمثل في الوقت نفسه مؤشرات حيوية على التلوث البرازي والمخاطر الصحية المحتملة، لذلك تكمن أهمية عزل الجراثيم الممرضة من التربة في حماية الصحة العامة حيث أن اكتشاف المسببات المرضية يساهم في الوقاية من الأمراض التي تنتقل للإنسان والحيوان عبر التربة الملوثة. يتأثر تنوع وازدياد الجراثيم المسببة للأمراض في التربة بشكل رئيسي بالتغيرات في أعداد السكان. لذا يعد تحديد هذه الجراثيم ضروري لفهم طبيعة الأمراض التي تسببها ومن ثم تطوير وسائل السيطرة عليها؛ وتزداد أهمية

ذلك في ظل انتشار التهاب المعدة والأمعاء الذي تسببه بعض جراثيم سالبة الغرام في البلدان النامية، مما يجعل التحقيق من مصادر هذه العدوى إجراءً ضرورياً للصحة العامة؛ وانطلاقاً من هذه الأهمية، هدفت دراستنا إلى التحري عن بعض الجراثيم الممرضة التابعة لفصيلة الأمعائيات التي يمكن أن تنتقل عبر التربة وذلك في عينات مأخوذة من بعض مناطق دمشق وريفها.

3. الطرائق:

1.3 الاعتيان:

تم جمع 62 عينة تربة من مناطق متعددة في محافظتي دمشق وريفها، تراوح وزنها بين 250 و300 غرام، وذلك على عمق 5 سم من سطح التربة باستخدام أداة حفر معقمة، خلال الفترة الممتدة من 27 تشرين الثاني 2018 ولغاية 27 شباط 2019. شملت مواقع الاعتيان في محافظة دمشق: منطقة بساتين الرازي (المزة)، شارع بغداد، المهاجرين، باب توما، وشيخ محي الدين. أما في ريف دمشق، فشملت: دير الحجر، يبرود، معلولا، والصبورة. بعد الجمع، وُضعت العينات في أكياس معقمة، وحُفظت في مبردات تحتوي على الثلج، ثم نُقلت إلى المختبر في أسرع وقت ممكن. أُجري التعداد الميكروبي العام باستخدام وسط الآغار المغذي (Nutrient Agar)، كما تم الكشف عن بعض الجراثيم الممرضة باستخدام أوساط انتقائية تضمنت: وسط EMB لعزل الإشيرشيا القولونية والكليبسيلا، ووسط SS Agar (*Salmonella Shigella* Agar) لعزل السالمونيلا والشيغيلا (PIA, Difco, Sparks, Maryland, USA) [19].

ونظراً لأن هدف الدراسة الرئيس كان التحري الجرثومي عن بعض مسببات الأمراض المعوية، فقد ركزت منهجية العمل على الجوانب الجرثومية. لم يتم ضمن نطاق هذه الدراسة قياس الخصائص الفيزيوكيميائية للتربة مثل الرطوبة ودرجة الحموضة (pH) والمادة العضوية، وذلك لكونها تقع خارج نطاق الاختصاص الدقيق للبحث الحالي. ومع ذلك، فإن الدراسات المستقبلية قد تفيد في ربط هذه العوامل بالتعداد الجرثومي الذي تم الحصول عليه.

2.3 زرع العينات:

يُؤخذ في أنبوب معقم 10 غ من عينة التربة ويُضاف إلى 90 مل من الماء المقطر المعقم؛ وبذلك نكون حصلنا على التمديد 10^{-1}، وترقم برقم العينة التسلسلي، يُرج المزيج جيداً ليتشكل

معقد متجانس؛ يُؤخذ بعد ذلك 1 مل من التمديد الأول، وتُضاف إلى 9 مل من الماء المقطر والمُعقم ضمن أنبوب 15 مل وترج جيداً، ثم تحضر أربعة تخفيفات أخرى بنفس الطريقة وينتج عن ذلك تمديدات متسلسلة من 10^{-1} إلى 10^{-5} من عينة التربة.

يُؤخذ من كل من التخفيفات السابقة 1 مل ويُزرع على طبق NA وعلى أوساط الزرع الانتقائية، وتُفْرَش بوساطة ماسحة زجاجية معقمة، تُتْرَك الأوساط حتى تتشرب العينة جيداً، يؤخذ 3 مكررات لكل تخفيف، وتحضن الأطباق عند حرارة 37°م لمدة 72 ساعة على الأقل لحين نمو المستعمرات الجرثومية. تم اختيار المستعمرات الجرثومية النقية والمفردة لمتابعة العمل عليها.

3.3 صبغة غرام:

تُجرى صبغة غرام للجراثيم المعزولة للتعرف على شكل الخلايا الجرثومية وتَوَضُّعِها ولونها (تحضير ثلاث مُحضَّرات على الأقل من مستعمرات جرثومية مختلفة)، حيث يُحَضَّر غشاء جرثومي رقيق ومتجانس، ويُلَوَّن الغشاء بنقاط من صبغة الكريستال البنفسجي لمدة 30 ثانية، ثم يُغْسَل بتيار خفيف من الماء، ويُضاف عدة نقاط من محلول الإيودين لمدة 60 ثانية، يتم غسل المحضر بتيار خفيف من الماء، ثم يُعامل المحضر بالكحول الإيتيلي بنسبة 95% لمدة 15 ثانية، ويُغْسَل مباشرة بتيار خفيف من الماء لإيقاف عمل مزيل اللون، ثم يُلَوَّن المحضر بالسفرانين لمدة 15 ثانية، بعد ذلك يُغْسَل بلطف ويُنَشَّف بورق الترشيح؛ ليتم فحصه بوساطة المجهر الضوئي.

4.3 الاختبارات الكيموحيوية:

أجريت سلسلة من الاختبارات الكيموحيوية وفقاً للخصائص الحيوية الكيميائية الواردة في الدليلين المرجعين [20,21]. تُحَضَّر معلقات جرثومية لكافة العزلات المُراد اختبارها، حيث تُؤْخَذ مستعمرات نقية وتحل في 1 مل من المحلول الموقي (Phosphate- Buffered saline PBS) بكثافة تعادل McFarland 0.5، يُؤخذ من هذا المعلق حجم 50 ميكروليتراً لكل مستعمرة نقية ويُضاف إلى حجم 150 ميكروليتراً وسط اختبار لكل بئر من صفيحة الاختبارت الكيموحيوية ذات 96 بئر، حيث كل بئر مسؤول عن تفاعل كيموحيوي معين، وتوضع لصاقات خاصة بالصفائح وتُحضن مدة 24 ساعة في الدرجة 37°م، بعد انتهاء فترة الحضن تُنزع اللصاقة وتُضاف بعض

الكواشف وتُقرأ النتائج بالاستعانة ببرنامج Advanced Bacterial Identification Software (ABIS-online)على موقع Regnum Prokaryotae .

1.4.3. اختبار الكاتالاز: يُستخدم هذا الاختبار للكشف عن وجود أنزيم الكاتالاز الذي تنتجه بعض أنواع الجراثيم، حيث يتم في السلسلة التنفسية لبعض الأنواع إرجاع الفلافوبروتينات وبروتينات حديدي كبريتي لتشكل الماء الأوكسجيني ومركبات تحوي جذور فوق الأوكسيد وهي مركبات سامة يؤدي تراكمها في الخلية إلى الموت ولذلك فإن هذه الأنواع البكتيرية تنتج أنزيماً خاصاً يساعدها على التخلص من هذه المركبات السامة، ويتم إجراء هذا الاختبار بإضافة ماء أوكسجيني ممدد (3%) إلى المزرعة وفي حال ظهور أي فقاعات يُعد التفاعل إيجابياً ويكون سلبياً في حال عدم ظهورها.

2.4.3. اختبار الأوكسيداز: يعتمد هذا الاختبار على قدرة الجراثيم على إنتاج أنزيم الأوكسيداز داخل الخلوي حيث أجري باستعمال شرائح أوكسيداز BL ™DrySlide™ حيث يوضع عليها جزء من المستعمرة باستعمال ابرة الزرع ، يُظهر الاختبار نتيجة موجبة بتغير لون المستعمرات إلى الأرجواني الداكن أو الأزرق خلال 10–30 ثانية.

3.4.3. اختبار الفوكس بروسكاوير VP: هو اختبار لوني يكشف قدرة بعض الجراثيم القدرة على استقلاب حمض البيروفيك المتشكل إلى أسيتيل ميتيل كاربينول (الأسيتوئين) الذي يتحول بوجود الأوكسجين وهيدروكسيد البوتاسيوم 40% إلى دي أسيتيل. يُلَقَّح وسط MR–VP السائل بـ 10 ميكرولتر من المُعَلَّق البكتيري ويُحْضَن في الدرجة 37°م لمدة 18–24 ساعة. يُضاف 120 ميكرولتر من α–نفتول و40 ميكرولتر من KOH 40% بوجود الأكسجين ويُتْرَك في درجة حرارة الغرفة لمدة 10–15 دقيقة. يكون التفاعل إيجابياً إذا ظهر لون مائل إلى الزهري على السطح. ويكون التفاعل سلبياً إذا ظهر لون أصفر على السطح.

4.4.3. إرجاع النترات: يُلَقَّح وسط النترات السائل بـ 10 ميكرولتر من المُعَلَّق البكتيري ويُحْضَن في الدرجة 37°م لمدة 18 ساعة. يُضاف 20 ميكرولتر من الكاشف A و20 ميكرولتر من الكاشف B. يكون التفاعل إيجابياً إذا ظهر لون أحمر أو زهري بشكل واضح خلال دقائق معدودة. إذا لم يحدث تغير لوني، تُضاف كمية صغيرة من مسحوق الزنك وتُهَزُّ بقوة وتُتْرَك في درجة حرارة

الغرفة لمدة 10–15 دقيقة. يكون التفاعل إيجابياً إذا بقي الوسط عديم اللون. ويكون التفاعل سلبياً إذا عاد لون الوسط إلى الزهري.

5.4.3. اختبار الإندول: يُعد الإندول من المركبات العضوية العطرية متغايرة الحلقة الذي تستطيع أن تنتجه بعض أنواع الجراثيم كناتج لتحطيم الحمض الأميني التربتوفان والذي يتم بواسطة أنزيم التربتوفاناز وينتج عنه أيضاً البيروفات والنشادر. يُلَقَّح وسط النترات السائل بـ 10 ميكرولتر من المُعَلَّق البكتيري ويُحْضَن في الدرجة 37°م لمدة 18 ساعة. يُضاف 20 ميكرولتر من كاشف Kovacs. يكون التفاعل إيجابياً إذا ظهر لون يتراوح من الزهري إلى الأحمر. ويكون التفاعل سلبياً إذا لم تحدث تغيرات لونية.

6.4.3. نزع زمرة الكربوكسيل من الليزين: يُلَقَّح وسط Lysine decarboxylase بـ 10 ميكرولتر من المُعَلَّق البكتيري ويُحْضَن في الدرجة 37°م لمدة 18 ساعة بشكل لا هوائي عن طريق تغطية الوسط بطبقة من زيت معدني. يكون التفاعل إيجابياً إذا ظهر لون بنفسجي يبهت تدريجياً ليصبح أصفر بنفسجي. ويكون التفاعل سلبياً إذا ظهر لون أصفر.

7.4.3. نزع زمرة الكربوكسيل من الأُورْنِيثين: يُلَقَّح وسط ornithine decarboxylase بـ 10 ميكرولتر من المُعَلَّق البكتيري ويُحْضَن في الدرجة 37°م لمدة 18 ساعة بشكل لا هوائي عن طريق تغطية الوسط بطبقة من زيت معدني. يكون التفاعل إيجابياً إذا ظهر لون بنفسجي يبهت تدريجياً ليصبح أصفر بنفسجي. ويكون التفاعل سلبياً إذا ظهر لون أصفر.

8.4.3. حلمهة الأرجينين: يُلَقَّح وسط arginine decarboxylase بـ 10 ميكرولتر من المُعَلَّق البكتيري ويُحْضَن في الدرجة 37°م لمدة 18 ساعة بشكل لا هوائي عن طريق تغطية الوسط بطبقة من زيت معدني. يكون التفاعل إيجابياً إذا ظهر لون بنفسجي يبهت تدريجياً ليصبح أصفر بنفسجي. ويكون التفاعل سلبياً إذا ظهر لون أصفر.

9.4.3. حلمهة البولة: يُلَقَّح وسط البولة السائل بـ 10 ميكرولتر من المُعَلَّق البكتيري ويُحْضَن في الدرجة 37°م لمدة 18 ساعة. يكون التفاعل إيجابياً إذا ظهر لون زهري مُحْمَر. ويكون التفاعل سلبياً إذا لم يظهر أي تغير لوني.

10.4.3. استخدام السِّترات: يُلَقَّح وسط السِّترات السائل بـ 10 ميكرولتر من المُعَلَّق البكتيري ويُحْضَن في الدرجة 37°م لمدة 24-48 ساعة. يكون التفاعل إيجابياً إذا حدث نمو منتشر مع أو

بدون ظهور لون أزرق بروسي Prussian-blue فاقع. ويكون التفاعل سلبياً إذا لم يحدث نمو ولم يتغير اللون الأخضر.

11.4.3. استخدام المالونات: يُلَقَّح وسط المالونات السائل بـ 10 ميكرولتر من المُعَلَّق البكتيري ويُحْضَن في الدرجة 37°م لمدة 24–48 ساعة. يكون التفاعل إيجابياً إذا ظهر لون أزرق بروسي Prussian-blue. ويكون التفاعل سلبياً إذا أصبح اللون أصفراً أو لم يحدث تغير لوني.

12.4.3. استخدام الطرطرات (Jordan's): يُلَقَّح وسط الطرطرات السائل بـ 10 ميكرولتر من المُعَلَّق البكتيري ويُحْضَن في الدرجة 37°م لمدة 24–48 ساعة. يكون التفاعل إيجابياً إذا ظهر لون أصفر. ويكون التفاعل سلبياً إذا لم يحدث تغير لوني.

13.4.3. اختبار الحركة: تُلَقَّح المستعمرات المُختارة المأخوذة من زراعة صلبة نقية عمرها 18 ساعة، أو من زراعة سائلة عَكِرة بعمر 4–8 ساعات في وسط الحركة وذلك باستخدام إبرة مستقيمة يوخَز مركز البئر حتى منتصف طوله، ثم يتم الحضن في الدرجة 37°م لمدة 18 ساعة. يكون التفاعل إيجابياً إذا انتشر اللون الزهري في الوسط. ويكون التفاعل سلبياً إذا ظهر خط أحمر في موقع الوخز ولم يحدث انتشار.

14.4.3. اختبار حلمهة الجيلاتين: يُلَقَّح وسط الجيلاتين بـ 10 ميكرولتر من المُعَلَّق البكتيري ويُحْضَن في الدرجة 37°م لمدة 18 ساعة. يكون التفاعل إيجابياً إذا تحول الآغار شبه الصلب إلى سائل بعد الحضن في الدرجة 4°م. ويكون التفاعل سلبياً إذا بقي الآغار شبه صلب بعد الحضن في الدرجة 4°م.

15.4.3. اختبارات تخمير السكاكر: تختلف الأنواع البكتيرية في قدرتها على تخمير السكاكر ويستفاد من هذه الاختلافات في تمييز الأنواع عن بعضها ويحتوي الوسط المستعمل في هذا الاختبار على الببتون وبنفسجي البروم كريزول كمشعر و1% من محلول السكر المراد اختباره. يجب مراقبة الاختبار لفترة تتراوح بين 3–5 أيام للحكم على سلبية التفاعل ويتم الكشف عن إيجابية التفاعل بتغير لون الوسط إلى الأصفر. ومن السكاكر المستخدمة في الصفيحة: D-Adonitol وL-Arabinose وCellobiose وDulcitol وGlycerol وD-Glucose وmyo-Inositol وLactose وMaltose وD-Mannitol وD-Mannose وMelibiose وMucate وRaffinose وL-Rhamnose وD-Sorbitol وSucrose وTrehalose وD-Xylose.

5.3 استخلاص الـ DNA الجينومي:

يتم استخلاص الـ DNA الجرثومي باستعمال طريقة فينول–كلوروفورم Phenol-Chloform [22]، حيث يتم بداية استنبات مستعمرة جرثومية معزولة في وسط مغذي عام في الدرجة 37°م، ليلةً كاملةً، ثم يُؤخذ 1.5 مل من المستنبت الجرثومي ويُثفل لمدة 10 دقائق بسرعة 7500 rpm، يُوضع فوق الراسب الجرثومي 467 µl من موقي الـ TE (Tris–EDTA 10 mM Tris-HCl, 1 mM EDTA, pH 7.5-8.0) ويُضاف 8 µl من الليزوزيم (10 ملغ/مل)، يُرج المزيج جيداً ثم يُترك لمدة ساعة في حمام مائي، في الدرجة 37°م، يُضاف 3 µl من البروتيناز K (20 ملغ/مل)، و30 µl من الـ SDS (10%) ويُحضن المزيج في الدرجة 50°م لمدة ساعة، ثم يُضاف 200 µl من الـNaCl (5 مول)، ويُضاف 750 µl من المزيج فينول–كلوروفورم مع المزج الجيد، ثم يُثفل المزيج بسرعة 13000 rpm لمدة 15 دقيقة، يُضاف إلى الطافي (الحاوي على المادة الوراثية) 450 µl من الإيزوبربانول ويُثفل المزيج بسرعة 13000 دورة/د لمدة 45 دقيقة، ثم يُضاف إلى الراسب 1 مل من الإيتانول 70% لغسل الـ DNA بعد الترسيب بالإيزوبروبانول، وذلك لإزالة الأملاح والملوثات العضوية المتبقية مع المحافظة على ترسيب DNA ومنع جفافه الزائد، إذ أن الإيثانول المطلق (100%) قد يؤدي إلى صعوبة في إذابة DNA لاحقاً، ثم يُثفل المزيج بسرعة 13000 rpm لمدة 5 دقائق في الدرجة 4°م، ثم يُترك الراسب حتى يجف، ثم يُضاف 20 µl من موقي الـ TE ثم ثم قياس تركيز ونقاوة DNA باستخدام جهاز قياس المطيافية النانوي Nanodrop عند طول موجة 280 nm، حيث تعد النسبة 280A/260A بين 1.8–2.0 مقبولة وأن الدنا نظيف بدون شوائب. ويُحفظ الدنا البكتيري بالدرجة −20°م لحين الاستخدام.

6.3 اختبار التفاعل السلسلي للبوليمراز (PCR):

تم إجراء اختبار التفاعل السلسلي للبوليمراز باستخدام مرئسات لمورثات مُحافظة ضمن الجنس والنوع لكل من الإشيرشيا القولونية والكليبسلا والسالمونيلا (الجدول 1)، حيث تم طلب المرئسات من شركة Macrogen (سيؤول، كوريا)، يتضمن التفاعل 2 µl من عينة الـ DNA ذات التركيز 100 ng، و2.5 µl من الموقي ذو التركيز X10، و1.5 µl من $MgCl_2$ ذو التركيز 50

mM، و0.5 µl من النكليوتيدات منقوصة الأوكسجين dNTPs ذات التركيز 10 mM، و0.2 µl من أنزيم البوليميراز Taq DNA polymerase ذو التركيز 5U، و2 µl من المرئسات ذات التركيز 10 µM الجدول (1)، وتُمّم الحجم إلى 25 µl باستخدام الماء المقطر الخالي من النوكلياز Nuclease-Free Water [23]، أجري التفاعل باستخدام جهاز PCR من شركة BioRadالذي يمر بالخطوات الموضحة في الجدول 2

الجدول 1: المرئسات المستخدمة في دراستنا

Bacteria species	Gene	Annealing Tm	Sequence 5`- 3`	Product size (bp)
Kebsiella sp.	*Gyrase A*	60	CGCGTACTATACGCCATGAACGTA	441
			ACCGTTGATCACTTCGGTCAGG	
K. pneumoniae	*16 srDNA*	59	ACCCACTACGGTCGCGTATG	480
			TTTAGCCACGGCAGTAACACC	
Salmonella enterica (*typhimurium*)	*tyv*	58	GAGGAAGGGAAATGAAGCTTTT	615
			TAGCAAACTGTCTCCCACCATAC	
E. coli	*16 srDNA*	55	CAAGACATCATGGCCCTTAC	150
			ACTTCATGGAGTCGAGTTGC	

الجدول 2: مراحل اختبار الـ .PCR

	مراحل التفاعل	درجة الحرارة	الفترة الزمنية
	مرحلة التمسخ البدئي	95°م	3 دقائق
عدد الدورات (35)	مرحلة التمسخ الأولي	95°م	30 ثانية
	مرحلة الالتحام	54-60°م	45 ثانية
	مرحلة الاستطالة	72 °م	1 دقيقة
	مرحلة الاستطالة النهائية	72 °م	10 دقائق

7.3 الرحلان الكهربائي للدنا:

يُضاف 1.5 غ آغاروز لكل 100 مل من المحلول الموقي TE ضمن عبوة زجاجية مع المزج جيداً وتُوضع في الحمام المائي في الدرجة 65°م مع التحريك بلطف حتى زوال جميع بلورات

الآغاروز. تُتْرَك هلامة الآغاروز لتبرد قليلاً ثم يُصَب 25–30 مل في قالب الصب وتُضاف بضع قطرات من مركب الإيتيديوم بروميد مع المزج جيداً، ويُوضَع مشط خاص ضمن الهلامة لعمل آبار، وتُتْرك بعدها مدة 15 دقيقة لتتصلب. يُضاف 2–3 ميكروليتر من صبغة التحميل Loading Dye 6X (Thermo Fisher Scientific, Waltham, MA, USA) إلى كل عينة من عينات الدنا باستعمال الماصة الدقيقة. يُغْمَر القالب بالمحلول الموقي TE، باستعمال الماصة الدقيقة يُوضَع في البئر الأول 5 مل واسمة دنا عيارية DNA Marker ذات المجال 10000-100 bp من شركة (Thermo Fisher Scientific, Waltham, MA, USA) ويُوضَع في البئر الأخير الشاهد السلبي (ماء مقطر + مُرَنِّسات) للكشف عن أي تلوث في مكونات التفاعل، ويُؤْخَذ 10 µl من كل عينة من عينات الدنا (DNA) ليوضع في البئر الخاص بكل عينة. ثم يُؤخذ القالب بعناية ويوضع في جهاز مزود بالأشعة فوق البنفسجية (UV) وموصول بالحاسوب مزود بدوره ببرمجيات خاصة، تمكن من قراءة أحجام العصائب بمقارنتها مع واسمة الدنا [24].

4. النتائج:

يوضح الجدول 3 أن اللوغاريتم العشري للجراثيم في ترب بعض مناطق محافظة دمشق تراوح بين 3.29 و 3.8 CFU/غ تربة، حيث كانت القيمة الأكبر بمنطقة مزة (بساتين الرازي) والأقل بمنطقة شارع بغداد. بينما تراوح بين 3.29 (دير الحجر) و 4.47 (يبرود) في محافظة ريف دمشق (الجدول 3). أما اللوغاريتم العشري للجراثيم النامية على وسط الـ EMB تراوح بين 2.56 (مهاجرين) و 3.4 (بساتين الرازي) و 2.56 (دير الحجر) و 3.56 (معلولا) لمحافظتي دمشق وريفها على التوالي (الجدول 3). بينما تراوح اللوغاريتم العشري للجراثيم النامية على وسط الـS-S Agarبين 1.23 و2.02 لمحافظة دمشق و1.1 و 2.15لمحافظة ريف دمشق؛ حيث كان التعداد الأقل في منطقتي باب توما والصبورة؛ والأكثر في منطقتي شيخ محي الدين ومعلولا لمحافظتي دمشق وريفها على التوالي (الجدول 3).

الجدول 3: التعداد الميكروبي في كل غرام تربة (log_{10} CFU/g) تم جمعها من عدة مناطق لمحافظتي دمشق وريفها.

المحافظة	اللوغاريتم العشري للتعداد الميكروبي على منمي عام	اللوغاريتم العشري للتعداد الميكروبي على EMB	اللوغاريتم العشري للتعداد الميكروبي على S-S Agar
دمشق (34 منطقة)	3.29 – 3.8	2.56 – 3.4	1.23 – 2.02
ريف دمشق (28 منطقة)	3.29 – 4.47	2.56 – 3.56	1.1 – 2.15

ظهرت مستعمرات الإشيرشيا القولونية على وسط الـ EMB سوداء مزرقة، ذات لمعة معدنية خضراء؛ وبعد تلوين مستعمرات نقية نامية بدت تحت المجهر الضوئي بلون زهري (سالبة الغرام)؛ عصوية كخلايا مفردة أو كأزواج. بينما ظهرت السالمونيلا على وسط الـ S-S Agar مستعمرات ذات مركز أسود، وردية اللون بسبب تخميرها للاكتوز، وظهرت تحت عدسة المجهر الضوئي كجراثيم سالبة الغرام، عصوية، غير متبوغة. وظهرت مستعمرات الكليبسلا على وسط الـ EMB مُخاطية، وردية بدون لمعان أخضر معدني؛ وظهرت تحت المجهر الضوئي سالبة الغرام محاطة بمحفظة؛ مفردة أو ثنائيات أو على شكل سلاسل قصيرة جداً عصوية الشكل.

تم انتقاء مستعمرات مفردة وحلها بالموقي PBS للوصول إلى عكارة 0.5 Mcfarland ثم أجري لها اختبارات كيموحيوية باستخدام صفيحة 96 بئر، حيث توضح الجداول4 ، 5، 6 نتائج هذه الاختبارات للإشيرشيا القولونية والسالمونيلا والكليبسلا، على التوالي؛ وبعد إدخال النتائج عبر البرنامج الحاسوبي ABIS-online تبين أن نسبة التشابه كانت94.5% ، 98.7%، 95.6% على التوالي؛ وكانت متوافقة مع دليل بيرجى [20].

يُوضح الجدول 4 أن جراثيم الإشيرشيا القولونية موجبة لكل من: الكاتالاز، والأندول، وأحمر الميتيل، وإرجاع النترات، بينما كانت سالبة: الأوكسيداز، وفوكس- بروسكاير، والسيترات، والبولة، وإنتاجH_2S . وكانت مُخمرة للسكاكر: الغلوكوز، والأرابينوز، واللاكتوز، وغير مُخمرة لسكاكر الفركتوز، والسكاروز، والرافينوز والسيللبيوز.

الجدول 4: نتائج الاختبارات الكيموحيوية للإشيرشيا القولونية.

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Citrate	Acetate	H_2S	Indol	Vp	Mr	Nitrate	Ornithine	Arginine	Oxidase	Catalase	Motility
-	+	-	+	-	+	+	-	-	-	+	+
Lactose	Inositol	Glucose	Glycerol	Dulcitol	Cellebiose	Arabinose	Phy-alan	Urea	Gelatine	Esculine	Tartrate
+	-	+	-	-	-	+	-	-	-	-	+
			Fructose	Xylose	Trehalose	Sucrose	Sorbitol	Raffinose	Mannos	Mannitol	Maltose
			-	+	+	-	+	-	+	+	+

بينما كانت السالمونيلا موجبة الكاتالاز، و H_2S، Ornithine-Decarboxylase، أحمر الميتيل، والسيترات، ترجع النترات؛ وسالبة الأوكسيداز، فوكاس–بروسكاير، الأندول، البولة، ومخمرة لسكاكر الأرابينوز، الغلوكوز، المالتوز، المانوز؛ غير مُخمرة للسكاروز، اللاكتوز، الرافينوز (الجدول 5).

الجدول 5: نتائج الاختبارات الكيموحيوية للسالمونيلا.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Motility	Catalase	Oxidase	Arginine	Ornithine	Nitrate	Mr	Vp	Indol	H_2S	Acetate	Citrate
+	+	-	+	+	+	+	-	-	+	-	+
Tartrate	Esculine	Gelatine	Urea	Phy-alan	Arabinose	Cellebiose	Dulcitol	Glycerol	Glucose	Inositol	Lactose
-	-	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-
Maltose	Mannitol	Mannos	Raffinose	Sorbitol	Sucrose	Trehalose	Xylose	Fructose			
+	+	+	-	+	-	+	+	+			

كانت جراثيم الكليبسلا موجبة الكاتالاز، السيترات، فوكاس–بروسكاير، ترجع النترات، سالبة الأوكسيداز، فوكاس–بروسكاير، أحمر الميتيل، الاندول، H_2S ، ومُخمرة لمعظم السكاكر منها الأرابينوز، الغلوكوز، المالتوز، المانوز، الرافينوز، السكاروز (الجدول 6).

الجدول 6: نتائج الاختبارات الكيموحيوية للكليبسلا.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Motility	Catalase	Oxidase	Arginine	Ornithine	Nitrate	Mr	Vp	Indol	H_2S	Acetate	Citrate
-	+	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+
Tartrate	Esculine	Gelatine	Urea	Phy-alan	Arabinose	Cellebiose	Dulcitol	Glycerol	Glucose	Inositol	Lactose
+	+	-	+	-	+	+	+	+	+	+	+
Maltose	Mannitol	Mannos	Raffinose	Sorbitol	Sucrose	Trehalose	Xylose	Fructose			
+	+	+	-	+	+	+	+	+			

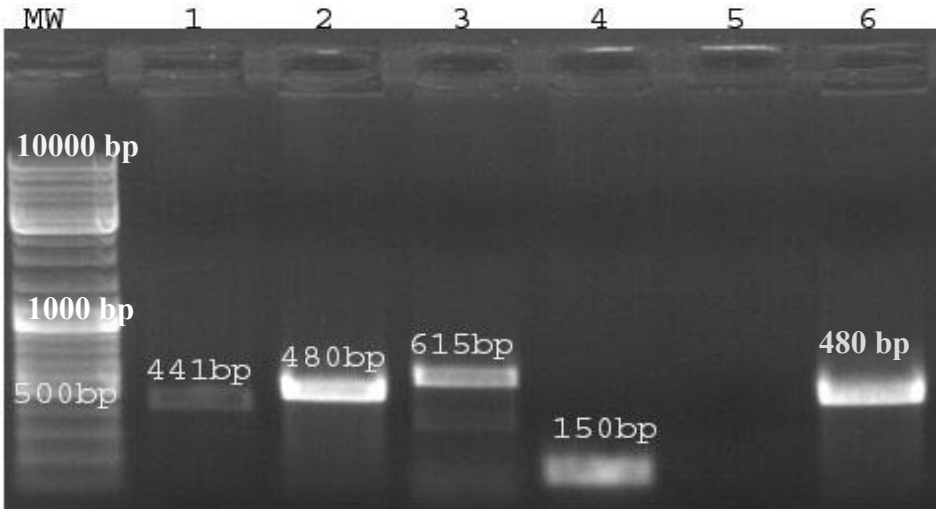
بناءً على تطابق نتائج الاختبارات الكيموحيوية مع الخصائص الواردة في الدليل المرجعي بيرجي للجراثيم المطلوب الكشف عنها، تم اختيار 23 عزلة تمثل الأجناس البكتيرية المدروسة. روعي في الاختيار تمثيل جميع المناطق التي ظهرت فيها هذه الجراثيم، واعتمد اختيار العزلات على نقاوة المستعمرات ووضوح نتائج الاختبارات الكيموحيوية. توزعت هذه العزلات كما يوضح الجدول رقم 7، حيث تم استخلاص DNA منها وقياس تركيزه باستعمال جهاز قياس الطيف النانوي Nanodrop والذي تراوح تقريباً بين (190–285 ng/µl) ومن ثم إجراء تفاعل PCR.

الجدول 7: توزع العزلات الجرثومية المثالية المُختارة للاختبارات اللاحقة.

رقم العزلة	اسم الجراثيم	مصدر العزلة	تركيز DNA المستخلص من العزلات (ng/µl)
E1	الإشيرشيا القولونية	بساتين الرازي	285
E2		بساتين الرازي	233
E3		المهاجرين	205

E4		يبرود	200
E5		يبرود	225
E6		يبرود	223
E7		معلولا	220
E8		معلولا	230
E9		معلولا	220
E10		دير الحجر	185
S1	السالمونيلا	معلولا	199
S2		معلولا	200
S3		معلولا	250
S4		يبرود	274
S5		يبرود	236
S6		شيخ محي الدين	210
S7		شيخ محي الدين	199
S8		بساتين الرازي	245
K1	الكليبسيلا	بساتين الرازي	263
K2		معلولا	255
K3		معلولا	250
K4		يبرود	199
K5		يبرود	210

تم ترحيل نواتج تفاعل الـ PCR على هلامة آغاروز 1.5% بوجود الايتيديوم بروماید بتركيز نهائي 0.2–0.5 مكغ/مل عند فولطية 75 v لمدة 45 دقيقة، وأُظهرت العصابات باستخدام أشعة الـ UV عند طول موجة 254 nm والنتائج موضحة في الشكل 1 للأطوال المتوقعة لشدف الدنا والموافقة لأطوال المورثات المحافظة المستخدمة في التفاعل وهي 441 و480 زوج من الأسس لكل من جنس الكلبسيلا والنوع الرئوية على التوالي، و615 و150 زوج من الأسس لكل من السالمونيلا التيفية والإشيرشيا القولونية على التوالي؛ وتجدر الإشارة إلى استعمال جراثيم الكليبسلا الرئوية العيارية بطول 480 زوج من الأسس (تم الحصول عليها من هيئة الطاقة الذرية السورية) كشاهد إيجابي للتفاعل والماء المقطر كشاهد سلبي للـ PCR.



الشكل :1 نواتج الرحلان الكهربائي لهلامة الآغاروز 1.5%: حيث المسارات (1–4): عينة بساتين الرازي؛ 1: جنس الكليبسلا 441 bp، 2: كليبسلا رئوية 480 bp، 3: سالمونيلا تيفية615bp ، 4: الإشيرشيا القولونية 150 bp ؛ 6: عزلة عيارية الكليبسلا الرئوية 480 bp؛ 5: شاهد سلبي (بدون DNA)؛ MW: واسم جزيئي معياري .100–10000bp

وتجدر الإشارة إلى أنه تم إجراء تفاعل الـ PCR على كل المستعمرات الجرثومية التي أُجري عليها الاختبارات الكيموحيوية والتي أظهرت تطابقاً تاماً لجميع العزلات المُختبرة.

5. المناقشة:

تُصنف الأمراض المنقولة عبر التربة إلى خمس مجموعات رئيسية استناداً إلى العوامل المسببة لها، وذلك بهدف تسهيل دراستها والرجوع إليها. تضم هذه المجموعات: الفيروسات، الجراثيم، الطفيليات، الفطريات، والديدان الخيطية (Nematodes)، وكل منها قادر على إحداث العدوى والأمراض.

لقد ثبت أن بعض الأمراض التي تنقلها التربة توجد بنسبة أعلى في الأشخاص في بعض المهن، مثل المزارعين والبيطرين، كما أنها تتأثر بالعوامل المناخية والبيئية والبشرية. لذلك يجب اتخاذ خطوات لتحديد العوامل التي لها أكبر الأثر على حدوث المرض، وبالتالي السماح باتخاذ تدابير أو صياغة سياسة لتقليل الآثار المدمرة والتكاليف الاجتماعية والاقتصادية للأمراض التي تنقلها التربة [25].

تبين في السنوات الأخيرة أن العديد من الدراسات المماثلة لدراستنا اهتمت بالكشف عن انتشار البكتيريا في التربة ففي دراسة وبائية في عام 2023 كشفت أن المحاصيل الزراعية المروية بمياه الصرف الصحي غير المعالجة، أو المحاصيل المأخوذة من تربة مسمّدة بروث الحيوانات كسماد عضوي، كانت سبباً مباشراً لتفشي عدد من الأمراض البشرية البارزة المرتبطة باستهلاك الفواكه والخضروات الطازجة [26]، وكذلك الأمر في دراسة في عام 2008 استطاع الباحثون عزل 80 عزلة من الجراثيم التابعة لفصيلة الأمعائيات من تربة مزارع ألبان وغير ألبان حيث أظهرت النتائج مقاومة عالية للصاد الحيوي التتراسكلين وأن هذه الترب الزراعية تعد مستودعاً مهماً للأمعائيات ومورثات المقاومة [27] إضافة إلى مجموعة الأمعائيات المنتجة لإنزيمات بيتا لاكتاماز واسعة الطيف ESBL [28]. كما استطاع الباحثين في دراسة في عام 2023 من عزل الاشريشيا القولونية من التربة والبيئة الزراعية المرتبطة بالمحاصيل [29].

تعد رطوبة التربة ملائمة لبقاء الأحياء الدقيقة حيث يمكن لها أن تمتز عبر جزيئات التربة؛ كما يُعتقد أن التربة الرطبة تحمي الجراثيم بتكوينها حاجز ضد الطفيليات الميكروبية [30] وبالتالي فإن معدلات بقاء العامل الممرض المعوي أقل في التربة الجافة أو التربة الرملية ذات القدرة المنخفضة على الاحتفاظ بالماء[31].

تجدر الإشارة إلى أن هذه الدراسة لم تتضمن قياس درجة حموضة التربة (pH) في المواقع المدروسة، على الرغم من الدور المعروف لهذا العامل في التأثير على بقاء وانتشار الجراثيم المعوية. فقد أشار [32] إلى أن الرقم الهيدروجيني يؤثر على خصائص امتزاز الجراثيم على جزيئات التربة، إذ أن الجراثيم تموت بمعدل أبطأ في التربة الحمضية لأن امتزازها على جزيئات التربة يزيد، مما يحميها من الظروف البيئية القاسية، إن عدم توفر هذه البيانات يعد إحدى محدوديات الدراسة الحالية.

في دراستنا كانت المناطق الأعلى تعداداً (يبرود، بساتين الرازي، معلولا)، ويعود ارتفاع تعدادها الجرثومي (الكلي والمعوي) على الأرجح إلى مزيج من الرطوبة الملائمة (خاصة في المناطق الزراعية) ودرجة حموضة قريبة من المتعادل، مما يوفر بيئة مثالية لنمو وبقاء الجراثيم، أما المناطق الأدنى تعداداً (شارع بغداد، باب توما، الصبورة): قد يعود انخفاض التعداد فيها إلى انخفاض الرطوبة (في المناطق الحضرية الجافة) و/أو ظروف حمضية غير ملائمة (حمضية أو قلوية) تمنع تكاثر الجراثيم، وخاصة الجراثيم المعوية. يمكن تفسير التباين الملحوظ في التعدادات الجرثومية بين مناطق الدراسة في ضوء الاختلافات في الخصائص الفيزيائية والكيميائية للتربة، خاصة نوع التربة ومحتواها من الرطوبة والمادة العضوية، حيث تزيد المواد العضوية القابلة للذوبان من قدرة الجراثيم على البقاء حية في التربة؛ وتُفضل درجات الحرارة المنخفضة؛ فقد لُوحظ أن ارتفاع درجة الحرارة من 15 درجة مئوية إلى 40 درجة مئوية، زاد بشكل ملحوظ انخفاض التعداد الميكروبي [6].

يعكس التباين في التعداد الجرثومي في الريف تنوعاً أكبر في الخصائص البيئية واستخدامات الأراضي بين المناطق الريفية، التي تتراوح بين أراضٍ زراعية نشطة وأخرى جافة أو قليلة النشاط، مقارنة بالبيئة الحضرية الأكثر تجانساً في مدينة دمشق.

أما بالنسبة للجراثيم المعوية النامية على وسط EMB، فقد تقاربت القيم بين المحافظتين بشكل لافت، حيث تراوحت في دمشق بين 2.56 (المهاجرين) و 3.4 (بساتين الرازي)، وفي ريف دمشق بين 2.56 (دير الحجر) و 3.56 (معلولا). يشير هذا التقارب إلى انتشار متجانس نسبياً لهذه المجموعة الجرثومية في كامل منطقة الدراسة، متأثرة على الأرجح بعوامل مشتركة مثل النشاط البشري والحيواني المنتشر في كلا المحيطين الحضري والريفي. توافقت نتائجنا مع دراسات حديثة أوضحت أن انتشار *E. coli* في التربة لا يختلف بشكل كبير بين البيئات الحضرية وشبه الحضرية

حيث سجلت نسب وجود متقاربة بلغت حوالي 80% في التربة الحضرية و 76.7% في التربة شبه الحضرية مما يشير إلى أن مصادر التلوث البيئي قد تكون متشابهة في كلا البيئتين. بالمقابل وفي نفس الدراسة وجدت أن نسبة انتشار *E. coli* في مدينة أخرى أقل من الريف بنسبة انتشار 44.7% [33]. كما بينت دراسات أخرى أن نسب وجود *E. coli* في بعض أنواع التربة المختلفة قد تصل إلى 73% في كل من الغابات والمراعي، وهو ما يدل على تقارب واضح في الانتشار بين البيئات المختلفة [34]. بينما يمكن حصول اختلاف في الأنماط الممرضة لنفس النوع الجرثومي بين المدينة والريف حيث تم رصد مستويات أعلى من مقاومة المضادات الحيوية في المناطق الريفية[35].

في المقابل، أظهر التعداد على وسط SS Agar الخاص بالسالمونيلا والشيغيلا تبايناً أكثر وضوحاً، خاصة في ريف دمشق الذي سجل أدنى قيمة مطلقة بين جميع المناطق (1.1 CFU/غ في الصبورة) وأعلى قيمة (2.15 CFU/غ في معلولا)، بينما تراوحت قيم دمشق بين 1.23 (باب توما) و 2.02 (شيخ محي الدين). يعكس هذا التباين حساسية هذه المجموعة الجرثومية للعوامل المحلية الدقيقة (Micro–local factors)، مثل طبيعة التربة، درجة الرطوبة، المحتوى العضوي، ووجود مصادر تلوث محددة كالأنشطة الزراعية أو السياحية أو استخدام الأسمدة العضوية. وفي دراسة مشابهه لنتائجنا أظهرت الدراسات الخاصة بالتربة الزراعية الريفية أن انتشار *Salmonella* يكون عادة أقل من *E. coli* لكنه يبقى مرتبطًا بشكل وثيق بالنشاط الزراعي واستخدام الأسمدة الحيوانية. فقد سجلت جراثيم *Salmonella* انتشار بنسبة 0.418%، بينما بلغت نسبة *E. coli* في نفس التربة 11.3%، مما يؤكد أن التربة الزراعية تمثل خزاناً بيئياً مهماً لجراثيم الأمعائيات، خاصة في المناطق التي تتعرض لملوثات حيوانية[36].

بشكل عام، تشير النتائج إلى أن البيئة الريفية أكثر تبايناً من البيئة الحضرية من حيث الحمل البكتيري في التربة، حيث سجلت أعلى القيم (يبرود) وأدناها (الصبورة) في آن معاً. يبرز هذا التباين أهمية دراسة العوامل البيئية الدقيقة عند تقييم المخاطر الصحية المرتبطة بالتربة، ويؤكد على ضرورة إجراء المزيد من الدراسات التحليلية التي تربط الخصائص الفيزيوكيميائية للتربة بالحمل الميكروبي، خاصة في المناطق الريفية التي أظهرت التنوع الأكبر.

ومن المعلوم جيداً أن ضوء الأشعة فوق البنفسجية من الشمس يُفقد الأحياء الدقيقة على سطح التربة قدرتها على النمو أو التكاثر، ولكن تلك التي في الطبقات العميقة لا تتأثر، ونظراً لأن عينات التربة في هذه الدراسة جمعت من عمق 5 سم، فإن تأثير الأشعة فوق البنفسجية قد يكون محدوداً على هذه العينات، مما قد يسهم في بقاء الأحياء الدقيقة فيه [37,38] .

تعتمد حركة الأحياء الدقيقة في التربة على درجة التشبع بالماء، إذ تتحرك بسرعة أكبر في التربة المشبعة بالماء، لكن ضمن مسافات محدودة لا تتجاوز بضعة سنتيمترات، مما يعزز في النهاية امتزازها على جزيئات التربة [39]. وقد أظهرت الدراسات أن تلوث المياه الجوفية بالجراثيم والفيروسات يزداد خلال فترات هطول الأمطار الغزيرة، حيث تم الكشف عن وجود جراثيم معوية في الآبار الضحلة والعميقة بالتزامن مع هذه الفترات [40].

استناداً إلى ما تقدم، تم اختيار فصل الشتاء موعداً لجمع عينات التربة في هذه الدراسة، بهدف زيادة احتمالية الكشف عن الجراثيم المعوية في المناطق المختلفة من محافظتي دمشق وريفها.

أظهرت النتائج وجود جراثيم الإشريشيا القولونية، والسالمونيلا، والكليبسيلا في جميع المناطق التي جمعت منها العينات، في حين لم تُعزل جراثيم الشيغيلا في أي منها. ويمكن تفسير هذا التواجد الواسع للجراثيم المعوية بعدة عوامل أهمها تأثير هطول الأمطار حيث ساهمت الأمطار الشتوية في نقل هذه الجراثيم من مصادرها (كالفضلات البشرية والحيوانية، والأسمدة العضوية) عبر الجريان السطحي والتسرب، مما أدى إلى انتشارها في مختلف المواقع المدروسة. أما بالنسبة لغياب جراثيم الشيغيلا عن جميع العينات، فقد يعود إلى حساسيتها العالية للظروف البيئية مقارنة بالأمعائيات الأخرى، أو إلى محدودية مصادر تلوث التربة بهذا الكائن في مناطق الدراسة. ولعل أهم الفروق العملية التي تفسر غياب الشيغيلا في عينات التربة في دراستنا هو انخفاض قدرتها على البقاء خارج المضيف مقارنة بالسالمونيلا، حيث تحتاج الشيغيلا إلى جرعة معدية منخفضة جداً لكنها حساسة للظروف البيئية ولا تبقى حية طويلاً في التربة [4] . كما أن مصدر تلوث التربة بالشيغيلا يقتصر على الفضلات البشرية فقط، بينما تلوث السالمونيلا يمكن أن يحدث من مصادر حيوانية وبشرية متنوعة [3].

لم يتضمن نطاق هذه الدراسة إجراء استبيان حول استخدام الأسمدة العضوية (كالسماد الحيواني أو البشري أو الكومبوست) في مواقع جمع العينات، وذلك لتركيزها الأساسي على الجانب الميكروبيولوجي الكمي. يُعد هذا القصور إحدى محدوديات الدراسة الحالية، خاصة وأن الأسمدة العضوية تُعتبر مصدراً مهماً لتلوث التربة بالجراثيم المعوية.

وقد يكون انخفاض المحتوى العضوي في بعض الترب المدروسة قد عزز من قابلية التربة للجفاف، مما يؤثر بدوره على بقاء الجراثيم وانتشارها [41]. وبذلك يسهم في نشر الأمراض المنقولة بالتربة. وقد أشارت الدراسات إلى أن انخفاض حدوث هذه الأمراض يرتبط بالخطوات المتخذة للحد من تدهور التربة في بعض البلدان [19].

يُوضح الجدول 3 أن تواتر تواجد الإشيرشيا القولونية أكثر من السالمونيلا وقد يكون السبب هو استخدام السماد العضوي في بعض الترب المدروسة فقد لُوحظ أن التربة قد تكون مصدراً جزئياً لجراثيم *E. coli* O157 بسبب قدرتها على التكاثر داخل التربة لذا تم عزل سلالات *E. coli* من طفل مريض كان يلعب في حديقة المنزل[42] ؛ كما أن أولى حالات الإصابة بجراثيم *E. coli* كان مرتبطاً باستخدام فضلات الحيوانات كسماد [43].

. وفي معسكر كشافة اسكتلندي ارتبط تفشي مرض الإشيرشيا القولونية بالتربة قد يكون بسبب روث الأغنام التي كانت ترعى هناك [44]. وفي دراسة أخرى لوحظ أن متوسط تعداد الإشيرشيا القولونية في غرام واحد من التربة أكثر من 10^5 x CFU1 وهو تقريباً متوسط تعداد هذه الجراثيم في المناطق المختبرة في دراستنا [45].

وللأمعائيات قدرة للبقاء فترة طويلة نسبياً في التربة؛ فقد أظهر Feachem وزملاؤه [46] أنه يمكن بقاء الأمعائيات في لمدة تتراوح بين 10−20 يوماً؛ كما أوضح Johannessen وزملاؤه [47] أن يمكن ان تبقى الإشيرشيا القولونية لمدة تتراوح من أربعة إلى ثمانية أسابيع لهذا أوصى أن يتم حصاد المنتجات النباتية بعد 120 يوماً على الأقل من استخدام السماد الطبيعي. وأوضح Islam وزملاؤه (2004) [18] أن السالمونيلا يمكن أن تبقى قيد الحياة في عينات التربة لمدة 203 إلى 231 يوماً. وهناك العديد من الدراسات التي أوضحت أن الكليبسلا (الرئوية و oxytoca) يكن

أن تكون ممرضة للإنسان ولكن أيضاً يكن أن تكون مفيدة من خلال تثبيت الأزوت الجوي في التربة؛ لهذا هذه الجراثيم قد تكيفت للبقاء في التربة .[48,49,50]

في هذه الدراسة تم الاعتماد على تشخيص جراثيم الأمعائيات باستعمال التقانات التقليدية والتي تتضمن العزل المخبري متبوعاً بإجراء مجموعة من الاختبارات الحيوية الكيميائية، والتي تُستخدم للتمييز بين أنواع الأمعائيات المختلفة اعتماداً على خصائصها الاستقلابية، وهذا ما يتوافق مع أغلب الدراسات المرجعية في هذا المجال [51,52]. ومع التطور في التقنيات الجزيئية، أصبحت تقانة PCR أداة أساسية في تأكيد التشخيص المخبري، لما تمتاز به من حساسية ونوعية عاليتين، إذ تسمح بالكشف عن جينات نوعية مثل مورثة *16S rDNA* أو مورثات متخصصة أخرى، مما يسهم في رفع دقة التعرف على الأنواع الجرثومية وتقليل احتمالية الخطأ الناتج عن التشخيص التقليدي [53,54]

بينت نتائج الاختبارات الجزيئية لتأكيد العزلات الجرثومية أن المورثة *16S rDNA* ذات أهمية تصنيفية في تمييز الأمعائيات وخاصة الأيشريشيا الكولونية والكليبسيلا بدقة، إذ تعد هذه المورثة قاعدة تحدد اماكن ارتباط البروتينات الريبوزومية كما أن لها دور في بدء عملية تركيب البروتين، ففي دراسة أجريت في عام 2025 وضحت أن استعمال الأطوال القصيرة من (250–500 bp) يمكن استخدامها في تفاعل PCR وتعطي تحديداً جيداً على مستوى الجنس والنوع البكتيري بما في ذلك الأيشريشيا الكولونية والكليبسيلا [55,56]، وهذا ما يتوافق مع نتائج دراستنا الحالية. أما بالنسبة لتمييز جراثيم الكليبسيلا فقد أعطت بعد الترحيل شدفة بطول441 bp، وهو ما يتوافق مرجعياً مع استخدام المورثة *gyrA* والتي تُشفّر الوحدة الفرعية A من إنزيم DNA gyrase على نطاق واسع كعلامة جزيئية لتصنيف الكلبسيلا وتحديد علاقاتها التطورية. وعلى وجه الخصوص تُعدّ قطعة المورثة *gyrA* التي يبلغ طولها 441 bp من بين أكثر المناطق تضخيماً نظراً لقدرتها العالية على التمييز بين المجموعات التطورية المتقاربة داخل الجنس [57,58].

أما بالنسبة لتمييز أنواع السالمونيلا فقد استخدمت الدراسة تصميم مرئسات مستهدفة لمورثة *tyv* التي ترمز لإنزيم tyvelose epimerase في *Salmonella enterica*. تُنتج هذه البادئات شدفة بطول ~615 bp عند وجود المورثة السّليمة في جراثيم *S. Typhi*، بينما في *S.*

Paratyphi A تُفقد قابلية التكَوّن بسبب طفرة إطارية في tyv، مما يُمكّن من التمييز بين النمطين استناداً إلى طول الشدفة [59] وهذا ما كان متوافقاً مع نتيجة دراستنا حيث ظهرت الشدفة الخاصة بتمييز السالمونيلا بنفس الطول.

تُعد التربة مستودعاً طبيعياً مهماً للجراثيم المقاومة للمضادات الحيوية، كما تحتوي على مجموعة متنوعة من مورثات مقاومة المضادات الحيوية، والتي تتميز بقدرتها على الانتشار السريع في الأوساط السريرية عبر نقل المورثات الأفقي (Horizontal Gene Transfer)، مما يشكل تهديداً صحياً كبيراً [60].

6.الاستنتاجات والتوصيات:

بناءً على ما تقدم، توصي الدراسة الحالية بضرورة متابعة وتحليل العزلات الجرثومية المقاومة للمضادات الحيوية في ترب مناطق دمشق وريفها في المستقبل القريب، وذلك للكشف عن مدى انتشار هذه المقاومة، وتحديد المخاطر المحتملة على الصحة العامة في ضوء العلاقة الوثيقة بين التربة كمستودع طبيعي للمقاومة والظروف السريرية.

كما يُوصى بإجراء دراسات مستقبلية تشمل تحليلاً فيزيوكيميائياً للتربة (pH، رطوبة، مادة عضوية) بالتزامن مع العد الميكروبي، لفهم أعمق للعوامل البيئية المتحكمة في بقاء وتوزع الجراثيم المعوية في التربة.

بناءً على محدوديات الدراسة الحالية يُوصى في الدراسات المستقبلية إجراء استبيانات ميدانية بالتزامن مع جمع العينات، تشمل معلومات عن استخدام الأسمدة العضوية (النوع، الكمية، وتكرار الاستخدام) في المواقع المدروسة، وذلك لربط هذه الممارسات بالتعداد الجرثومي وفهم مصادر التلوث بشكل أدق.

7.المراجع:

[1] Wang Y, Zhang M, Delgado-Baquerizo M, Li G, Cai J, Pan X, Wang Y, Xiao Y. Long-term grazing effects on soil-borne pathogens are driven by temperature. **Communications Biology**. 2024 Nov 26;7(1).

[2] Michelon W, Peter NRW, Schneider TM, Segalla DC, Viancelli A. Enterobacteria Survival, Percolation, and Leaching on Soil Fertilized with Swine Manure. **International Journal of Environmental Research and Public Health**. 2023 Mar 28;20(7):5283.

[3] Daly SW, Chieng B, Araka S, Mboya J, Imali C, Swarthout JM, et al. Enteric Pathogens in Humans, Domesticated Animals, and Drinking Water in a Low-Income Urban Area of Nairobi, Kenya. **Environmental Science & Technology**. 2024 Nov 26;58(49):21839–49

[4] Wójcik-Fatla A, Ewelina Farian, Kowalczyk K, Sroka J, Skowron P, Grzegorz Siebielec, et al. Enterobacteriaceae in Sewage Sludge and Digestate Intended for Soil Fertilization. **Pathogens**. 2024 Nov 30;13(12):1056–6.

[5] Leon IM, Auvermann BW, Bush KJ, Casey KD, Pinchak WE, Gizem Levent, et al. Comprehensive Analysis of *E. coli*, *Enterococcus* spp., *Salmonella enterica*, and Antimicrobial Resistance Determinants in Fugitive Bioaerosols from Cattle Feedyards. **Applied Microbiology**. 2025 Jul 20;5(3):63–3.

[6] Holley RA, Arrus KM, Ominiski KH., Tenuta M, Blank G. *Salmonella* survival in manure-treated soil during simulated seasonal temperature exposure**. Journal of Environmental Quality**. 2006;35:1170–1180.

[7] Altaie HAA, Gdoura Ben Amor M, Mohammed BA, Gdoura R. Detection and Characterization of Escherichia coli and Escherichia coli O157:H7 in Human, Animal, and Food Samples from Kirkuk Province, **Iraq. Microbiology Research.** 2025 Jan 16;16(1):20. https://doi.org/10.3390/microbiolres16010020.

[8] Qadri F, Svennerholm AM ., Faruque ASG, Sack RB. Enterotoxigenic Escherichia coli in Developing Countries: Epidemiology, Microbiology,

Clinical Features, Treatment, and Prevention. **Clinical Microbiology Reviews**. 2005 Jul 1;18(3):465–83.

[9] Bryan, C, Grassl GA, Finlay BB. *Salmonella*, the host and disease: A brief review. **Immunology and Cell Biology**. 2007; 85:112–118.

[10] Lamichhane B, Mawad AMM, Saleh M, Kelley WG, Harrington PJ, Lovestad CW, Salmonellosis: An Overview of Epidemiology, Pathogenesis, and Innovative Approaches to Mitigate the Antimicrobial Resistant Infections. **Antibiotics**. 2024 Jan 13;13(1):76.

[11] Feasey NA, Dougan G, Kingsley RA, Gordon MA. Invasive non-typhoidal *Salmonella* disease: An emerging and neglected tropical disease in Africa. **The Lancet**. 2012; 379:2489–2499.

[12] Won SY, Munoz-Price LS, Lolans K, Hota B, Weinstein RA, Hayden MK. Emergence and Rapid Regional Spread of *Klebsiella pneumoniae* Carbapenemase-Producing Enterobacteriaceae. **Clinical Infectious Diseases.** 2011 Aug 24;53(6):532–40.

[13] Hu Y, Ping Y, Li L, Xu H, Yan X, Dai H. A retrospective study of risk factors for carbapenem-resistant *Klebsiella pneumonia* acquisition among ICU patients. **Journal of Infection in Developing Countries**. 2016;10(3):208–213.

[14] Rafailidis PI, Falagas ME. Options for treating carbapenem-resistant Enterobacteriaceae. **Current Opinion in Infectious Diseases**. 2014;27(6):479–483.

[15] Osafo R, Balali GI, Amissah-Reynolds PK, Gyapong F, Addy R, Nyarko AA, Wiafe P. Microbial and parasitic contamination of vegetables in developing countries and their food safety guidelines. **Journal of Food Quality**. 2022;4141914.

[16] Allison SD, & Treseder KK. Climate change feedbacks to microbial decomposition in boreal soils. Fungal Ecology. 2011; 4(6):362–374.

[17] Avery LM, Hill P, Killham K, Jones DL. *Escherichia coli* O157 survival following the surface and sub-surface application of human pathogen contaminated organic waste to soil. **Soil Biology & Biochemistry**. 2004;36:2101–2103.

[18] Islam M, Morgan J, Doyle MP, Phatak SC, Millner P, Jiang X. Fate of Salmonella enterica Serovar Typhimurium on Carrots and Radishes Grown in Fields Treated with Contaminated Manure Composts or Irrigation Water. **Applied and Environmental Microbiology**. 2004 Apr;70(4):2497–502.

[19] Hutchison ML, Walters LD, Moore A, Crookes KM, Avery SM. Effect of Length of Time before Incorporation on Survival of Pathogenic Bacteria Present in Livestock Wastes Applied to Agricultural Soil. **Applied and Environmental Microbiology**. 2004 Sep;70(9):5111–8

[20] Holt JG, Krieg NR. Bergey's Manual of Determinative Bacteriology. 9th Edition. 1994; **Lippincott Williams and Wilkin**s, Baltimore.

[21] Forbes BA, Sahm DF, Weissfeld AS. Bailey & Scott's Diagnostic Microbiology. 14th ed. St. Louis (MO): **Elsevier**; 2017.

[22] Wright MH, Adelskov J, Greene AC. Bacterial DNA extraction using individual enzymes and phenol/chloroform separation. **J Microbiol Biol Educ**. 2017;18(2):18.2.48. doi:10.1128/jmbe.v18i2.1348.

[23] Li JW, Shi XQ, Chao FH, Wang XW, Zheng JL, Song N. A study on detecting and identifying enteric pathogens with PCR. **Biomedical and Environmental Sciences**. 2004;17(1):109–120.

[24] Sambrook J, Russell DW. Molecular cloning: A laboratory manual. 3rd ed. 2001. **Cold Spring Harbor Laboratory Press**.

[25] Ansingkar VM, & Kulkarni NS. Studies on survival of *Salmonella typhimurium* in phytopathogen damaged and healthy fresh produce. **WebmedCentra**l**.** 2013**.** Retrieved from http://www.webmedcentral.com/article_view/3988.

[26] Stiborova H, Kracmarova M, Vesela T, Biesiekierska M, Cerny J, Balik J, et al. Impact of Long-Term Manure and Sewage Sludge Application to Soil as Organic Fertilizer on the Incidence of Pathogenic Microorganisms and Antibiotic Resistance Genes. **Agronomy**. 2021 Jul 16;11(7):1423.

[27] Velusamy S, Nam HM, Sawant AA, Headrick SI, Nguyen L, Oliver SG. Distribution of Tetracycline and Streptomycin Resistance Genes and Class 1 Integrons in Enterobacteriaceae Isolated from Dairy and Nondairy Farm Soils. **Microbial Ecology**. 2008 Feb 1;55(2):184–93.

[28] Ben Said L, Jouini A, Klibi N, Dziri R, Alonso CA, Boudabous A, et al. Detection of extended-spectrum beta-lactamase (ESBL)-producing Enterobacteriaceae in vegetables, soil and water of the farm environment in Tunisia. **International journal of food microbiology**. 2015;203:86–92.

[29] Igbinosa EO, Abeni Beshiru, Igbinosa IH, Cho GS, Charles. Multidrug-resistant extended spectrum β-lactamase (ESBL)-producing Escherichia coli from farm produce and agricultural environments in Edo State, Nigeria. **PLoS One.** 2023 Jan 1;18(3):e0282835–5.

[30] Côté C, Quessy S. Persistence of *Escherichia coli* and *Salmonella* in surface soil following application of liquid hog manure for production of pickling cucumbers. **Journal of Food Protection**. 2005; 68(5):900–905.

[31] Brady NC, & Weil RR. The nature and properties of soils (14th ed.). **Prentice Hall.** 2007.

[32] Aslam A, Kanwal F, Javied S, Nisar N, Torriero AAJ. Microbial biosorption: A sustainable approach for metal removal and environmental remediation. **International Journal of Environmental Science and Technology.** 2025; 22:13245–13276.

[33] Pritom Kumar Pramanik, Hoque MN, Rana ML, Islam MS, Ullah MA, Fahim Haque Neloy, et al. Prevalence and antibiotic resistance of

Escherichia coli in urban and peri-urban garden ecosystems in Bangladesh. **PLoS ONE**. 2025 Feb 6;20(2):e0315938–8.

[34] Dusek N, Hewitt AJ, Schmidt KN, Bergholz PW. Landscape-scale factors affecting the prevalence of Escherichia coli in surface soil include land cover type, edge interactions, and soil pH. **Appl Environ Microbiol**. 2018;84(10):e02714-17. doi:10.1128/AEM.02714-17.

[35] Montero L, Smith SM, Jesser KJ, Paez M, Ortega E, Peña-Gonzalez A, et al. Distribution of Escherichia coli Pathotypes along an Urban–Rural Gradient in Ecuador. **American Journal of Tropical Medicine and Hygiene**. 2023 Sep 6;109(3):559–67.

[36] Diekman CM, Cook C, Strawn LK, Danyluk MD. Factors Associated with the Prevalence of Salmonella, Generic Escherichia coli, and Coliforms in Florida's Agricultural Soils. **Journal of Food Protection**. 2024 May;87(5):100265.

[37] Rokitko PV, Romanovskaya VA, Malashenko YuR, Chernaya NA, Gushcha NI, Mikheev AN. Soil Drying As a Model for the Action of Stress Factors on Natural Bacterial Populations. **Microbiology**. 2003 Nov;72(6):756–61.

[38] Rokitko PV, Romanovskaya VO, Malashenko Y R, Chernaya NA. Effect of UV-radiation and drying on bacterium diversity in soil. **Mikrobiolohichnyi Zhurnal**. 2004;66 (4):68–77.

[39] Wang M, Zhu J, Mao X. Removal of Pathogens in Onsite Wastewater Treatment Systems: A Review of Design Considerations and Influencing Factors. **Water**. 2021 Apr 25;13(9):1190

[40] Kang M, Ve Van Le, Ko SR, Chun SJ, Choi DY, Shin Y, et al. Effect of rainfall in shaping microbial community during Microcystis bloom in Nakdong River, Korea. **The Science of The Total Environment**. 2024 Jun 1;928:172482–2.

[41] Guan TY, Holley RA. Pathogen survival in swine manure environment and transmission of human enteric illness**. Journal of Environmental Quality**. 2003;32:383–392.

[42] Mukherjee A, Cho S, Scheftel J, Jawahir S, Smith K, Diez-Gonzalez F. Soil survival of *Escherichia coli* O157:H7 acquired by a child from

garden soil recently fertilized with cattle manure. **Journal of Applied Microbiology**. 2006 Aug;101(2):429–36.

[43] Omri (1998). Use of manure, compost and sewage sludge in the December 1997 proposed national organic program. https://www.OMRI.org/USDA.html.

[44] Ogden ID, Hepburn NF, MacRae M, Strachan NJC, Fenlon DR, Rusbridge SM, et al. Long-term survival of *Escherichia coli* O157 on pasture following an outbreak associated with sheep at a scout camp. Letters in **Applied Microbiology**. 2002 Feb;34(2):100–4.

[45] Ishii S, Ksoll WB, Hicks RE, Sadowsky MJ. Presence and Growth of Naturalized Escherichia coli in Temperate Soils from Lake Superior Watersheds. **Applied and Environmental Microbiology**. 2006 Jan 1;72(1):612–21.

[46] Feachem GG, Bradley DJ, Garelick H, Mara DD. Sanitation and disease: Health aspects of excreta and wastewater management. 1983. **Wiley**.

[47] Johannessen GS, Bengtsson GB, Heier BT, Bredholt S, Yngvild Wasteson, Liv Marit Rørvik. Potential Uptake of Escherichia coli O157:H7 from Organic Manure into Crisphead Lettuce. **Applied and environmental microbiology.** 2005 May 1;71(5):2221–5.

[48] Anbuselvi S, Harinee C, Kalaivani. Isolation of *Klebsiella* sp from Medical garbage Soil and its Effect in Growth of Chickpea Plant. **International Journal of ChemTech Research**. 2017;10(10):232–235.

[49] Brisse S, Grimont F, Grimont PA. The genus *Klebsiella*. In The prokaryotes, **Springer**. 2006:159–196.

[50] Podschun R, Pietsch S, Holler C, Ullmann U. Incidence of *Klebsiella* Species in Surface Waters and Their Expression of Virulence Factors. **Applied and Environmental Microbiology**. 2001 Jul 1;67(7):3325–7.

[51] Farmer JJ, Davis BR, Hickman-Brenner FW, McWhorter A, Huntley-Carter GP, Asbury MA, et al. Biochemical identification of new species and biogroups of Enterobacteriaceae isolated from clinical specimens. **Journal of Clinical Microbiology**. 1985;21(1):46–76.

[52] Prashanthi R, G.K. S, S. K, L. M. Isolation, characterization, and molecular identification of soil bacteria showing antibacterial activity against human pathogenic bacteria. **Journal of Genetic Engineering and Biotechnology**. 2021 Aug 18;19(1).

[53] Wójcik-Fatla A, Ewelina Farian, Kowalczyk K, Sroka J, Skowron P, Grzegorz Siebielec, et al. Enterobacteriaceae in Sewage Sludge and Digestate Intended for Soil Fertilization. **Pathogens**. 2024 Nov 30;13(12):1056–6.

[54] Nakano S, Kobayashi T, Funabiki K, Matsumura A, Nagao Y, Yamada T. Development of a PCR Assay for Detection of Enterobacteriaceae in **Foods. Journal of Food Protection.** 2003 Oct 1;66(10):1798–804..

[55] Ramos J, Vasconcellos L, Costa L. Application and Limitations of 16S rRNA Gene Sequencing for Identifying WHO Priority Pathogenic Gram-Negative Bacilli. Infection and Drug Resistance. 2025 Dec 1;Volume 18:6353–75.

[56] Gupta A, Cooper VS, Zemke AC. Evaluation of V3–V4 and FL-16S rRNA amplicon sequencing approach for microbiota community analysis of tracheostomy aspirates. **mSphere**. 2025 Jul 22;10(8):e00388-25.

[57] Brisse S, van Himbergen T, Kusters K, Verhoef J. Development of a rapid identification method for Klebsiella pneumoniae phylogenetic groups and analysis of 420 clinical isolates. **Clinical Microbiology and Infection.** 2004 Oct;10(10):942–5.

[58] Fatima S, Liaqat F, Akbar A, Sahfee M, Samad A, Anwar M, Iqbal S, Khan, S. A., Sadia, H., Makai, W, Khan A. Virulent and multidrug-resistant *Klebsiella pneumoniae* from clinical samples in Balochistan. **International Wound Journal**. 2021;18(4):510–518. https://doi.org/10.1111/iwj.13550.

[59] Hirose K, Itoh K, Nakajima H, Kurazono T, Yamaguchi M, Moriya K, Ezaki T, Kawamura Y, Tamura K, Watanabe H. Selective amplification of tyv (rfbE), prt (rfbS), viaB, and fliC genes by multiplex PCR for identification of *Salmonella enterica* serovars *typhi* and *paratyphi* A. **Journal of Clinical Microbiology**. 2002; 40(2): 633–636. https://doi.org/10.1128/JCM.40.02.633-636.2002.

[60] Ding C, He J. Effect of antibiotics in the environment on microbial populations. **Applied Microbiology and Biotechnology**. 2010; 87:925–941.

جامعة حمص

كلية العلوم

قسم الرياضيات

حل المعادلات التفاضلية الخطية الضبابية ذات الأمثال الثابتة من المرتبة الثانية والتي لا تحتوي على المشتق من الرتبة الأولى باستخدام تحويل لابلاس الضبابي

اعدادالطالب:

ثائر الشربعي

اشراف الدكتور:
د.أحمد الجاعور

المشرف المشارك:
د.صفاء شيخ السوق

ملخّص البحث:

عرضنا في هذا البحث بعض المفاهيم الأساسية في المنطق الضبابي وتم تسليط الضوء على العمليات الجبرية للأعداد الضبابية التي تم استخدامها في هذا البحث.

بالإضافة إلى تعريف تحويل لابلاس الضبابي وخصائصه ومن ثم آلية استخدام تحويل لابلاس الضبابي في إيجاد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية الخطية الضبابية ذات الأمثال الثابتة من المرتبة الثانية والتي لا تحتوي على المشتق من الرتبة الأولى.

الكلمات المفتاحية: المنطق الضبابي، المعادلة التفاضلية الضبابية ذات الأمثال الثابتة، تحويل لابلاس الضبابي.

Solution of Solving Second-Order Linear Fuzzy Differential Equations with Constant Coefficients (Without First-Order Derivative) Using Fuzzy Laplace Transform

University of Homs - Faculty of Science – Mathematics Department

Abstract

In this research, we will present some fundamental concepts in fuzzy logic and highlight the algebraic operations of fuzzy numbers that have been utilized in this study.
Additionally, the fuzzy Laplace transform and its properties will be defined, followed by the methodology of using the fuzzy Laplace transform to find the particular solution of second-order fuzzy linear differential equations with constant coefficients without first

Derivative .

Key Words: Fuzzy logic, Fuzzy differential equation with constant coefficients, fuzzy Laplace transform.

1. المقدَمة :

تُعد المعادلات التفاضلية الضبابية موضوعًا مهمًا في العديد من المجالات. على سبيل المثال، نماذج السكان، والهندسة المدنية، ونموذج ديناميكيات السكان، ونموذج النمو.

يُعدّ تحويل لابلاس الضبابي مفيدًا لحل المعادلات التفاضلية الضبابية. في البداية، قدّم اللهفيرانلو وأحمدي تحويل لابلاس الضبابي [1]. ولحل المشكلات في العديد من مجالات المعادلات التفاضلية الضبابية، استُخدم تحويل لابلاس الضبابي في العديد من الأوراق البحثية

في هذه الورقة البحثية، قمنا بدراسة حلول مسألة ضبابية ذات قيم ابتدائية لعدد ضبابي مثلثي باستخدام تحويل لابلاس الضبابي. وتم استخدام التفاضل المعمم والحساب الضبابي. تهدف هذه الدراسة إلى دراسة الحلول باستخدام تحويل لابلاس الضبابي للمسألة المدروسة.

2. هدف البحث:

أثارت المعادلات التفاضلية الضبابية انتباه العديد من العلماء والباحثين في السنوات الأخيرة لمدى أهميتها في المجالات الاقتصادية والفيزيائية والهندسية، وكان من الصعب حلها ببعض الطرق التحليلية لذلك يهدف البحث الى تسليط الضوء على التحويلات التكاملية في المنطق الضبابي والتي تقوم بالحل الأسرع والأسهل للمعادلات التفاضلية الضبابية مقارنة بالطرق التحليلية.

3. مواد البحث:

(1-3) المفاهيم الأساسية:

تعريف (1-1-3): [1]

لتكن $\mathbf{X}$ مجموعة غير خالية، ولنفرض أنّ $\mathbf{A}$ مجموعة جزيئة من $\mathbf{X}$ ، ولنعرف الدالة $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}$ بالشكل:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}:\mathbf{X}\longrightarrow[0,1]$$
$$\mathbf{x}\longrightarrow\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$$

عندئذٍ ندعو المجموعة $\mathbf{A}$ المزودة بالدالة $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}$ مجموعة جزئية ضبابية من $\mathbf{X}$، حيث تدعى الدالة $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}$ بدالة العضوية، ولأجل كل $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ تدعى القيمة $\mu_A(x)$بدرجة انتماء العنصر $\mathbf{x}$ إلى المجموعة $\mathbf{A}$وكلما كانت درجة العضوية أكبر كان العنصر أكثر انتماء للمجموعة A .

ملاحظة:

•يقال عن عنصر $x\in X$ إنه يتمتع بعضوية كاملة في المجموعة A إذا كانت $\mu_A(x)=1$

•يقال عن عنصر $x \in X$ إنه ليس عنصر في المجموعة A إذا كانت $\mu_A(x) = 0$

مثال: لتكن $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

إن المجموعة المعرفة بالشكل:

$A = \{(1,0),(2,0.25),(3,0.5),(4,0.7),(5,0.8),(6,0.9),(7,1)\}$ تسمى مجموعة ضبابية في X. حيث أن المسقط الثاني هو درجة انتماء العنصر.

تعريف(2-1-3): [1]

لتكن Xمجموعة غير خالية ولنفرض أن Aمجموعة جزئية ضبابية من Xنقول عن المجموعة الجزئية الضبابية A إنها مستمرة إذا كانت دالة العضوية μ_Aمستمرة

مثال:

لتكن A مجموعة جزئية ضبابية من $\mathbb{R}$معرف عليها دالة العضوية $\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0.1x & ; \ 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0.1(10-x) & ; \ 5 < x \leqslant 10 \\ 0 & ; \ x \notin [0,10] \end{cases}$$

تعريف(3-1-3): [1]

لتكن X مجموعة غير خالية، ولنفرض أن A مجموعة جزئية ضبابية من Xنقول عن المجموعة الجزئية الضبابية Aإنها متقطعة إذا كانت دالة العضوية μ_Aمتقطعة.

مثال:

لتكن لدينا $X = \{a, b, c\}$ ولنفرض أن Aمجموعة جزئية ضبابية من X معرف عليها دالة العضوية μ_A بحيث أن:

$$\mu_A(a) = 0,3 \ , \ \mu_A(b) = 0,5, \ \mu_A(c) = 0,3$$

عندئذٍ تكون المجموعة $A = \{(a,0.3),(b,0.5),(c,0.3)\}$متقطعة.

تعريف (4-1-3) : [1]

لتكن $\mathbf{X}$ مجموعة غير خالية، ولنفرض أنّ $\mathbf{A}$ مجموعة جزيئة ضبابية من $\mathbf{X}$، يعرف دعامة المجموعة الجزئية الضبابية $\mathbf{A}$ والذي يرمز له بالرمز $\mathbf{supp(A)}$بانه المجموعة:

$$\mathbf{supp(A)} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X}\ , \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}} > 0\}$$

تعريف(5-1-3): [2]

الطبولوجيا الضبابية T هي عائلة من المجموعات الضبابية في X والتي تحقق الشروط التالية:

1) $\Phi\ ,\ X\ \in\ T$

2) إذا كان $A,B\ \in T$ عندئذٍ $A\cap B\in T$

3) إذا كان $A_i\in T\ ;\ i\in I$ عندئذٍ $\cup A_i\in T$

يسمى T طبولوجيا ضبابية على X ويسمى الزوج (X,T) فضاء طبولوجيا ضبابي.

تعريف (6-1-3): [3]

ليكن $\mathbf{X}$ فضاءً طبولوجياً، ولنفرض أن $\mathbf{A}$ مجموعة جزئية ضبابية من $\mathbf{X}$ ، تعرف مجموعة القطع من المستوي $0\leqslant \mathbf{r}\leqslant 1$ للمجموعة الجزئية الضبابية $\mathbf{A}$ والتي يرمز لها بالرمز $\mathbf{A(r)}$ بأنها المجموعة:

$$A(r) = \begin{cases} x \in X\,;\mu_A(x) \geq r & ;\ r > 0 \\ \mathrm{cl(supp(A))} & ;\ r = 0 \end{cases}$$

حيث $\mathbf{cl(supp(A))}$ هي لُصاقة المجموعة الجزئية الضبابية $\mathbf{A}$

تعريف (7-1-3): [3]

العدد الضبابي هو تطبيق $u{:}R \longrightarrow [0\,,1]$

يحقق الخواص التالية:

(1) u علوي شبه مستمر

(2) u محدب ضبابي، أي

$$u(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq \min\{u(x),u(y)\} \quad ; \quad x,y\in\mathbb{R},\lambda\in[0,1]$$

(3) u طبيعي $\exists x_0\in\mathbb{R}\ ,\ u(x_0)=1$

(4) u لصاقة المجموعة $cl(suppu)$ حيث u هو حامل التابع $suppu=\{x\in R,u(x)>0\}$

لتكن E مجموعة كل الأعداد الضبابية على R و α هي جميع المستويات للعدد الضبابي u ويرمز عادة لمستويات العدد الضبابي u بالرمز $[u]^{\alpha}$ بالشكل:

$$[u]^{\alpha}=\left\{\begin{vmatrix}\{x\in R\ ,\ u(x)\geqslant\alpha\ ;\ 0<\alpha\leqslant 1 & \}\\ cl(suppu) \quad ; \quad \alpha=0 & \end{vmatrix}\right\}$$

ويرمز لها بـ $\left[\underline{u}(\alpha),\ \overline{u}(\alpha)\right]$ إن مجموعة المستويات α للعدد الضبابي هي فترة مغلقة ومحدودة

حيث أن كل y يمكن اعتباره عدداً ضبابياً بالشكل:

$$y(t)=\left\{\begin{matrix}1\ ,\ t=y\\ 0\ ,\ t\neq y\end{matrix}\right\}$$

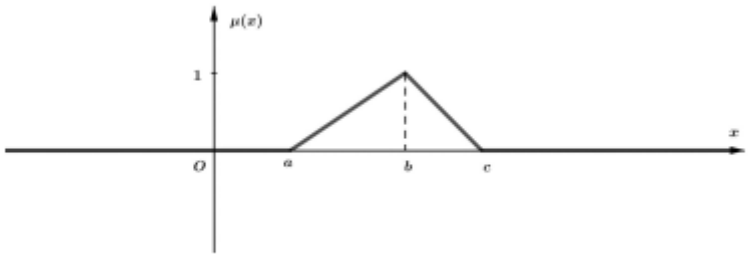
ملاحظة:

إذا كان $\mathbf{A}$ عدداً حقيقياً ضبابياً فإن $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ لها الشكل $[\mathbf{a}_1(\mathbf{r}),\mathbf{a}_2(\mathbf{r})]$ ، ونرمز لمجموعة جميع الاعداد الضبابية المعرفة على $\mathbf{R}$ بالرمز $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}$

تجدر الإشارة إلى أنه يوجد نوعان أساسيان من الأعداد الحقيقية الضبابية وهما الأعداد الضبابية المثلثية والأعداد الضبابية الرباعية وسنقتصر في دراستنا على الأعداد الضبابية المثلية.

تعريف (8-1-3): [1]

ليكن $\mathbf{A}$ عددا حقيقياً ضبابياً عندئذٍ نقول عن العدد الحقيقي الضبابي $\mathbf{A}$ إنه مثلثي إذا كان التمثيل البياني لدالة العضوية $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}$ له من الشكل



الشكل 1: التمثيل البياني لدالة العضوية للعدد الضبابي المثلثي

ونلاحظ أنَ دالة العضوية للعدد الضبابي المثلثي تعطى بالشكل:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{if } a < x \le b \\ \dfrac{x-c}{b-c} & \text{if } b < x \le c \\ 0 & \text{if } x \ge c \end{cases}$$

$\mathbf{A} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ نعبر عن العدد الضبابي المثلثي بالشكل $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}(\mathbf{b}) = 1$، $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) = 0$، $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}(\mathbf{C}) = 0$ كما أنَ $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b} \leqslant \mathbf{c}$ حيث إنَ

بالشكل: $\mathbf{A} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ للعدد الضبابي المثلثي $\mathbf{r}$ وتعطى صيغة مجموعة القطع من المستوي

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = [\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})\mathbf{r}, \mathbf{c} + (\mathbf{b} - \mathbf{c})\mathbf{r}] \qquad (1.1)$$

العميات الجبرية الضبابية على الأعداد الحقيقية الضبابية.

نعرض في هذه الفقرة أهم العمليات الجبرية الضبابية على الأعداد الحقيقية الضبابية، وتجدر الإشارة إلى أنّ العمليات الجبرية الضبابية على الأعداد الحقيقة الضبابية تعرف باستخدام دوال العضوية للأعداد الحقيقية الضبابية وكذلك باستخدام مجموعات القطع.

تعريف (9-1-3): [1]

ليكن $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{F}_{\mathbf{R}}$ ولنفرض أنّ $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}$ عندئذٍ فإن:

إن مجموع العددين الحقيقين الضبابين $\mathbf{A},\mathbf{B}$ هو عدد حقيقي ضبابي $\mathbf{A}\oplus\mathbf{B}$ تعطى دالة العضوية له $\boldsymbol{\mu}_{(\mathbf{A}\oplus\mathbf{B})}$ وفق قاعدة الربط:

$$\boldsymbol{\mu}_{(\mathbf{A}\oplus\mathbf{B})}(\mathbf{Z})=\sup_{\boldsymbol{\phi}(\mathbf{z})}\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$$

حيث إنّ $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{z})=\{(\mathbf{x},\mathbf{y});\quad \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{z}\}$

إنّ ضرب العدد الحقيقي الضبابي $\mathbf{A}$ بالقيمة السلمية $\boldsymbol{\lambda}$ هو عدد حقيقي ضبابي $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{A}$ تعطى دالة العضوية له $\boldsymbol{\mu}_{\lambda\mathbf{A}}$وفق قاعدة الربط

$$\mu_{\lambda A}(z)=\begin{cases}\sup\limits_{\{x:\lambda x=z\}}\{\mu_A(x)\} & \text{if } \lambda\neq 0\\ \chi_{\{0\}}(z) & \text{if } \lambda=0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\mu_A(\lambda^{-1}z) & \text{if } \lambda\neq 0\\ \chi_{\{0\}}(z) & \text{if } \lambda=0\end{cases}$$

حيث أنّ $\boldsymbol{\chi}_{\{0\}}$ هي الدالة المميزة للمجموعة $\{0\}$

إن فرق العددين الحقيقين الضبابين $\mathbf{A},\mathbf{B}$هو عدد حقيقي ضبابي $\mathbf{A}\ominus\mathbf{B}$ تعطى دالة العضوية له $\boldsymbol{\mu}_{(\mathbf{A}\ominus\mathbf{B})}$ وفق قاعدة الربط

$$\mu_{(A\ominus B)}(z)=\sup_{\phi(z)}\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}$$

حيث إنّ $\phi(\mathbf{z}) = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;\; ; \; \mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{z}\}$

إنّ جداء العددين الحقيقين الضبابين $\mathbf{A},\mathbf{B}$ هو عدد حقيقي ضبابي $\mathbf{A}\odot\mathbf{B}$ تعطى دالة العضوية له $\boldsymbol{\mu}_{(\mathbf{A}\odot\mathbf{B})}$وفق قاعدة الربط:

$$\mu_{(A\odot B)}(z) = \sup_{\phi(z)} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

حيث أنّ $\phi(\mathbf{z}) = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;\; ; \; \mathbf{x}.\mathbf{y}=\mathbf{z}\}$

إنّ ناتج قسمة العدد الحقيقي الضبابي $\mathbf{A}$ على العدد الحقيقي الضبابي $\mathbf{B}$هو عدد حقيقي ضبابي $\mathbf{A}/\mathbf{B}$تعطى دالة العضوية له $\boldsymbol{\mu}_{(\mathbf{A}/\mathbf{B})}$ وفق قاعدة الربط:

$$\mu_{(A/B)}(z) = \sup_{\phi(z)} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

حيث أنّ $\left\{ \mathbf{z} = \mathbf{x}/\mathbf{y} \;\; ; \;\; (\mathbf{x},\mathbf{y}) \right\}$ وإنّ $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{z}) = \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;\; ; \; \mathbf{x}/\mathbf{y} = \mathbf{z}\right\}$ $\mathbf{supp}(\mathbf{B}) \neq 0$

مبرهنة (1-1-3): [3]

ليكن $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{F}_{\mathbf{R}}$ ولنفرض أنّ $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ ولنفرض أنّ $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = [\mathbf{a}_1(\mathbf{r}), \mathbf{a}_2(\mathbf{r})]$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = [\mathbf{b}_1(\mathbf{r}), \mathbf{b}_2(\mathbf{r})]$ هما مجموعة القطع من المستوي لكل منهما على الترتيب عندئذٍ فإنّ:

$$(A \oplus B)(r) = A(r) \oplus B(r) = [a_1(r) + b_1(r), a_2(r) + b_2(r)]$$
$$(A \ominus B)(r) = A(r) \ominus B(r) = [a_1(r) - b_2(r), a_2(r) - b_1(r)]$$
$$(\lambda \odot A)(r) = \lambda \odot (A(r)) = \begin{cases} [\lambda a_1(r), \lambda a_2(r)] & \text{if } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2(r), \lambda a_1(r)] & \text{if } \lambda < 0 \end{cases}$$
$$(A \odot B)(r) = A(r) \odot B(r) = [minP(r), maxP(r)]$$

حيثُ $P(r) = \{a_1(r)b_1(r), a_1(r)b_2(r), a_2(r)b_1(r), a_2(r)b_2(r)\}$

$$(A/B)(r) = [minD(r), maxD(r)]; \qquad 0 \notin \text{supp}(B)$$

$$D(r) = \left\{\frac{a_1(r)}{b_1(r)}, \frac{a_2(r)}{b_1(r)}, \frac{a_1(r)}{b_2(r)}, \frac{a_2(r)}{b_2(r)}, \right\} .$$

مثال:

لنفرض أنّ $\mathbf{A} = (1,2,3)$, $\mathbf{B}(3,4,5)$عددان حقيقيان ضبابين مثلثين عندئذٍ حسب الصيغة (1.1) فإنّ

$$A(r) = [1 + r, 3 - r], B(r) = [3 + r, 5 - r]$$

وبالتالي حسب المبرهنة السابقة نجد أن

$$(A \oplus B)(r) = A(r) \oplus B(r) = [4 + 2r, 8 - 2r]$$

وبالتالي فإنّ $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = (4, 6, 8)$

$$(A \ominus B)(r) = A(r) \ominus B(r) = [-4 + 2r, -2r]$$

وبالتالي فإنّ $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) = (-4, -2, 0)$

$$(4 \odot A)(r) = 4 \odot (A(r)) = [4 + 4r, 12 - 4r]$$

وبالتالي فإنّ $(4\mathbf{A}) = (4, 8, 12)$

$$\begin{aligned}(A \odot B)(r) &= A(r) \odot B(r) = [(1 + r)(3 + r), (3 - r)(5 - r)] \\ (A/B)(r) &= \frac{A(r)}{B(r)} = [(1 + r)/(5 - r), (3 - r)/(3 + r)]\end{aligned}$$

نلاحظ أنّ $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$, $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ ليسا عددين حقيقين ضبابيين مثلثين، وذلك لأن مستوى القطع لهما لا يملك الصيغة (1.1).

مبرهنة (2-1-3): [3]

ليكن $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{F}_{\mathbf{R}}$ ولنفرض أنّ $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ و $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = [\mathbf{a}_1(\mathbf{r}), \mathbf{a}_2(\mathbf{r})]$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = [\mathbf{b}_1(\mathbf{r}), \mathbf{b}_2(\mathbf{r})]$ هما مجموعة القطع من المستوي لكل منهما على الترتيب، عندئذٍ فإنّ:

$$(A \oplus B) \oplus B \neq A \;\&\; A \oplus A = A \oplus (-1).A \neq \{0\}$$

تعريف (10-1-3):[4]

لتكن $f: (a, b) \to E$ دالة ذات قيمة ضبابية حيث $x_0 \in (a, b)$ نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق ضبابياً عند $\mathbf{x}_0$ إذا كان هناك $f'(x_0) \in E$ أي:

(a) $\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)\ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0)\ominus f(x_0-h)}{h}$
$= f'(x_0)$

(b) $\lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)\ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0)\ominus f(x_0-h)}{h}$
$= f'(x_0)$

مبرهنة (1-1-3): [4]

لتكن $f:(a,b)\to E$ دالة ذات قيمة ضبابية ولنرمز $\mathbf{f(t)} = \left[\underline{\mathbf{f}}\,(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha}), \overline{\mathbf{f}}\,(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})\right]$ حيث $0 \leqslant \boldsymbol{\alpha} \leqslant 1$

لناقش الحالات الاتية

1- إذا كانت f قابلة للاشتقاق كما في الحالة (a) للتعريف $(3-1-10)$ عندئذٍ تكون $\underline{f}\,(t,\alpha)$, $\overline{f}\,(t,\alpha)$ قابلة للاشتقاق ويكون

$$f'(t) = \left[\underline{f}\,'(t,\alpha),\ \overline{f}\,'(t,\alpha)\right]$$

2- إذا كانت f قابلة للاشتقاق كما في الحالة (b) للتعريف $(3-1-10)$ عندئذٍ تكون $\overline{f}\,(t,\alpha)$, $\underline{f}\,(t,\alpha)$ قابلة للاشتقاق ويكون

$$f'(t) = \left[\overline{f}\,'(t,\alpha),\ \underline{f}\,'(t,\alpha)\right]$$

مبرهنة (2-1-3): [4]

لتكن $f:(a,b)\to E$ دالة ذات قيمة ضبابية ولنرمز $\mathbf{f(t)} = \left[\underline{\mathbf{f}}\,(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha}), \overline{\mathbf{f}}\,(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})\right]$ حيث

$0 \leqslant \boldsymbol{\alpha} \leqslant 1$ لناقش الحالات الاتية:

1-إذا كانت $\mathbf{f}$, $\acute{\mathbf{f}}$ قابلة لاشتقاق كما في الحالة $(\mathbf{a})$أو إذا كانت $\mathbf{f}$, $\acute{\mathbf{f}}$ قابلة لاشتقاق كما في الحالة $(\mathbf{b})$ للتعريف **(3-1-10)** عندئذٍ يكون $\underline{\acute{\mathbf{f}}}(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})$ $\overline{\acute{\mathbf{f}}}(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})$ قابلة لاشتقاق ويكون:

$$\mathbf{f}''(\mathbf{t}) = \left[\underline{\mathbf{f}}''(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha}), \overline{\mathbf{f}}''(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})\right]$$

2- إذا كان $\mathbf{f}$ قابلة لاشتقاق كما في الحالة $(\mathbf{a})$ والدالة $\mathbf{f}'$ كما في الحالة $(\mathbf{b})$ أو $\mathbf{f}$ قابلة لاشتقاق كما في الحالة $(\mathbf{b})$ أو $\mathbf{f}'$ قابلة لاشتقاق كما في الحالة $(\mathbf{a})$ للتعريف **(3-1-10)** عندئذٍ يكون $\underline{\acute{\mathbf{f}}}(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})$ $\overline{\acute{\mathbf{f}}}(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})$ قابلة لاشتقاق ويكون:

$$\mathbf{f}''(\mathbf{t}) = \left[\overline{\mathbf{f}}''(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha}), \underline{\mathbf{f}}''(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})\right]$$

تعريف (3-1-11): [3]

لتكن $u \in \mathbb{R}_F,\ [u]^{\alpha} = \left[\underline{u}_{\alpha}, \overline{u}_{\alpha}\right] = \{x \in R\ , u(x) \geqslant \alpha\}\ ;\ 0 < \alpha \leqslant 1$

$$[u]^0 = cl\{suppu\} = cl\{x \in R,\ , u(x) > 0\}$$

$\underline{u}_{\alpha}$ $(0,1]$ مستمرة من اليسار متزايدة على

$\overline{u}_{\alpha}$ $(0,1]$ مستمرة من اليسار متناقصة على

حيث $\underline{u}_{\alpha}$, $\overline{u}_{\alpha}$ مستمرة من اليمين عندما $\alpha = 0$

$$\underline{u}_{\alpha} \leqslant \overline{u}_{\alpha}\ ,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

(3-2) تحويل لابلاس الضبابي

سنقوم في هذا البحث بدراسة تعاريف اساسية لتحويل لابلاس الضبابي والإلتفاف الضبابي ثم نقوم بحل معادلات تفاضلية خطية ضبابية ذات أمثال ثابتة من المرتبة الثانية والتي لا تحتوي على المشتق من الرتبة الأولى.

تعريف (1-2-3): [5]

لتكن f دالة ذات قيمة ضبابية إذا كانت $\lim_{t\to t_0^-} f(t)$, $\lim_{t\to t_0^+} f(t)$ موجودة، و $f(t_0^+) \neq f(t_0^-)$ عندئذٍ f لديها قفزة متقطعة عن t_0

تعريف (2-2-3):[5]

نقول عن الدالة fإنها ذات قيمة ضبابية مستمرة على $]0,\infty[$ إذا كان:

$\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$ موجودة

تكون منقطعة عندها $t_1, t_2, ..., t_n$ عدا عدد محدد من النقاط $[0,b]$مستمرة على كل المجال

تعريف (3-2-3)[5]:

لتكن f دالة ذات قيمة ضبابية و M عدداً حقيقياً نقول إنها محدودة إذا كان

$$|f(t)| \leqslant M \; ; \; t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1} \; , \; i = 1, ..., n$$

نظرية (1-2-3): [4]

لتكن f دالة ضبابية ذات قيمية حقيقية على المجال $[\mathbf{a},\infty)$ ولها التمثيل $\left[\underline{\mathbf{f}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha}), \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})\right]$ لكل ثابت $\mathbf{r} \in [0,1]$ ولنفرض أن $\underline{\mathbf{f}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})$, $\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})$ قابلة للمكاملة حسب ريمان على المجال $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ لكل $\mathbf{b} \geqslant \mathbf{a}$ ولنفرض وجود دالتين موجبتين $\underline{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\alpha})$, $\overline{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\alpha})$ بحيث

$$\int_a^b |\underline{f}(x,\alpha)| dx \leq \underline{M}(\alpha) \text{ و } \int_a^b |\bar{f}(x,\alpha)| dx \leq \bar{M}(\alpha) \quad ; \quad \mathbf{b} \geqslant \mathbf{a}$$

عندئذٍ تكون الدالة $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ قابلة للمكاملة حسب تكامل ريمان الضبابي على المجال $[\mathbf{a},\infty)$ بالشكل :

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \left(\int_a^{\infty} \underline{f}(x,\alpha)dx, \int_a^{\infty} \bar{f}(x,\alpha)dx\right)$$

ملاحظة: لتكن $\mathbf{f(x)}$ و $\mathbf{g(x)}$ دالتين ضبابيتين ذات قيمة حقيقية قابلتان للتكامل وفق ريمان على المجال $\mathbf{I=[a,\infty)}$ عندئذٍ يكون:

$$\int_I [f(x) \oplus g(x)]dx = \int_I f(x)dx \oplus \int_I g(x)dx$$

تعريف (4-2-3):[5]

لتكن f دالة ضبابية وليكن لدينا الثوابت $p, M > 0$

إذا كان $|f(t)| \leqslant Me^{pt}.\overline{1}\ ,\ t \geqslant t_0\ , t_0 \geqslant 0$

عندئذٍ نقول إن f لديها ترتيب p أسي.

تعريف (5-2-3): [4]

معامل حقيقي عندئذٍ تحويل لابلاس الضبابي يعرف بالشكل: s دالة ضبابية و $\mathbf{f(t)}$لتكن لدينا

$$F(s) = l\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \odot f(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} \odot f(t)dt$$

حيث

$$F(s,\alpha) = l\{f(t,\alpha)\} = [l\{\underline{f}(t,\alpha)\}, l\{\bar{f}(t,\alpha)\}]$$

أي

$$l\{\underline{f}(t,\alpha)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \odot \underline{f}(t,\alpha)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} \odot \underline{f}(t,\alpha)dt$$
$$,0 \leq \alpha \leq 1$$

$$l\{\bar{f}(t,\alpha)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \odot \bar{f}(t,\alpha)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} \odot \bar{f}(t,\alpha)dt$$
$$,0 \leq \alpha \leq 1$$

تعريف (1-2-6): [6]

إذا كان تحويل لابلاس الضبابي للدالة $f(t)$ يعطى بالعلاقة

$$F(s) = l\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \odot f(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-st} \odot f(t)dt$$

حيث

$$f(t) = \left[\overline{f}(t,\alpha), \underline{f}(t,\alpha) \right] \quad ; \ r \in [0,1]$$

عندئذٍ تحويل لابلاس العكسي

$$l^{-1}\{F(s)\} = f(t) \ , \ t \geqslant 0$$

مبرهنة (2-2-3):[5]

لتكن f, g دالتين ذات قيمة ضبابية مستمرتان ولتكن $c_1 \ , c_2$ ثوابت عندئذٍ:

$$l(c_1 \odot f(t) \oplus c_2 \odot g(t)) = (c_1 \odot l(f(t))) \oplus (c_2 \odot l(g(t))).$$

البرهان:

$$\begin{aligned} l[(c_1 \odot f(t)) \oplus (c_2 \odot g(t))] &= \int_0^{\infty} \left((c_1 \odot f(t)) \oplus (c_2 \odot g(t))\right) \odot e^{-st}dt \\ &= \int_0^{\infty} (c_1 \odot f(t)) \odot e^{-st}dt \oplus \int_0^{\infty} (c_2 \odot g(t)) \odot e^{-st}dt \\ &= c_1 \odot \int_0^{\infty} f(t) \odot e^{-st}dt \oplus c_2 \odot \int_0^{\infty} g(t) \odot e^{-st}dt \\ &= (c_1 \odot l[f(t)]) \oplus (c_2 \odot l[g(t)]) \end{aligned}$$

توطئة:

إذا: $\lambda \in \mathbb{R}$ ،و $[0,\infty[$ دالة ذات قيمة ضبابية على $f(t)$لتكن

$$l[\lambda f(t)] = \lambda l[f(t)]$$

نظرية (2-2-3):[5]

لتكن $f(t)$ دالة مستمرة وذات قيمة ضبابية عندئذٍ:

$$l[e^{at} \odot f(t)] = F(s-a)$$

نظرية (4-2-3):[5]

إذا كانت الدالة fذات القيمة الضبابية ومستمرة على المجال $[0,\infty[$ ولديها ترتيب p أسي

$$F(s)=l[f(t)]\longrightarrow 0\ ,\ s\longrightarrow\infty$$

تعريف (7-2-3): [5]

إنها دالة ضبابية مثلثية إذا كتبت بالشكل: fنقول عن الدالة

$$\int_a^b f(t)dt=\left(\int_a^b f_1(t)dt,\int_a^b f_2(t)dt,\int_a^b f_3(t)dt\right)$$

ملاحظة:

بالاعتماد على التعريف $f(t)=\{f_1(t),f_2(t),f_3(t)\}$لتكن لدينا الدالة ذات القيمة الضبابية المعرفة بالشكل **(6-2-3)** يعرف تحويل لابلاس الضبابي بالشكل:

$$l[f(t)]=(L[f_1(t)],L[f_2(t)],L[f_3(t)])$$

هو تحويل لابلاس الكلاسيكي. Lحيث

تعريف الالتفاف الضبابي (8-2-3): [7]

ليكن لدينا الدالتين $\mathbf{f}\ ,\mathbf{g}$ المعرفتين عندما $\mathbf{t}>0$

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)\odot g(t-\tau)d\tau,$$

لنفرض $\mathbf{u}=\mathbf{t}-\boldsymbol{\tau}$ عندئذٍ:

$$(\boldsymbol{f}*\boldsymbol{g})(\boldsymbol{t})=\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\tau})\odot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{u})\boldsymbol{du}=(\boldsymbol{g}*\boldsymbol{f})(\boldsymbol{t})$$

وأهم العلاقات التي يحققها الالتفاف الضبابي :

(i) $c(f*g)=cf*g=f*cg,\ c$ **ثابت**

(ii) $f*(g*h)=(f*g)*h$

إثبات (ii):

$$\begin{aligned}
&[f*(g*h)](t)\\
=&\int_0^t f(\tau)\odot(g*h)(t-\tau)d\tau\\
=&\int_0^t f(\tau)\odot\left(\int_0^{t-\tau} g(x)\odot h(t-\tau-x)dx\right)d\tau\\
=&\int_0^t\left(\int_0^{t-\tau} f(\tau)\odot g(u-\tau)\odot h(t-\tau)dx\right)d\tau\\
=&[(f*g)*h](t),
\end{aligned}$$

نظرية الالتفاف الضبابي (5-2-3): [7]

لتكن f,g دالتين ذات قيمة غامضة مستمرة على $[0,\infty)$ بمرتبة أسية p

$$l\{(f*g)(t)\}=l[f]\odot l[g]$$

الاثبات:

$$\begin{aligned}
&l\{(f(t)\}\odot l\{(g(t)\}\\
=&\left(\int_0^\infty e^{-s\tau}\odot f(\tau)d\tau\right)\odot\left(\int_0^\infty e^{-su}\odot g(u)du\right)\\
=&\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-s(\tau+u)}f(\tau)\odot g(u)du\right)d\tau,
\end{aligned}$$

نفرض $t=\tau+u$ حيث τ ثابت , $dt=du$ عندئذٍ

$$=\int_0^\infty\left(\int_\tau^\infty e^{-st}\odot f(\tau)\odot g(t-\tau)dt\right)d\tau.$$

وبالتالي : $t<\tau$ حيث $g(t-\tau)=\hat{0}$ فإن $t<0$ حيث $g(t)=\hat{0}$ ولنعرف

$$\begin{aligned}
&l\{(f(t)\}\odot l\{(g(t)\}\\
=&\int_0^\infty\left(\int_\tau^\infty e^{-st}\odot f(\tau)\odot g(t-\tau)dt\right)d\tau
\end{aligned}$$

تتقارب مطلقاً f,g إن تكاملات لابلاس الضبابية للدالتين

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left|e^{-st)} \odot f(\tau) \odot g(t-\tau)\right| d\tau$$

وبعكس ترتيب التكامل نحصل على:

$$\begin{aligned} & l\{(f(t)\} \odot l\{(g(t)\} \\ = & \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} \odot f(\tau) \odot g(t-\tau) d\tau dt \\ = & \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-st} \odot f(\tau) \odot g(t-\tau) d\tau \right) dt \\ - & \int_0^\infty e^{-st} \odot \left(\int_0^t f(\tau) \odot g(t-\tau) d\tau \right) dt \\ = & l\{(f*g)(t)\}. \end{aligned}$$

نظرية (7−2−3) [8]: لتكن f دالة ذات قيمة ضبابية مستمرة على المجال $[0,\infty)$ ذات ترتيب أسي α وأن f' دالة ذات قيمة ضبابية مستمرة جزئياً على المجال $[0,\infty)$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق كما في الحالة (a)عندئذٍ:

$$l(f'(t)) = sl(f(t)) \ominus f(0)$$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق كما في الحالة (b)عندئذٍ:

$$l(f'(t)) = (-f(0)) \ominus (-sl(f(t)))$$

إذا كانت f , f' قابلة للاشتقاق كما في الحالة (a)عندئذٍ:

$$l(f''(t)) = s^2 l(f(t)) \ominus sf(0) \ominus f'(0)$$

إذا كانت fقابلة للاشتقاق كما في الحالة (a) وكانت f' قابلة للاشتقاق كما في الحلة (b) عندئذٍ:

$$l(f''(t)) = -f'(0) \ominus (-s^2) l(f(t)) \ominus sf(0)$$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق كما في الحالة (b) وكانت f' قابلة للاشتقاق كما في الحالة (a) عندئذٍ:

$$l(f''(t)) = -sf(0) \ominus (-s^2) l(f(t)) \ominus f'(0)$$

إذا كانت f , f' قابلة للاشتقاق كما في الحالة (b)عندئذٍ:

$$l(f''(t)) = s^2 l(f(t)) \ominus sf(0) \ominus f'(0)$$

تطبيق على تحويل لابلاس الضبابي

حل نوع خاص من المعادلات التفاضلية الضبابية الخطية من المرتبة الثانية ذات الأمثال الثابتة والتي لا تحتوي على المشتق من الرتبة الأولى.

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$u''(t) \oplus u(t) = [A]^\alpha, t > 0$$
$$u(0) = [B]^\alpha, u'(0) = [C]^\alpha$$

عبارة عن أعداد مثلثية ضبابية تعرف A, B, C بأخذ تحويل لابلاس الضبابي للطرفين مع الخاصة الخطية حيث بالشكل:

$$[A]^\alpha = \left[\underline{A}_\alpha, \bar{A}_\alpha\right] = \left[\underline{a} + \left(\frac{\bar{a} - \underline{a}}{2}\right)\alpha, \bar{a} - \left(\frac{\bar{a} - \underline{a}}{2}\right)\alpha\right],$$
$$[B]^\alpha = \left[\underline{B_\alpha}, \bar{B}_\alpha\right] = \left[\underline{b} + \left(\frac{\bar{b} - \underline{b}}{2}\right)\alpha, \bar{b} - \left(\frac{\bar{b} - \underline{b}}{2}\right)\alpha\right],$$
$$[C]^\alpha = \left[\underline{C}_\alpha, \bar{C}_\alpha\right] = \left[\underline{c} + \left(\frac{\bar{c} - \underline{c}}{2}\right)\alpha, \bar{c} - \left(\frac{\bar{c} - \underline{c}}{2}\right)\alpha\right].$$

بأخذ تحويل لابلاس الضبابي للمعادلة أعلاه مع الخاصة الخطية والنظرية **(2-1-3) ولنناقش الحالات :**

الحالة الأولى: إذا كانت u , u' قابلة للاشتقاق كما في الحالة **(α):**

$$s^2 l(u_\alpha(t)) \ominus su_\alpha(0) \ominus u'_\alpha(0) + l(u_\alpha(t)) = l([A]^\alpha)$$

ومنه وبأخذ تحويل لابلاس الضبابي نحصل على:

$$s^2 l\left(\underline{u}_\alpha(t)\right) - s\underline{u}_\alpha(0) - \underline{u}'_\alpha(0) + l\left(\underline{u}_\alpha(t)\right) = l\left(\underline{A}_\alpha\right),$$
$$s^2 l(\bar{u}_\alpha(t)) - s\bar{u}_\alpha(0) - \bar{u}'_\alpha(0) + l(\bar{u}_\alpha(t)) = l(\bar{A}_\alpha).$$

وبالحل المشترك نحصل على

$$l\left(\underline{u}_\alpha(t)\right) = \frac{\underline{A}_\alpha}{s(s^2+1)} + \frac{s\underline{B}_\alpha}{s^2+1} + \frac{\underline{C}_\alpha}{s^2+1},$$
$$l(\bar{u}_\alpha(t)) = \frac{\bar{A}_\alpha}{s(s^2+1)} + \frac{s\bar{B}_\alpha}{s^2+1} + \frac{\bar{C}_\alpha}{s^2+1}.$$

وبأخذ تحويل لابلاس الضبابي العكسي نحصل على:

$$\underline{u}_\alpha(t) = \underline{A}_\alpha(1-\cos(t)) + \underline{B}_\alpha\cos(t) + \underline{C}_\alpha\sin(t),$$

$$\bar{u}_\alpha(t) = \bar{A}_\alpha(1-\cos(t)) + \bar{B}_\alpha\cos(t) + \bar{C}_\alpha\sin(t)$$

الحالة الثانية: إذا كانت u قابلة للاشتقاق كما في الحالة (a) وكانت u' قابلة للاشتقاق كما في الحالة (b):

$$-u'_\alpha(0) \ominus (-s^2)l(u_\alpha(t)) - su_\alpha(0) + l(u_\alpha(t)) = l([A]^\alpha)$$

ومنه:

$$-\bar{u}'_\alpha(0) - \left(-s^2 l(\bar{u}_\alpha(t))\right) - s\bar{u}_\alpha(0) + l\left(\underline{u}_\alpha(t)\right) = l\left(\underline{A}_\alpha\right),$$
$$-\underline{u}'_\alpha(0) - \left(-s^2 l\left(\underline{u}_\alpha(t)\right)\right) - s\underline{u}_\alpha(0) + l(\bar{u}_\alpha(t)) = l(\bar{A}_\alpha)$$

وبالحل المشترك نحصل على:

$$l\left(\underline{u}_\alpha(t)\right) = \frac{\underline{A}_\alpha}{s(1-s^4)} + \frac{\bar{C}_\alpha}{1-s^4} + \frac{s(\bar{B}_\alpha - \bar{A}_\alpha)}{1-s^4} - \frac{s^2\underline{C}_\alpha}{1-s^4} - \frac{s^3\underline{B}_\alpha}{1-s^4}$$

وبأخذ تحويل لابلاس الضبابي العكسي نحصل على:

$$\begin{aligned}\underline{u}_\alpha(t) = \quad & \underline{A}_\alpha\left(1-\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right) + \bar{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin(t)\right)\\ & +(\bar{B}_\alpha-\bar{A}_\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(t)\right) - \underline{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin(t)\right)\\ & -\underline{B}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right).\end{aligned}$$

بشكل مشابه

$$\begin{aligned}\bar{u}_\alpha(t) = \quad & \bar{A}_\alpha\left(1-\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right) + \underline{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin(t)\right)\\ & +(\underline{B}_\alpha-\underline{A}_\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(t)\right) - \bar{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin(t)\right)\\ & -\bar{B}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right)\end{aligned}$$

الحالة الثالثة: إذا كانت u قابلة للاشتقاق كما في الحالة (b) وكانت u' قابلة للاشتقاق كما في الحالة (a):

$$-su_\alpha(0) \ominus (-s^2)l\big(u_\alpha(t)\big) \ominus u'_\alpha(0) + l\big(u_\alpha(t)\big) = l(A]^\alpha)$$

ومنه:

$$-s\bar{u}_\alpha(0) - \big(-s^2 l(\bar{u}_\alpha(t))\big) - \bar{u}'_\alpha(0) + l\big(\underline{u}_\alpha(t)\big) = l\big(\underline{A}_\alpha\big),$$
$$-s\underline{u}_\alpha(0) - \Big(-s^2 l\big(\underline{u}_\alpha(t)\big)\Big) - \underline{u}_\alpha(0) + l(\bar{u}_\alpha(t)) = l(\bar{A}_\alpha),$$

وبالحل المشترك نحصل على:

$$l\big(\underline{u}_\alpha(t)\big) = \frac{\underline{A}_\alpha}{s(1-s^4)} + \frac{\underline{C}_\alpha}{1-s^4} + \frac{s(\bar{B}_\alpha - \bar{A}_\alpha)}{1-s^4} - \frac{s^2\bar{C}_\alpha}{1-s^4} - \frac{s^3\underline{B}_\alpha}{1-s^4}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي نحصل على:

$$\begin{aligned}\underline{u}_\alpha(t) = \; & A_\alpha\left(1 - \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t)\right) + \underline{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin(t)\right) \\ & + (\bar{B}_\alpha - \bar{A}_\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos(t)\right) - \bar{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin(t)\right) \\ & - \underline{B}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t)\right).\end{aligned}$$

وبشكل مشابه

$$\begin{aligned}\bar{u}_\alpha(t) = \; & \bar{A}_\alpha\left(1 - \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t)\right) + \bar{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin(t)\right) \\ & + \left(\underline{B}_\alpha - \underline{A}_\alpha\right)\left(-\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos(t)\right) - \underline{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin(t)\right) \\ & - \bar{B}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t)\right).\end{aligned}$$

الحالة الرابعة: إذا كانت $u\ ,\ u'$ قابلة للاشتقاق كما في الحالة (b):

$$s^2 l(u_\alpha(t)) \ominus su_\alpha(0) - u'_\alpha(0) + l(u_\alpha(t)) = l([A]^\alpha)$$

نحصل على معادلتين

$$s^2 l\big(\underline{u}_\alpha(t)\big) - s\underline{u}_\alpha(0) - \underline{u}'_\alpha(0) + l\big(\underline{u}_\alpha(t)\big) = l\big(\underline{A}_\alpha\big),$$
$$s^2 l(\bar{u}_\alpha(t)) - s\bar{u}_\alpha(0) - \bar{u}'_\alpha(0) + l(\bar{u}_\alpha(t)) = l(\bar{A}_\alpha),$$

منه

$$l(\underline{u}_\alpha(t))\frac{\underline{A}_\alpha}{s(s^2+1)}+\frac{s\underline{B}_\alpha}{s^2+1}+\frac{\bar{C}_\alpha}{s^2+1},$$
$$l(\bar{u}_\alpha(t))=\frac{\bar{A}_\alpha}{s(s^2+1)}+\frac{s\bar{B}_\alpha}{s^2+1}+\frac{\underline{C}_\alpha}{s^2+1}.$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي نحصل على

$$\underline{u}_\alpha(t)=\underline{A}_\alpha(1-\cos(t))+\underline{B}_\alpha\cos(t)+\bar{C}_\alpha\sin(t),$$
$$\bar{u}_\alpha(t)=\bar{A}_\alpha(1-\cos(t))+\bar{B}_\alpha\cos(t)+\underline{C}_\alpha\sin(t).$$

مثال:

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية الاتية

$$u''(t)\oplus u(t)=[0]^\alpha, y(0)=[1]^\alpha, y'(0)=[2]^\alpha$$

$$[0]^\alpha=[-1+\alpha,1-\alpha],[1]^\alpha=[\alpha,2-\alpha],[2]^\alpha=[1+\alpha,3-\alpha].$$

الحل:

الحالة الأولى:

$$\underline{u}_\alpha(t)=(-1+\alpha)(1-\cos(t))+\alpha\cos(t)+(1+\alpha)\sin(t),$$
$$\bar{u}_\alpha(t)=(1-\alpha)(1-\cos(t))+(2-\alpha)\cos(t)+(3-\alpha)\sin(t),$$
$$[u(t)]^\alpha=[u_\alpha(t),\bar{u}_\alpha(t)],$$

الحالة الثانية:

$$\underline{u}_\alpha(t) = (-1+\alpha)\left(1-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right)+(3-\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(t)\right)-(1+\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$-\alpha\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right)$$
$$\bar{u}_\alpha(t) = (1-\alpha)\left(1-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right)+(1+\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(t)\right)-(3-\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$-(2-\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right),$$
$$[u(t)]^\alpha = \left[\underline{u}_\alpha(t), \bar{u}_\alpha(t)\right].$$

الحالة الثالثة:

$$\underline{u}_\alpha(t) = (-1+\alpha)\left(1-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right)+(1+\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(t)\right)-(3-\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$-\alpha\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right),$$
$$\bar{u}_\alpha(t) = (1-\alpha)\left(1-\frac{1}{4}e^{2}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right)+(3-\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(t)\right)-(1+\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$-(2-\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right),$$
$$[u(t)]^\alpha = \left[\underline{u}_\alpha(t), \bar{u}_\alpha(t)\right],$$

الحالة الرابعة:

$$\underline{u}_\alpha(t) = (-1+\alpha)(1-\cos(t)) + \alpha\cos(t) + (3-\alpha)\sin(t),$$
$$\bar{u}_\alpha(t) = (1-\alpha)(1-\cos(t)) + (2-\alpha)\cos(t) + (1+\alpha)\sin(t),$$

المراجع:

[1] De Barros. L., Bassanezi. R., Lodwick. W., "A first course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics", (2017).

[2] Chang, C. L, "Fuzzy Topological Spaces.", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 24, no. 1, 1968.

[3] S. Salahshour • T. Allahviranloo, "Applications of fuzzy Laplace transforms", Soft Comput, (2013) .

[4] Manmohan Das, Dhanjit Talukdar, "Method For Solving Fuzzy Integro-Differential Equation By Using Fuzzy Laplace Transformation ", INTERNATIONAL JOURNAL OF SCIENTIFIC & TECHNOLOGY RESEARCH, (4) (2014).

[5] نصيرة بومناد،"حول حلول المعادلات التكاملية الضبابية"، جامعة قاصدي مرباح ورقلة، (2020).

[6] Allahviranloo T, Barkhordari Ahmadi M, "Fuzzy Laplace transforms", Soft Computing, (14) (2010).

[7] Abdulrahman A. Sharif, Maha M. Hamood, Amol D. Khandagale, "Usage of the Fuzzy Laplace Transform Method for Solving One-Dimensional Fuzzy Integral Equations", https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.en_US,(2)(2022).

[8]Hülya Gültekin Çitil , "Investigation of A Fuzzy Problem by the Fuzzy Laplace Transform", Applied Mathematics and Nonlinear Sciences, 4(2) (2019).

التوليد الضعيف في الزمر التبديلية منتهية التوليد

هيفاء صويص[1] د. إيمان الخوجة[2] د. عدنان الطيباني[3]

الملخص

يعد مفهومي التوليد الضعيف والاستقلال الخطي الضعيف في الفضاءات المتجهية من المفاهيم التي أعادت توصيف الفضاء المتجهي فوق حقل، ونتج عن هذين المفهومين مفهوم القاعدة الضعيفة والقاعدة الضعيفة المستقلة لفضاء متجهي جزئي والتي تتميز بكونها غير محتواه في الفضاء الجزئي الذي تولده بضعف، في هذه الورقة قمنا بنقل مفهوم التوليد الضعيف إلى الزمر التبديلية منتهية التوليد، وبينا أنَّ كل زمرة مولدة بضعف بمجموعة ما X هي زمرة جزئية من الزمرة $\langle X \rangle$ في الحالة العامة، فضلاً عن دراسة العلاقة بين كلٍ من الزمرة المولدة بضعف بالمجموعة X والمجموعة X، فضلاً عن تعريف مفهوم المجموعة S–المستقلة بضعف وذلك لدراسة المجموعات المولدة بضعف الصغرى للزمر التبديلية منتهية التوليد.

الكلمات المفتاحية. مجموعة مولدة بضعف، مجموعة مستقلة بضعف، مجموعة مستقلة خطياً بضعف، مجموعة S–مستقلة بضعف، الأساس الضعيف، الأساس الحر الضعيف.

[1] طالبة دراسات عليا في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة حمص.
[2] أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة حمص.
[3] مدرس في قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية – جامعة حمص.

weekly Generated in Finitely Generated Abelian Group

Haifaa Swies [1] Dr. Eaman Al-Khouja [2] Dr. Adnan Al-Taybani [3]

Abstract

In this paper, we introduced the concept of a weak generation of an Abelian group, and showed that every a weakly generated subgroup by a set X is indeed a generated subgroup by X, in addition to introducing the notions of a weakly independent sets and weakly linearly independent sets as a generalization of linear independent and independent set in Abelian group, respectively, in addition to, we defined the concept of a weakly $S-$ independent set to study minimal weak generating set for certain Abelian group, we proved that a minimal weakly generating set for an Abelian group is weak generating set for this group that does not contain a proper subset which weakly generates the group, while the convers does not necessarily true, several further results concerning minimal weak generating sets of Abelian group were also established.

Key Words: weekly generating set, weekly Independent set, weekly linearly Independent set, week Basis, week Free Basis, weakly $S-$ independent set, minimal weak generating sets.

[1] Graduate Student , Department of Mathematics Homs University
[2] Assistant Professor, Department of Mathematics Homs University.
[3] .Department of Basic Sciences, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering Homs University.

مقدمـــة.

تعد المفاهيم الرياضية الأساسية، مثل التوليد والاستقلال الخطي في الفضاءات المتجهية، حجر الأساس في بناء الجبر الخطي وتطبيقاته. ومع ذلك، فإن النماذج التقليدية لهذه المفاهيم تفترض خصائص معينة قد لا تنطبق في جميع السياقات الرياضية. من هنا برزت الحاجة إلى تطوير مفاهيم أكثر دقة، مثل مفهومي التوليد الضعيف والاستقلال الخطي الضعيف في الفضاءات المتجهية.

لقد أسهمت هذه المفاهيم الجديدة في إعادة توصيف الفضاء المتجهي فوق حقل ونتج عن هذين المفهومين مفهوم القاعدة الضعيفة والقاعدة الضعيفة المستقلة لفضاء متجهي جزئي والتي تتميز بكونها غير محتواه في الفضاء الجزئي الذي تولده بضعف، هذا التباين مع المفاهيم التقليدية يفتح أفاقاً جديدة لفهم الهياكل الجبرية.

قمنا في هذه المقالة بنقل وتطبيق مفهوم التوليد الضعيف إلى الزمر التبديلية منتهية التوليد. ونهدف من ذلك إلى استكشاف كيف تتغير هذه المفاهيم في سياق الزمر مقارنة مع الفضاءات المتجهية. حيث قمنا بدراسة العلاقة بين الزمرة الجزئية المولدة بضعف بمجموعة ما X والمجموعة X ، بالإضافة إلى تعريف مفهوم المجموعة الـ $S-$مستقلة بضعف ومفهوم الأساس الضعيف والأساس الحر الضعيف والمجموعة المولدة بضعف الصغرى لزمرة تبديلية حيث بينا أنَّ الأساسات الحرة الضعيفة لزمرة تبديلية حرة منتهية التوليد لها القدرة ذاتها، وأنَّ كل أساس حر ضعيف لزمرة تبديلية هو مجموعة مستقلة بضعف عظمى، وبينا أن المجموعة المولدة بضعف الصغرى لزمرة تبديلية هي مجموعة مولدة بضعف للزمرة ولا تحوي مجموعة جزئية فعلية مولدة بضعف لهذه الزمرة، فضلاً عن العديد من النتائج المرتبطة بالمجموعات المولدة بضعف الصغرى لزمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس n.

1- تعاريف ومبرهنات أساسية.

نعرض في هذه الفقرة بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالزمر والمجموعات المولدة لزمرة، والبداية مع التعريف الآتي:

تعريف. [6].

لتكن $(G,+)$ زمرة ولنفرض أنَّ S مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ نقول عن المجموعة S إنها مولدة للزمرة G إذا كانت أصغر زمرة جزئية من G تحوي S هي G نفسها. إذا كانت المجموعة S مولدة للزمرة G فإننا نعبر ذلك بالشكل $G=\langle S\rangle$.

تعريف. [6].

لتكن $(G,+)$ زمرة، عندئذ نقول عن الزمرة G إنها منتهية التوليد إذا وجدت في G مجموعة جزئية غير خالية منتهية مولدة لها، وإلّا فإن الزمرة G غير منتهية التوليد.

مبرهنة.1.1. [6].

لتكن $(G,+)$ زمرة ولنفرض أنَّ S مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ فإنَّ $G=\langle S\rangle$ إذا وفقط إذا كان كل عنصر $x\in G$ يكتب بدلالة عناصر مجموعة جزئية منتهية من عناصر المجموعة S.

مبرهنة.1.2. [6].

لتكن $(\mathbb{Z},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة ولنفرض أنَّ $n_1,n_2,...,n_k$ أعداداً صحيحة موجبة وأنَّ $\gcd(n_1,n_2,...,n_k)=d$ عندئذ فإنَّ $\langle n_1,n_2,...,n_k\rangle=\langle d\rangle$

تعريف. [6,11].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن $X=\{x_i\}_{i=1}^n$ مجموعة جزئية من الزمرة G عناصرها مغايرة للصفر، عندئذ نقول عن المجموعة X إنها **مستقلة** إذا كان لأجل أي مجموعة جزئية $\{\alpha_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{Z}$ وتحقق $\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i=0$ ينتج أن $\alpha_i x_i=0$ لأجل كل $1\le i\le n$. ونقول عن المجموعة X إنها **مرتبطة** إذا لم تكن مستقلة.

تعريف. [6,11].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبـديليـة، لنفرض أن X مجموعـة جزئيـة غير خـاليـة من الزمرة G عناصـــرها مغايرة للصـــفر، عندئذ نقول عن المجموعة X إنها مســـتقلة إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية منها مستقلة. ونقول عن المجموعة X إنها مرتبطة إذا لم تكن مستقلة.

تعريف. [6].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبـديليـة، لنفرض أن X مجموعـة جزئيـة غير خـاليـة ومنتهيـة من G عناصـــرها مغايرة للصـــفر، عندئذ نقول إنَّ X أســـاســـاً للزمرة G إذا كان $G=\langle X\rangle$ وكانت المجموعة X مستقلة.

تعريف.[6].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن $X=\{x_i\}_{i=1}^{n}$ مجموعة جزئية من الزمرة G عندئذ نقول إنَّ المجموعة X مســتقلة خطياً إذا كان لأجل أي مجموعة جزئية $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}\subset$ وتحقق $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=0$ ينتج أن $\alpha_i=0$ لأجل كل $1\le i\le n$. ونقول عن المجموعـة X إنهـا مرتبطة خطياً إذا لم تكن مستقلة خطياً.

تعريف.[6].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ نقول عن المجموعة X إنها مســـتقلة خطياً إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية منها مستقلة خطياً. ونقول عن المجموعة X إنها مرتبطة خطياً إذا لم تكن مستقلة خطياً.

مبرهنة.1.3.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ القضـايا الآتية صحيحة:

1- إذا كان $0\in X$ فإنَّ المجموعة X تكون مرتبطة خطياً.

2- إذا كانت X مستقلة خطياً فإنها تكون مستقلة.

3- تكون X مرتبطة إذا وفقط إذا حوت مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية مرتبطة.

4- تكون X مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا حوت مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية مرتبطة خطياً.

5- إذا كانت X مرتبطة فإنها تكون مرتبطة خطياً.

تعريف. [6,9,11].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، عندئذ نقول عن الزمرة G إنها حرة إذا وجد في G مجموعة جزئية غير خالية X مستقلة خطياً ومولدة لها، وندعو المجموعة X في هذه الحالة أساساً حراً للزمرة G.

مبرهنة.1.4. [6,11].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ تشكل المجموعة X أساساً حراً للزمرة G إذا وفقط إذا كان كل عنصر $x \in G$ يكتب بدلالة عناصر مجموعة جزئية منتهية من عناصر المجموعة X وبطريقة وحيدة.

مبرهنة.1.5. [6,11].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، عندئذ تكون الزمرة G حرة إذا وفقط إذا كانت مجموعاً مباشراً لزمرٍ جزئية دوارة غير منتهية منها.

مبرهنة.1.6. [6,9,11].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة، ولنفرض أنَّ X, Y أساسين حرين مختلفين لها، عندئذ فإنَّ $card(X) = card(Y)$.

مبرهنة. 1.7. [6,11].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة منتهية التوليد ولنفرض أنَّ $X = \{x_1, x_2, .., x_r\}$ أساساً حراً لها، عندئذٍ أياً كان $n \in \mathbf{Z}$ فإنَّ المجموعة:

$$T = \{x_1, x_2, .., x_{j-1}, x_j + nx_i, x_{j+1}, .., x_r\}$$

هي أساس للزمرة G وذلك لكل $i \neq j$.

ملاحظة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أنَّ X,Y أســـاســـين مختلفين لها، عندئذ ليس بالضرورة أن يكون $card(X)=card(Y)$، فضلاً عن ذلك إذا كان X أساساً للزمرة G، عندئذ أياً كان $x\in G$ فإنَّ x يكتب بدلالة عناصـــر مجموعة جزئية منتهية من عناصـــر المجموعة X لكن ليس بالضرورة أن تكون هذه الكتابة وحيدة.

تعريف. [9].

ليكن $(G,+)$ زمرة تبديلية لنفرض أنَّ $X=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ مجموعة جزئية من G، نقول عن المجموعة X إنها مستقلة عظمى(مستقلة خطياً عظمى) إذا حققت:

1 – المجموعة X مستقلة(مستقلة خطياً).

2 – لأجل كل عنصر $v\in G$ بحيث $v\notin X$ فإنَّ المجموعة $X\bigcup\{v\}$ مرتبطة(مرتبطة خطياً).

مبرهنة. 1.8. [9].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية مستقلة في G، عندئذ لأجل أي زمرة جزئية $\{0\}\neq A\subseteq G$ يكون الشرطان الآتيان متكافئان:

1– المجموعة X مستقلة عظمى.

2– $\langle X\rangle\bigcap A\neq\{0\}$.

2- التوليد الضعيف.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ $X=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعة جزئية من G، عندئذ نسمي كل تركيب لعناصر المجموعة X من الشكل $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$ حيث إنَّ $\alpha_i\in\mathbb{Z}$ لأجل كل $1\le i\le n$ وتحقق $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$ تركيباً ضعيفاً لعناصر المجموعة X، ونقول عن العنصر $v\in G$ إنه يكتب على شكل تركيب ضعيف لعناصر المجموعة X إذا وجدت عناصر $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}$ تحقق أنَّ $\sum_{i=1}^{n}a_i=0$ وأنَّ $v=\sum_{i=1}^{n}a_i v_i$.

مبرهنة.2.1.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية و $X=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعة جزئية من G. ولنفرض أنَّ:

$$\langle X\rangle_W=\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i:\alpha_i\in\mathbb{Z},\forall 1\le i\le n\ \wedge\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0\}$$

مجموعة التراكيب الضعيفة لعناصر المجموعة X، عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1- إنَّ التركيب الضعيف لحيادي الزمرة G بدلالة عناصر المجموعة X موجود دوماً.

2- المجموعة $\langle X\rangle_W$ تشكل زمرة جزئية في G.

البرهان. واضح.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية و $X=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعة جزئية من G. عندئذ نسمي الزمرة الجزئية:

$$\langle X\rangle_W=\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i:\alpha_i\in\mathbb{Z},\forall 1\le i\le n\ \wedge\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0\}$$

الزمرة الجزئية المولدة بضعف بالمجموعة X.

مبرهنة .2.2.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ e هو حيادي هذه الزمرة، عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 – لأجل أي عنصر $v\in G$ فإن $\langle\{v\}\rangle_W=\{e\}$.

2 – لأجل أي مجموعة جزئية منتهية X من G، إذا كان $\langle X\rangle_W\neq\{e\}$ فإن $Card\ X\geq 2$.

3– لأجل أي مجموعتين جزئيتين منتهيتين $X\subseteq Y$ من الزمرة G فإنَّ $\langle X\rangle_w\subseteq\langle Y\rangle_w$.

البرهان.

1 – ينتج مباشرة من التعريف.

2 – ينتج مباشرة من (1).

3– واضح.

العلاقة بين $\langle X\rangle_W$ الزمرة الجزئية المولدة بضعف بمجموعة منتهية X والزمرة الجزئية $\langle X\rangle$ المولد بالمجموعة X نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

مبرهنة.2.3.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ $X=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعة جزئية منتهية في G. عندئذ فإنَّ $\langle X\rangle_W\subseteq\langle X\rangle$.

البرهان. واضح.

مبرهنة.2.4.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ $X=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعة جزئية منتهية في G، عندئذٍ الشرطان الآتيان متكافئان:

1– $X\subseteq\langle X\rangle_W$.

$\langle X \rangle = \langle X \rangle_w$ - 2.

البرهان.

(1)$\Leftarrow$(2). لنفرض أن $X \subseteq \langle X \rangle_w$ ، عندئذ حسب تعريف $\langle X \rangle$ فإن $\langle X \rangle$ هي أصغر زمرة جزئية في G تحوي X ومنه فإنَّ $\langle X \rangle \subseteq \langle X \rangle_w$. من جهة أخرى، وحسب المبرهنة 2.3 نجد أنَّ $\langle X \rangle_w \subseteq \langle X \rangle$ وهكذا فإنَّ $\langle X \rangle = \langle X \rangle_w$.

(2)$\Leftarrow$(1). لنفرض أنَّ $\langle X \rangle = \langle X \rangle_w$، عندئذ لما كان $X \subseteq \langle X \rangle$ نجد أنَّ $X \subseteq \langle X \rangle_w$.

اعتماداً على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

لتكن G زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G. إذا كان $G = \langle X \rangle_w$ ، عندئذ فإنَّ $G = \langle X \rangle$.

ملاحظة.

إنَّ المبرهنة 2.4 تبين لنا أنه في الزمرة التبديلية $(G,+)$ توجد زمر جزئية مولدة بضعف بمجموعات جزئية منتهية من غير محتواه فيها.

ننتقل الآن إلى دراسة الزمر الجزئية المولدة بضعف بمجموعة ما X، والبداية مع المبرهنة الآتية:

مبرهنة 2.5

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة ولنفرض أنَّ $X = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ مجموعة جزئية من G إذا كانت المجموعة X مستقلة خطياً، عندئذ $X \subset \langle X \rangle_w$ وأن $\langle X \rangle \neq \langle X \rangle_w$.

البرهان.

لنفرض أن المجموعة X مستقلة خطياً ولنفرض أن $X \subseteq \langle X \rangle_W$ ، عندئذ لأجل كل عنصر $v_i \in X$ حيث $1 \le i \le n$ توجد عناصر $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ بحيث إن:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \text{ وأن } \sum_{j=1}^{n} a_j = 0$$

ومنه فإن:

$$\sum_{j=1\, j\neq i}^{n} a_j v_j + (a_i - 1)v_i = 0$$

ولما كانت المجموعة X مستقلة خطياً نجد أن $a_i = 1$ وأن $a_j = 0$ لأجل كل $j \neq i$ وهذا يبين أن $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$ وهذا غير ممكن، ومنه فإنَّ $X \not\subset \langle X \rangle_W$ وبالتالي حسب المبرهنة 2.4 نجد أنَّ $\langle X \rangle \neq \langle X \rangle_W$.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G، نعلم أنه إذا كانت المجموعة X مستقلة خطياً فهي $S-$مستقلة، لكن العكس غير صحيح بالضرورة، وهنا يطرح التساؤل الآتي، إذا كانت المجموعة X هي $S-$مستقلة وليست مستقلة خطياً فهل يكون $X \subseteq \langle X \rangle_W$؟.

الإجابة عن هذا السؤال نبينها في المثال الآتي:

مثال. 1.

لتكن $(\mathbb{Z},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة، ولتكن $X = \{2,3\}, Y = \{3,5\}$ مجموعتان جزئيتان من $\mathbb{Z}$، نعلم أنَّ $(\mathbb{Z},+)$ زمرة تبديلية حرة، ونلاحظ أنَّ المجموعة X ليست مستقلة خطياً لكنها $S-$مستقلة، ونلاحظ أنَّ:

$$X \subset \langle X \rangle = \langle X \rangle_W = \mathbb{Z}$$

كما نلاحظ أنَّ المجموعة Y ليست مستقلة خطياً لكنها $S-$مستقلة، ونلاحظ أنَّ:

$$Y \not\subset \langle Y \rangle_W = 2\mathbb{Z}$$

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G، عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1- إذا كانت المجموعة X هي $S-$مستقلة وليست مستقلة خطياً، عندئذ ليس بالضرورة أنَّ يكون $X \subseteq \langle X \rangle_W$.

2- إذا كانت $X \subseteq \langle X \rangle_W$ فإنَّ المجموعة X مرتبطة خطياً.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G، نعلم أنه إذا كانت المجموعة X مستقلة فهي $S-$مستقلة، لكن العكس غير صحيح بالضرورة، وهنا يطرح التساؤل الآتي، إذا كانت المجموعة X مستقلة أو $S-$مستقلة فهل يكون $X \subseteq \langle X \rangle_W$؟.

الإجابة عن هذا السؤال نبينها في الأمثلة الآتي:

مثال. 2.

لتكن $(\mathbb{Z}_{10},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس 10 ولنفرض أنَّ $X = \{5,2\}$ مجموعة جزئية في $\mathbb{Z}_{10}$، نلاحظ أنَّ المجموعة $X = \{5,2\}$ مستقلة، وأنَّ:

$$X \subseteq \langle X \rangle_W = \mathbb{Z}_{10}$$

مثال. 3.

لتكن $(\mathbb{Z}_{30},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس 30 ولنفرض أنَّ $X = \{6,10\}$ مجموعة جزئية في $\mathbb{Z}_{30}$، نلاحظ أنَّ المجموعة $X = \{6,10\}$ مستقلة، بالإضافة لذلك نلاحظ أنَّ:

$$X \not\subset \langle X \rangle_W = 4\mathbb{Z}_{30}$$

مثال. 4.

لتكن $(\mathbb{Z}_{12},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس 12 ولنفرض أنَّ $X = \{2,3\}$ مجموعة جزئية في $\mathbb{Z}_{12}$، نلاحظ أنَّ المجموعة X ليست مستقلة لكنها $S-$مستقلة، بالإضافة لذلك نلاحظ أنَّ:

$$X \subseteq \langle X \rangle_W = \mathbb{Z}_{12}$$

بناءً على الأمثلة الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G، عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1- إذا كانت المجموعة X مستقلة، عندئذ ليس بالضرورة أن يكون $X \subseteq \langle X \rangle_W$.

2- إذا كانت المجموعة X هي S-مستقلة، عندئذ ليس بالضرورة أنَّ يكون $X \subseteq \langle X \rangle_W$.

مبرهنة. 2.6.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية و $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مجموعة جزئية من G، ولنفرض أنَّ $0 \notin X$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1- $G = \langle X \rangle$.

2- $G = \langle X \cup \{0\} \rangle_W$.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أنَّ المجموعة X تولد الزمرة G، عندئذ لأجل كل $v \in G$ توجد عناصر $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ بحيث $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. لنضع:

$$a_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} a_i \in \mathbf{Z} \text{ و } v_{n+1} = 0 \in G$$

عندئذ يكون $v = \sum_{i=1}^{n+1} a_i v_i$ وأن $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0$ وهذا يبين أن المجموعة $X \cup \{0\}$ تولد بضعف الزمرة G، أي إن $G = \langle X \cup \{0\} \rangle_W$.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن المجموعة $X \cup \{0\}$ تولد بضعف الزمرة G، عندئذ لأجل كل $v \in G$ توجد عناصر $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ بحيث $v = \sum_{i=0}^{n} a_i v_i$ وأن $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$ حيث إنَّ $v_0 = 0$، ومنه فإن $v = \sum_{i=0}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ وهذا يبين أن المجموعة X تولد الزمرة G.

مبرهنة. 2.7.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أنَّ $v_1, v_2, \ldots, v_n \in G$، عندئذ أياً كان $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ فإنّ:

$$\langle\{v_1,v_2,...,v_n\}\rangle_w = \left\langle\{v_i - v_j\}_{i=1,i\neq j}^{n}\right\rangle$$

البرهان.

دون الإخلال بعمومية المسألة نفرض أنَّ $j=1$. إذا كان $x \in \langle\{v_1,v_2,...,v_n\}\rangle_w$ ، فهذا يكافئ أنه توجد مجموعة من العناصر $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subseteq$ تحقق:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i = x \text{ , } \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$$

والذي يكافئ أنَّ: $(-\sum_{i=2}^{n}\alpha_i)v_1 + \sum_{i=2}^{n}\alpha_i v_i = x$ حيث إنَّ $-\sum_{i=2}^{n}\alpha_i = \alpha_1$ ، وهذا يكافئ أنَّ:

$$\sum_{i=2}^{n}\alpha_i (v_i - v_1) = x$$

والذي بدوره يكافئ أنَّ $x \in \left\langle\{v_i - v_1\}_{i=2}^{n}\right\rangle$. مما سبق نجد أنَّ:

$$\langle v_1,v_2,...,v_n\rangle_w = \left\langle\{v_i - v_1\}_{i=2}^{n}\right\rangle$$

3 – الاستقلال الضعيف والاستقلال الخطي الضعيف.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ $X=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعة جزئية في G، نقول عن المجموعة X إنها مستقلة بضعف إذا كان لأجل أي مجموعة منتهية من العناصر $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\subset \mathbf{Z}$ التي لأجلها:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0 \ \wedge \ \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$

ينتج أنَّ $a_1v_1=a_2v_2=\ldots=a_nv_n=0$.

أما إذا وجدت عناصر $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbf{Z}$ بحيث إنَّ $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ وأنَّ $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ ولم يتحقق أنَّ $a_1v_1=a_2v_2=\cdots=a_nv_n=0$ فإننا نقول في هذه الحالة إنَّ المجموعة X مرتبطة ارتباطاً تاماً.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ $X=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعة جزئية منتهية في G، نقول عن المجموعة X إنها مستقلة خطياً بضعف إذا كان لأجل أي مجموعة منتهية من العناصر $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\subset \mathbf{Z}$ التي لأجلها:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0 \ \wedge \ \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$

ينتج أن $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$.

أما إذا وجدت عناصر $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbf{Z}$ بحيث إنَّ $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ وأنَّ $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ ولم يتحقق أنَّ $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$ فإننا نقول في هذه الحالة إنَّ المجموعة X مرتبطة ارتباطاً خطياً تاماً.

مثال. 5.

لتكن $(U(10),.)$ زمرة أولر من الرتبة 10، ولنفرض أنَّ $X=\{3,9\}\subseteq U(10)$، نلاحظ أنَّ المجموعة X مستقلة بضعف وليست مستقلة.

مثال. 6.

لتكن $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة، ولنفرض أنَّ $X=\{(1,0),(-1,0)\}$ مجموعة جزئية من الزمرة $(+,\mathbb{Z}^2)$، نلاحظ أنَّ المجموعة X مستقلة خطياً بضعف و ليست مستقلة خطياً.

مبرهنة. 3.1.

لأجل أي زمرة تبديلية $(G,+)$، تكون القضايا الآتية صحيحة:

1- كل مجموعة وحيدة العنصر تكون مستقلة (مستقلة خطياً) بضعف.

2- إذا كانت الزمرة G' زمرة جزئية من G وعديمة الفتل فإنَّ كل مجموعة جزئية من G' مؤلفة من عنصرين تكون مستقلة خطياً بضعف.

3- كل مجموعة جزئية منتهية من G ومستقلة تكون مستقلة بضعف.

4- كل مجموعة جزئية منتهية من G ومستقلة خطياً تكون مستقلة خطياً بضعف.

البرهان.

1- واضح.

2- لتكن $\{v_1, v_2\}$ مجموعة جزئية من G' وليكن $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ يحققان:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \quad \wedge \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

عندئذ نجد أن $\alpha_2 = -\alpha_1$ ومنه يكون $\alpha_1 v_1 - \alpha_1 v_2 = 0$ وهذا يبين أن $\alpha_1(v_1 - v_2) = 0$

.

ومنه:

- إما أنَّ يكون $v_1 - v_2 = 0$ ومنه $v_1 = v_2$ وهذا غير ممكن.

- أو أنَّ يكون $\alpha_1 = 0$، وبالتالي $\alpha_2 = 0$ وهذا يبين أنَّ المجموعة $\{v_1, v_2\}$ مستقلة خطياً بضعف.

3- لتكن $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مجموعة جزئية من G ومستقلة عندئذ أياً كانت العناصر $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ والتي تحقق أنَّ $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ ينتج أنَّ $a_1 v_1 = a_2 v_2 = \ldots = a_n v_n = 0$ ومنه نجد أنَّه أياً كانت العناصر $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{Z}$

والتي تحقق أنَّ $\sum_{i=1}^{n} b_i v_i = 0$ وأنَّ $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$ ينتج أنَّ $b_1 v_1 = b_2 v_2 = \ldots = b_n v_n = 0$ ومنه نجد أنَّ المجموعة X مستقلة بضعف.

4- ينتج من 3 ومن كون كل مجموعة مستقلة خطياً هي مستقلة.

مبرهنة. 3.2.

لتكن $(G,+)$زمرة تبديلية ولتكن $X = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ مجموعة جزئية في G بحيث $0 \notin X$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - المجموعة X مستقلة (مستقلة خطياً).

2 - المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف (مستقلة خطياً بضعف).

البرهان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أنَّ المجموعة X مستقلة ولنضع $v_0 = 0 \in G$، عندئذ فإنَّ:

$$X \cup \{0\} = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

لتكن $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbf{Z}$ تحقق $\sum_{i=0}^{n} \beta_i v_i = 0$ وأنَّ $\sum_{i=0}^{n} \beta_i = 0$، عندئذ يكون $\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = 0$. ولما كانت المجموعة X مستقلة ينتج أن $\beta_1 v_1 = \beta_2 v_2 = \ldots = \beta_n v_n = 0$ ولما كان $v_0 = 0$ نجد أنَّ $\beta_0 v_0 = 0$ ومنه فإنَّ المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف.

$(2) \Leftarrow (1)$. لنفرض أنَّ المجموعة $X \cup \{0\} = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ حيث $v_0 = 0$ مستقلة بضعف ولتكن $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbf{Z}$ تحقق $\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = 0$، عندئذ من أجل $\beta_0 = -\sum_{i=1}^{n} \beta_i$ نجد أنَّ: $\sum_{i=0}^{n} \beta_i = 0$ وأن $\sum_{i=0}^{n} \beta_i v_i = 0$

وحسب الفرض نجد أن $\beta_0 v_0 = \beta_1 v_1 = \beta_2 v_2 = \ldots = \beta_n v_n = 0$، مما سبق نجد أنَّ $\beta_1 v_1 = \beta_2 v_2 = \ldots = \beta_n v_n = 0$ وهذا يبين أنَّ المجموعة X مستقلة.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية لنفرض أنَّ $X = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ مجموعة جزئية من G، نقول عن المجموعة X إنها مستقلة بضعف عظمى (مستقلة خطياً بضعف عظمى) إذا حققت الشرطين:

1 – المجموعة X مستقلة بضعف (مستقلة خطياً بضعف).
2 – أياً كان $v \in G$ بحيث $v \notin X$ فإنَّ المجموعة $X \cup \{v\}$ مرتبطة ارتباطاً تاماً (مرتبطة ارتباطاً خطياً تاماً).

مبرهنة. 3.3.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية و X مجموعة جزئية منتهية من G، و لنفرض أن $0 \notin X$، عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:
1 – المجموعة X مستقلة عظمى (مستقلة خطياً عظمى).
2 – المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف عظمى (مستقلة خطياً بضعف عظمى).

البرهان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أنَّ المجموعة X مستقلة عظمى، عندئذ فإنَّ المجموعة X مستقلة وبالتالي حسب المبرهنة 3.2 تكون المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف. ليكن $v_{n+1} \in G$ بحيث إنَّ $v_{n+1} \notin X \cup \{0\}$، ولما كانت المجموعة X مستقلة عظمى فإنَّ المجموعة $X \cup \{v_{n+1}\}$ مرتبطة، ومنه تكون المجموعة $X \cup \{0, v_{n+1}\}$ ليست مستقلة بضعف، وبالتالي المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف عظمى.

$(2) \Leftarrow (1)$. لنفرض أن المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف عظمى. عندئذ المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف وحسب المبرهنة 3.2. تكون المجموعة X مستقلة. ليكن $v_{n+1} \in G$ بحيث إن $v_{n+1} \notin X \cup \{0\}$، ولما كانت المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف عظمى فإنَّ المجموعة $X \cup \{0, v_{n+1}\}$ ليست مستقلة بضعف، وبالتالي المجموعة $X \cup \{v_{n+1}\}$ ليست مستقلة، وهذا يبين أن المجموعة X مستقلة عظمى.

يتم البرهان بشكل مماثل في حال كانت المجموعة X مستقلة خطياً.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية وغير خالية من G، عندئذ نقول عن المجموعة X إنها $S-$ مستقلة بضعف إذا كان $x \notin \langle X \setminus \{x\} \rangle_w$ وذلك أياً كان $x \in X$.

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية وغير خالية من G، عندئذ إذا كان $0 \in X$ فإنَّ المجموعة X ليست $S-$مستقلة بضعف.

مثال. 7.

لتكن $(+,\mathbb{Z})$ زمرة الأعداد الصحيحة، ولنفرض أنَّ $X = \{6,10,15\}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$، نلاحظ أنَّ المجموعة X ليست مستقلة خطياً بضعف، فضلاً عن ذلك نلاحظ أنَّ المجموعة X هي مجموعة $S-$مستقلة بضعف.

مثال. 8.

لتكن $(+,\mathbb{Z})$ زمرة الأعداد الصحيحة، ولنفرض أنَّ $X = \{6,0\}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$ ، نلاحظ أنَّ المجموعة $X = \{6,0\}$ مستقلة خطياً بضعف عظمى، فضلاً عن ذلك نلاحظ أنَّ المجموعة X ليست $S-$مستقلة بضعف.

مثال. 9.

لتكن $(+,\mathbb{Z}_6)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس 15 ، ولنفرض أنَّ $X = \{2,3\}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$، نلاحظ أنَّ المجموعة X مستقلة بضعف هي $S-$مستقلة بضعف.

مثال. 10.

لتكن $(+,\mathbb{Z}_{15})$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس 15، ولنفرض أنَّ $X = \{1,4,7\}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}_{15}$، نلاحظ أنَّ المجموعة X ليست مستقلة بضعف وهي $S-$مستقلة بضعف.

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية وغير خالية من G، عندئذ إذا كانت المجموعة X مستقلة بضعف (مستقلة خطياً بضعف) فليس بالضرورة أن تكون $S-$ مستقلة بضعف.

مبرهنة. 3.4.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أنَّ $X=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ مجموعة جزئية من G، عندئذ أياً كان $j\in\{1,2,...,n\}$ تكون المجموعة X مستقلة خطياً بضعف(مستقلة بضعف) إذا وفقط إذا كانت المجموعة $Y=\left\{v_i-v_j\right\}_{i=1,i\neq j}^{n}$ مستقلة خطياً(مستقلة).

البرهان. دون الإخلال بعمومية المسألة نفرض أنَّ $j=1$.

$(\Leftarrow)$. لنفرض أنَّ المجموعة X مستقلة خطياً بضعف، ولنأخذ مجموعة العناصر $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}\subseteq\square$ والتي تحقق أنَّ:

$$\sum_{i=2}^{n}\alpha_i(v_i-v_1)=0$$

عندئذ نجد أنَّ:

$$(-\sum_{i=2}^{n}\alpha_i)v_1+\sum_{i=2}^{n}\alpha_i v_i=0$$

وبما أنَّ:

$$-\sum_{i=2}^{n}\alpha_i+\sum_{i=2}^{n}\alpha_i=0$$

وبما أنَّ المجموعة X مستقلة خطياً بضعف نجد إنَّ $\sum_{i=2}^{n}\alpha_i=\alpha_2=...=\alpha_n=0$، بالتالي فإنَّ المجموعة Y مستقلة خطياً.

$(\Rightarrow)$. لنفرض أنَّ المجموعة Y مستقلة خطياً، لنأخذ مجموعة العناصر $\{\beta_i\}_{i=1}^{n}\subseteq\square$ والتي تحقق أنَّ:

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i=0\wedge\sum_{i=1}^{n}\beta_i=0$$

عندئذ نجد أنَّ $\beta_1 = -\sum_{i=2}^{n} \beta_i$ وأنَّ:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \sum_{i=2}^{n} \beta_i v_i - (\sum_{i=2}^{n} \beta_i) v_1 = \sum_{i=2}^{n} \beta_i (v_i - v_1)$$

وبما أنَّ المجموعة Y مستقلة خطياً فإنَّ $\beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_n = 0$ وبالتالي $\beta_1 = 0$ ومنه فإنَّ المجموعة X مستقلة خطياً بضعف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G، نعلم أنه إذا كانت المجموعة X مستقلة خطياً بضعف فإنَّ المجموعة $Y = \left\{ v_i - v_j \right\}_{i=1, i \neq j}^{n}$ مستقلة خطياً، وأنَّ العكس صحيح، وهنا يطرح التساؤل الآتي، إذا كانت المجموعة X مستقلة بضعف فهل تكون المجموعة $Y = \left\{ v_i - v_j \right\}_{i=1, i \neq j}^{n}$ مستقلة؟ وهل يكون العكس صحيحاً؟ الإجابة عن هذا السؤال نبينه في الأمثلة الآتية:

مثال. 11.

لتكن $(+, \mathbb{Z}_{10})$ زمرة الأعداد الصحيحة، ولنفرض أنَّ $X = \{5,3\}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$، نلاحظ أنَّ المجموعة X ليست مستقلة بضعف، بالمقابل نجد أنَّ المجموعة $Y = \{5-3=2\}$ مجموعة مستقلة.

مثال. 12.

لتكن $(U(105),.)$ زمرة أولر من الرتبة 105 ولنفرض أنَّ:

$$X = \{29, 22, 31\} \subseteq U(105)$$

نعلم أنَّ المجموعة X مستقلة بضعف، بالمقابل نجد أنَّ المجموعة:

$$Y = \left\{ 29 \times (22)^{-1}, 31 \times (22)^{-1} \right\} = \{29 \times 43, 31 \times 43\} = \{92, 73\}$$

مجموعة غير مستقلة.

4 – الأساس الحر الضعيف والمجموعات المولدة بضعف الصغرى.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية في G، عندئذٍ نقول إنَّ X مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة G إذا حققت الشرطين الآتيين:

1 – المجموعة X تولد بضعف الزمرة G، أي إنَّ $G = \langle X \rangle_w$.

2 – المجموعة X هي S–مستقلة بضعف.

مبرهنة. 4.1.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ إذا كانت المجموعة X مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة G فإنَّ X لا تحوي مجموعة جزئية فعلية مولدة بضعف للزمرة G.

البرهان.

لتكن X مجموعة جزئية غير خالية من G، ولنفرض أنَّ X مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة G. لنفرض جدلاً أنه توجد مجموعة جزئية $X_1 \subset X$ تحقق أنَّ $\langle X_1 \rangle_w = G$ ، عندئذ يوجد عنصر $x \in X$ بحيث إنَّ $x \notin X_1$، عندئذ $x \in \langle X_1 \rangle_w \subseteq \langle X \setminus \{x\} \rangle_w$، أي إنَّ $x \in \langle X \setminus \{x\} \rangle_w$ وهذا يبين أنَّ المجموعة X ليست مولدة بضعف صغرى للزمرة G لأنها ليست S–مستقلة بضعف وهذا تناقض، وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ، أي إنَّ X_1 ليست مولدة بضعف للزمرة G، وبالتالي المجموعة X لا تحوي أي مجموعة جزئية فعلية مولدة بضعف للزمرة G.

إنَّ عكس المبرهنة السابقة غير صحيح أيّ إذا كانت المجموعة X مجموعة مولدة بضعف ولا تحوي مجموعة جزئية تولد بضعف الزمرة G فليس بالضرورة أن تكون المجموعة X مجموعة مولدة بضعف صغرى.

مثال. 13.

لتكن $(+, \square)$ زمرة الأعداد الصحيحة، ولنفرض أنَّ $X = \{11,4,7\}$ مجموعة جزئية من $\square$. من الواضح أنَّ $Z = \langle X \rangle_W$، نلاحظ أنَّ المجموعة X مجموعة مولدة بضعف للزمرة $\square$ ولا تحوي مجموعات جزئية تولد بضعف الزمرة $\square$، وبما أنَّ $4 \in \langle \{7,11\} \rangle_w$ فإنَّ المجموعة X ليست $S-$مستقلة بضعف، وبالتالي المجموعة X ليست مجموعة مولدة بضعف صغرى، وهذا يبين أنَّ عكس المبرهنة السابقة غير صحيح.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة و X مجموعة جزئية منتهية في G، عندئذٍ نقول إنَّ X تشكل أساساً ضعيفاً (أساساً حراً ضعيفاً) للزمرة G إذا حققت الشرطين الآتيين:

1 – المجموعة X تولد بضعف الزمرة G، أي إنَّ $G = \langle X \rangle_W$.

2 – المجموعة X مستقلة بضعف (مستقلة خطياً بضعف).

مبرهنة. 4.2.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة منتهية التوليد، ولنفرض أنَّ $X = \{u_1,u_2,...,u_n\}$ مجموعة جزئية من الزمرة G، عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1- تكون المجموعة X أساساً حراً ضعيفاً للزمرة G، إذا وفقط إذا كانت المجموعة $Y = \{u_i - u_j\}_{i=1,i\neq j}^{n}$ أساس حر.

2- إذا كانت المجموعة X أساساً حراً ضعيفاً للزمرة G وكانت المجموعة Z أساس حر ضعيف أخر للزمرة G، عندئذٍ فإنَّ $Card\ Z = Card\ X$.

البرهان.

1- $(\Leftarrow)$. لنفرض أنَّ $X = \{u_1,u_2,...,u_n\}$ أساس حر ضعيف للزمرة G، عندئذ بحسب المبرهنة 3.4 والمبرهنة 2.7 تكون المجموعة $Y = \{u_i - u_j\}_{i=1,i\neq j}^{n}$ مجموعة مستقلة خطياً و تولد الزمرة G، ومنه فإنَّ المجموعة Y أساس حر.

$(\Rightarrow)$. لنفرض أنَّ $Y = \{u_i - u_j\}_{i=1,i\neq j}^{n}$ أساس حر للزمرة G، عندئذ بحسب المبرهنة 3.4 والمبرهنة 2.7 تكون المجموعة X مجموعة مستقلة خطياً بضعف و تولد بضعف الزمرة G، ومنه فإنَّ المجموعة X أساس حر ضعيف للزمرة G.

2 – لنفرض أنَّ المجموعة $Z = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ أساس حر ضعيف للزمرة G عندئذ بحسب البند الأول تكون المجموعتان $Y = \{u_i - u_j\}_{i=1,i\neq j}^{n}$, $Y_1 = \{v_i - v_j\}_{i=1,i\neq j}^{m}$ أساس حر للزمرة G، وبالاعتماد على المبرهنة 1.6 فإنَّ:

$$Card\ Y = Card\ Y_1$$

ومنه فإنَّ $Card\ X = Card\ Z$.

مبرهنة. 4.3.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة منتهية التوليد، ولنفرض أنَّ $X = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ أساساً حراً ضعيفاً للزمرة G، عندئذ فإنَّ المجموعة X هي مجموعة مستقلة خطياً بضعف عظمى.

البرهان.

لنفرض أنَّ X أساساً حراً ضعيفاً للزمرة G عندئذٍ فإنَّ المجموعة X مستقلة خطياً بضعف في الزمرة G، ولنفرض أنَّه يوجد $v_{n+1} \in G$ بحيث إنَّ $X \cup \{v_{n+1}\}$ مستقلة خطياً بضعف وبالاعتماد على البند 3 من المبرهنة 2.2 فإنَّنا نجد أنَّ المجموعة $Z = X \cup \{v_{n+1}\}$ تشكل أساساً حراً ضعيفاً ونلاحظ أنَّ:

$$Card(Z) = Card(X) + 1$$

وهذا غير ممكن وذلك حسب المبرهنة السابقة. بالتالي فإنَّ المجموعة X مستقلة بضعف خطياً عظمى.

إنَّ المبرهنة السابقة تطرح التساؤل الآتي، هل كل أساسا ضعيفاً في زمرة تبديلية منتهية التوليد يشكل مجموعة مستقلة بضعف عظمى في هذه الزمرة؟ وهل العكس صحيح؟. الإجابة عن هذا السؤال نبينه بالأمثلة الآتية:

مثال. 14.

لتكن $(\mathbf{Z}_6,+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس 6، ولنفرض أنَّ $X=\{2,3\}$ مجموعة جزئية من الزمرة $\mathbf{Z}_6$. إنَّ المجموعة X تشكل أساساً ضعيفاً للزمرة $\mathbf{Z}_6$ فهي مستقلة بضعف ومولدة بضعف لهذه الزمرة فضلاً عن كونها مستقلة عظمى، لكنها ليست مجموعة مستقلة بضعف عظمى لأنَّ المجموعة $X_1=\{2,3,0\}$ مستقلة بضعف عظمى وذلك حسب المبرهنة **3.2.**

مثال. 15.

لتكن الزمرة $(+,\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6)$، ولنفرض أنَّ $X=\{(2,0),(3,0),(0,2),(0,0)\}$ مجموعة جزئية من الزمرة $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6$، نلاحظ أنَّ X تشكل مجموعة مستقلة بضعف عظمى ولا تشكل مجموعة مولدة بضعف لهذه الزمرة.

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية منتهية التوليد، ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G، عندئذ إذا كانت المجموعة X أساساً ضعيفاً للزمرة G فليس بالضرورة أن تكون مستقلة بضعف عظمى في G، وإذا كانت المجموعة X مستقلة بضعف عظمى في G فليس من الضروري أن تكون أساساً ضعيفاً للزمرة G.

مبرهنة. 4.4

لتكن $(+,\mathbb{Z})$ زمرة الأعداد الصحيحة. ولتكن X مجموعة جزئية منتهية من $\mathbf{Z}$. عندئذ:

1- لأجل كل $a,b\in\mathbf{Z}$ عندئذ تكون المجموعة $X=\{a,b\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}$ إذا وفقط إذا كان $a=b+1$.

2- لأجل كل $a,b,c\in\mathbf{Z}$. تكون المجموعة $X=\{a,b,c\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(b-a,c-a)=1$ وكانت الأعداد a,b,c لا تقبل القسمة على الأعداد $b-c,c-a,b-a$ على الترتيب.

البرهان.

1- $(\Leftarrow)$. لنفرض أنَّ المجموعة $X=\{a,b\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}$، نعلم أنّ $\langle a,b\rangle_w=\langle b-a\rangle$ وذلك حسب المبرهنة 2.7. وبما أنَّ الزمرة $\mathbf{Z}$ دوارة ومولدة بالعنصر $1\in\mathbf{Z}$ نجد إنّه إما $b-a=1$ أو $b-a=-1$ وبذلك نجد أنّه إما $b=a+1$ أو $a=b+1$ وفي كلتا الحالتين نجد أن $X=\{a,a+1\}$.

$(\Rightarrow)$. لنفرض أنَّ $X=\{a,a+1\}$ وذلك أيا كانت $a\in\mathbf{Z}$ من الواضح أن هذه المجموعة $S-$ مستقلة بضعف، ليكن $x\in\mathbf{Z}$ ولنبحث عن $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}$ التي تحقق:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha a+\beta(a+1)=x\end{cases}$$

إن المعادلتين تملك حلاً وحيداً وهو $\alpha=-x,\ \beta=x$ ومنه المجموعة $X=\{a,a+1\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}$.

2- $(\Leftarrow)$. لنفرض أنَّ المجموعة $X=\{a,b,c\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}$، عندئذ حسب المبرهنة 2.7 نجد أنَّ $\langle a,b,c\rangle_w=\langle b-a,c-a\rangle=\square$، ومنه نجد أنَّ:

$$\gcd(b-a,c-a)=1$$

لنفرض جدلاً $b-c$ يقسم a بالتالي يوجد $\alpha\in\mathbf{Z}$ بحيث إنَّ $a=\alpha(b-c)$ ومنه يكون $a\in\langle b,c\rangle_w=\langle b-c\rangle$ وهذا يناقض كون المجموعة $X=\{a,b,c\}$ هي $S-$مستقلة بضعف ومنه الفرض الجدلي خاطئ و $b-c$ لا يقسم a، وبالمثل نجد أنَّ الأعداد b,c لا تقبل القسمة على الأعداد $c-a,b-a$ على الترتيب.

$(\Rightarrow)$. لما كان $\gcd(b-a,c-a)=1$ فإنَّ المجموعة $\{b-a,c-a\}$ تولد الزمرة $\mathbf{Z}$، عندئذ حسب المبرهنة 2.7 نجد أنَّ $\langle a,b,c\rangle_w=\langle b-a,c-a\rangle=\square$، ولنفرض جدلاً أنَّ المجموعة $X=\{a,b,c\}$ ليست $S-$مستقلة بضعف ولنفرض أنَّ $a\in\langle b,c\rangle_w=\langle b-c\rangle$ ومنه يوجد $\alpha\in\mathbf{Z}$ بحيث إنَّ $a=\alpha(b-c)$ وهذا يناقض كون $b-c$ لا يقسم a ومنه الفرض الجدلي خاطئ والمجموعة $X=\{a,b,c\}$ هي $S-$مستقلة بضعف، مما سبق نجد أنَّ المجموعة $X=\{a,b,c\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}$.

مبرهنة. 4.5.

لتكن $(+,\mathbb{Z})$ زمرة الأعداد الصحيحة، ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من $\mathbf{Z}$، عندئذٍ تكون المجموعة X أساس حر ضعيف للزمرة $\mathbf{Z}$ إذا وفقط إذا كانت المجموعة X تملك الشكل $X=\{a,b\}$ وكان $b=a+1$.

البرهان.

$(\Leftarrow)$. بما أنَّ الزمرة $(+,\mathbb{Z})$ تبديلية حرة وقدرة أي أساس حر لها تساوي 1، عندئذٍ إذا كانت X أساس حر ضعيف للزمرة $\mathbf{Z}$ فإنه اعتماداً على المبرهنة 4.2 نجد أن $Card\ X=2$، نعلم أنّ $\langle a,b\rangle_w=\langle b-a\rangle$ وذلك حسب المبرهنة 2.7. وبما أنَّ الزمرة $\mathbf{Z}$ دوارة ومولدة بالعنصر $1\in\mathbf{Z}$ نجد إنّه إما $b-a=1$ أو $b-a=-1$ وبذلك نجد أنّه إما $b=a+1$ أو $a=b+1$ وفي كلتا الحالتين نجد أنَّ المجموعة X تملك الشكل $\{a,a+1\}$.

$(\Rightarrow)$. من المبرهنة 2.7 والمبرهنة 3.4.

مثال. 16.

لتكن $\mathbf{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة، ولنفرض أنَّ:

$X=\{2,3\}\ ,\ X_1=\{2,5,8\}, X_2=\{1,3,6\}, X_3=\{2,6,13\}, X_4=\{1,0\}$

مجموعات جزئية من الزمرة $(\mathbf{Z},+)$.

- المجموعة X تشكل أساساً حراً ضعيفاً ومولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}$.
- المجموعات X_2, X_3 هي مجموعات مولدة بضعف صغرى لكنها لا تشكل أساساً ضعيفاً للزمرة $\mathbf{Z}$.
- المجموعة X_1 فهي لا تشكل مجموعة مولدة بضعف صغرى ولا تشكل أساساً ضعيفاً للزمرة $\mathbf{Z}$.
- المجموعة X_4 تشكل أساساً حراً ضعيفاً للزمرة $\mathbb{Z}$، لكنها لا تشكل مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}$.

من المثال السابق يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية منتهية التوليد، ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G، عندئذ إذا كانت المجموعة X أساساً حراً ضعيفاً للزمرة G فليس بالضرورة أن تكون مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة G، وإذا كانت المجموعة X مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة G فليس من الضروري أن تكون أساساً حراً ضعيفاً لها.

من المعلوم أنه إذا كانت $(F,+)$ زمرة تبديلية حرة منتهية التوليد، وكان X أساساً حراً لها عندئذٍ لا يمكن إيجاد مجموعات مولدة للزمرة F قدرتها أقل من $Card(X)$ وبالتالي لا يمكن إيجاد مجموعة مولدة بضعف قدرتها أقل من $Card(X)$، وهذا يطرح السؤال التالي هل يمكن إيجاد مجموعات مولدة بضعف قدرتها تساوي n؟

مبرهنـة. 4.6.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة، ولنفرض أنَّ $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ أساساً حراً للزمرة G ، عندئذ إذا كانت $Y=\{y_1,y_2,...,y_m\}$ مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة G فإنَّ $m>n$.

البرهان.

بما أنه من غير الممكن أنَّ يكون $m<n$ نفرض جدلاً أنَّ $m=n$ وليكن $x\in F$ ولنفرض أنَّ $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbf{Z}$ بحيث إنَّ:

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=0\\ \alpha_1y_1+\alpha_2y_2+...+\alpha_ny_n=x\end{cases}$$

إنَّ المعادلتين السابقتين تكافئان المعادلة :

$$\alpha_2(y_2-y_1)+...+\alpha_n(y_n-y_1)=x$$

ومنه فإنَّ:

$$x\in\langle y_2-y_1,...,y_n-y_1\rangle$$

وبالتالي تكون المجموعة $\{y_2 - y_1, ..., y_n - y_1\}$ مولدة للزمرة G قدرتها أقل من n ومنه الفرض الجدلي خاطئ أي إنَّ $m > n$.

إنَّ المبرهنة السابقة تبين أنَّه في الزمرة التبديلية الحرة منتهية التوليد تكون قدرة أي مجموعة مولدة بضعف صغرى أكبر تماما من قدرة أي أساس حر لها، نبين في المبرهنة الآتية كيف يمكن اشتقاق مجموعة مولدة بضعف صغرى لزمرة تبديلية حرة منتهية التوليد من أساس حر لها.

مبرهنة. 4.7.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة، ولنفرض أنَّ $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ أساس حر للزمرة G وأنَّ $a \in \mathbf{Z}$، عندئذ تكون المجموعة:

$$Y = \{x_1, x_2, ..., (a+1)x_i, ax_i, ..., x_n\}$$

هي مجموعة مولدة بضعف صغرى.

البرهان.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة، ولنفرض أنَّ $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ أساساً حراً لها وليكن $y \in G$ و $a \in \mathbf{Z}$ ولنبحث عن العناصر $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1} \in \mathbf{Z}$ التي تحقق:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{n+1} = 0 \quad (*) \\ \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_i (a+1)x_i + \alpha_{i+1} a x_i + .., + \alpha_{n+1} x_n = y \end{cases}$$

إنَّ المعادلات السابقة تكافئ المعادلة:

$$\alpha_1(x_1 - ax_i) + ... + \alpha_i x_i + \alpha_{i+2}(x_{i+1} - ax_i) ... + \alpha_{n+1}(x_n - ax_i) = y$$

وحتى يكون للمعادلة السابقة حلا يجب أن تكون المجموعة:

$$T = \{(x_1 - ax_i), (x_2 - ax_i), ..., x_i, (x_{i+1} - ax_i), ..., x_n - ax_i\}$$

مولدة للزمرة G، لكن بالاعتماد على المبرهنة 1.7 فإنَّ T تشكل أساساً حراً للزمرة G وبالتالي توجد العناصر $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, \alpha_{i+2} ..., \alpha_{n+1} \in \mathbf{Z}$ ومن (*) يكون $\alpha_{i+1} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i+1}}^{n+1} \alpha_j$

وهذا يعني أنَّ $G = \langle Y \rangle_W$.

لنفرض جدلاً أنَّ المجموعة Y ليست $S-$مستقلة بضعف عندئذ دون المساس بالعمومية يوجد عنصر ولنفرض أنه $x_1 \in Y$ يحقق أنَّ:

$$x_1 \in \langle Y \ / x_1 \rangle_w$$

وحسب المبرهنة 2.7 لأجل $x_2 \in Y$ يكون:

$$x_1 \in \langle Y \ / x_1 \rangle_w = \langle \{(x_3 - x_2),...,(a+1)x_i - x_2, ax_i - x_2,...,x_n - x_2\} \rangle$$

وبما أنه لا يمكن توليد الزمرة G بأقل من n عنصر فإنَّ الفرض الجدلي خاطئ والمجموعة Y هي $S-$مستقلة بضعف، مما سبق نجد أنَّ المجموعة Y مولدة بضعف صغرى للزمرة G.

مبرهنة. 4.8.

لتكن $(+, \mathbb{Z}_n)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس n، عندئذ:

1- أياً كان $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0, n-1\}$ فإنَّ المجموعة $X = \{a, a+1\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_n$ وتشكل أساساً ضعيفاً لها.

2- ليكن $a \in \mathbb{Z}_n$ بحيث إنَّ a أولي مع n عندئذ فإنَّ المجموعة $X = \{a, 0\}$ تشكل أساساً ضعيفاً للزمرة $\mathbb{Z}_n$.

3- لتكن $a, b \in \mathbb{Z}_n^*$ بحيث إنَّ $b - a$ أولي مع n عندئذ فإنَّ المجموعة $X = \{a, b\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_n$ وتشكل أساساً ضعيفاً لها.

4- لأجل كل $a, b, c \in \mathbb{Z}_n^*$ تكون المجموعة $X = \{a, b, c\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_n$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(b-a, c-a) = d$ أولياً مع n وكانت الأعداد a, b, c لا تقبل القسمة على الأعداد $b-c, c-a, b-a$ بالترتيب.

5- إذا كان $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_t^{\alpha_t}$ حيث إنَّ $p_1, p_2, ..., p_t$ أعداداً أولية عندئذ فإنَّ الزمرة $\mathbb{Z}_n$ تملك على الأقل مجموعة مستقلة بضعف عظمى قدرتها تساوي $t+1$.

البرهان.

1- لنفرض أنَّ $X = \{a, a+1\}$ وذلك أيا كانت $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0, n-1\}$ من الواضح أن هذه المجموعة $S-$ مستقلة بضعف، ليكن $x \in \mathbf{Z}_n$ ولنبحث عن $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ التي تحقق:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha a+\beta(a+1)=x\end{cases}$$

إنَّ أحد حلول جملة المعادلتين السابقتين هو $(-x,x)$ وهذا يبين أنَّ المجموعة X مولدة بضعف للزمرة $\mathbf{Z}_n$، وبالتالي تكون المجموعة $X=\{a,a+1\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}_n$.

لنبرهن أنَّ المجموعة X مستقلة بضعف، لنفرض أنَّ العناصر $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}$ تحقق أنَّ:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha a+\beta(a+1)=0\end{cases}$$

إنَّ جملة المعادلات السابقة تقبل حلولاً من الشكل $(-r\,n,r\,n)$ حيث إنَّ $r\in\mathbf{Z}$ ومن الواضح أنَّ:

$$\alpha a=(-r\,n)a=0,\beta(a+1)=(rn)(a+1)=0$$

ومنه فإنَّ المجموعة X مستقلة بضعف، وبالتالي فإنَّ المجموعة X تشكل أساساً ضعيفاً للزمرة $\mathbf{Z}_n$.

2- ليكن $a\in\mathbb{Z}_n$ بحيث إنَّ aأولي مع n ولنفرض أنَّ $X=\{a,0\}$، لنفرض أنَّ $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}$ وتحقق أنَّ:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha a+\beta 0=0\end{cases}$$

إنَّ جملة المعادلات السابقة تقبل حلولاً من الشكل $(r\,n,-r\,n)$ حيث إنَّ $r\in\mathbf{Z}$ ومن الواضح أنَّ:

$$\alpha a=(r\,n)a=0,\beta 0=(-rn)(0)=0$$

ومنه فإنَّ المجموعة X مستقلة بضعف.

ليكن $x\in\mathbb{Z}_n$ ولنبحث عن $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}$ والتي تحقق أنَّ:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha a+\beta 0=x\end{cases}$$

ومنه نجد أنَّ $\alpha a = x$، ولما كان $a \in \mathbb{Z}_n$ أوليا مع n فإنه يوجد عنصر $a^{-1} \in \mathbb{Z}_n$ لأجله $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ وبالتالي نجد أنَّ:

$$\beta = -x\ a^{-1},\ \ \alpha = x\ a^{-1}$$

أي إنَّ المجموعة X مولدة بضعف للزمرة $\mathbb{Z}_n$، مما سبق نجد أنَّ المجموعة X تشكل أساساً ضعيفاً للزمرة $\mathbb{Z}_n$.

3- لتكن $a,b \in \mathbb{Z}_n^*$ بحيث إنَّ $b-a$ أولي مع n عندئذ يمكن بسهولة إثبات أنَّ المجموعة $X = \{a,b\}$ هي S–مستقلة بضعف ومستقلة بضعف.

ليكن $x \in \mathbb{Z}_n$ ولنبحث عن $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ التي تحقق المعادلتين:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha a + \beta b = x \end{cases}$$

إنَّ الجملة السابقة تكافئ المعادلة $\beta(b-a) = x$ ولما كان $b-a$ أولياً مع n نجد أن:

$$\alpha = -x\ (b-a)^{-1}\ ,\ \beta = x\ (b-a)^{-1}$$

وهذا يبين أنَّ المجموعة X مولدة بضعف للزمرة $\mathbb{Z}_n$، مما سبق نجد أنَّ المجموعة X تشكل أساساً ضعيفاً ومجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_n$.

4- $(\Leftarrow)$. لنفرض أنَّ المجموعة $X = \{a,b,c\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_n$، عندئذ حسب المبرهنة 2.7 نجد أنَّ $\langle a,b,c\rangle_w = \langle b-a,c-a\rangle$، ومنه نجد أنَّ $\mathbb{Z}_n = \langle a,b,c\rangle_w$، لنفرض جدلاً أنَّ $\gcd(b-a,c-a)$ أولي مع n، $b-c$ يقسم a بالتالي يوجد عنصر $\alpha \in \mathbf{Z}$ بحيث إنَّ $a = \alpha(b-c)$ ومنه يكون $a \in \langle b,c\rangle_w = \langle b-c\rangle$ وهذا يناقض كون المجموعة $X = \{a,b,c\}$ هي S–مستقلة بضعف ومنه الفرض الجدلي خاطئ و $b-c$ لا يقسم a، وبالمثل نجد أنَّ الأعداد b,c لا تقبل القسمة على الأعداد $c-a,b-a$ على الترتيب.

$(\Rightarrow)$. لما كان $\gcd(b-a,c-a)$ أوليا مع n ، فإنَّ المجموعة $\{b-a,c-a\}$ تولد الزمرة $\mathbb{Z}_n$، عندئذ حسب المبرهنة 2.7 نجد أنَّ:

$$\mathbb{Z}_n = \langle a,b,c \rangle_w = \langle b-a, c-a \rangle$$

لنفرض جدلاً أنَّ المجموعة $X = \{a,b,c\}$ ليست S–مستقلة بضعف ولنفرض أنَّ $a \in \langle b,c \rangle_w = \langle b-c \rangle$ ومنه يوجد $\alpha \in \mathbf{Z}$ بحيث إنَّ $a = \alpha(b-c)$ وهذا يناقض كون $b-c$ لا يقسم a ومنه الفرض الجدلي خاطئ والمجموعة $X = \{a,b,c\}$ هي S–مستقلة بضعف، مما سبق نجد أنَّ المجموعة $X = \{a,b,c\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_n$.

5- لنفرض أنَّ $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$ عندئذٍ توجد مجموعة $Y \subseteq \mathbb{Z}_n$ مستقلة عظمى قدرتها تساوي tوبالتالي إنَّ المجموعة $Y \cup \{0\}$ مستقلة بضعف عظمى حسب المبرهنة 3.3 ونلاحظ أنَّ قدرتها تساوي $t+1$.

مبرهنة. 4.9.

لتكن $\left(\mathbb{Z}_p, +\right)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس p ، ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية من الزمرة $\mathbb{Z}_p$ تحقق أنَّ $0 \notin X$ ، عندئذٍ إذا كان $Card X = 2$ فإنَّ المجموعة X مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_p$ وتشكل أساساً ضعيفاً لها، علاوة على ذلك لا يوجد مجموعات مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_p$ قدرتها أكبر تماماً من 2.

البرهان.

ليكن $a,b \in \mathbb{Z}_n^*$، لما كان $b-a$ أولياً مع p ، عندئذ وبالاعتماد على المبرهنة السابقة تكون المجموعة $X = \{a,b\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_p$ وتشكل أساساً ضعيفاً لها.
لتكن Y مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_p$ عندئذٍ $0 \notin Y$ ولنفرض جدلاً أنَّ $Card Y > 2$، عندئذٍ أياً كان $a,b \in Y$ فإنَّ $\langle a,b \rangle_w = \mathbb{Z}_p$ ومنه فإنَّ المجموعة Y تحوي مجموعة جزئية فعلية وتولد بضعف الزمرة $\mathbb{Z}_p$، وهذا يناقض كونها مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_p$، وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ أي إنَّ $Card Y = 2$.

المراجع العلمية:

[1] – Hamza, H., AL- Khouja, E., and AL -Taybani, A., " weak Linear Independence of vector Spaces ", journal of mathematics and statistical science,vol. 6, 157-181, (2020).

[2] – Michal, H. and Pavel, R., " Characterization of Abelian Group With Minimal generating Set " Quast. Math. J. 38(1), pp. 103 – 120, (2015).

[3] –Pavel, R., " Abelian Groups with a Minimal Generating Set " Quast. Math. J. 33(2), pp. 147 – 159, (2010).

[4] – Halbeisen, L., Hamilton, M. and Pavel, R., " Minimal Generating Sets of groups, rings and fields " Quast. Math. J. 30(3), pp. 355 – 363. (2007),

[5]- Anderson, D.D., and Robeson, J., "Bases For Modules," Expositiones Mathematicae vol. 22, pp. 283-296, 2004.

[6]- Rotman, J. J., An Introduction to the Theory of Groups, 4th ed., Springer- Verlag , New York, 1995.

[7]- Burris, S., and Sankappanavar, H. P., A Course in Universal Algebra, Graduate Texts in Mathematics, vol. 78, Springer-Verlag New York Inc, 1981.

[8]- Hungerford, T. W., Algebra , Springer-Verlag New York Inc., 1974.

[9]- Fuchs, L., Infinite Abelian Groups, Vol. I, Pure and Applied Mathematics, Vol. 36, Academic Press, New York, 1970.

[10] – Gratzer, G.," Universal Algebra " D. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, (1968).

[11] – Kurosh, A.G.," The Theory of Group " AMS Chelsea Publishing, Providence, (1960).