مجلة جامعة حمص

سلسلة العلوم الأساسية

مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 48 . العدد 13

1448 هـ - 2026 م

الأستاذ الدكتور طارق حسام الدين رئيس جامعة حمص **المدير المسؤول عن المجلة**

أ. د. وليد حمادة	**رئيس تحرير مجلة جامعة حمص للعلوم الإنسانية**
د.نعيمة عجيب	**رئيس تحرير مجلة جامعة حمص للعلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية**

د.محمد فراس رمضان	عضو هيئة التحرير
د. مضر سعود	عضو هيئة التحرير
د. ممدوح عبارة	عضو هيئة التحرير
د. موفق تلاوي	عضو هيئة التحرير
د. طلال رزوق	عضو هيئة التحرير
د. أحمد الجاعور	عضو هيئة التحرير
د. الياس خلف	عضو هيئة التحرير
د. روعة الفقس	عضو هيئة التحرير
د. محمد الجاسم	عضو هيئة التحرير
د. خليل الحسن	عضو هيئة التحرير
د. هيثم حسن	عضو هيئة التحرير
د. أحمد حاج موسى	عضو هيئة التحرير

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة حمص

سورية . حمص . جامعة حمص . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : 2138071 31 963 ++

. موقع الإنترنت : www.homs-univ.edu.sy

. البريد الالكتروني : journal.homs-univ.edu.sy

ISSN: 1022-467X

شروط النشر في مجلة جامعة حمص

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
- طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
- **اذا كان الباحث طالب دراسات عليا:**

يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقته على النشر في المجلة.

- **اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:**

يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.

- **اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :**

يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.

- **اذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :**

يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.

- **يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):**

عنوان البحث . . ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1- مقدمة

2- هدف البحث

3- مواد وطرق البحث

4- النتائج ومناقشتها .

5- الاستنتاجات والتوصيات .

6- المراجع.

- **يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسـبة لكليات (الآداب – الاقتصـاد– التربية – الحقوق – السياحة – التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):**
- عنوان البحث . . ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1. مقدمة.
2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
3. أهداف البحث و أسئلته.
4. فرضيات البحث و حدوده.
5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
7. منهج البحث و إجراءاته.
8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
9. نتائج البحث.
10. مقترحات البحث إن وجدت.
11. قائمة المصادر والمراجع.

7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:

أ- قياس الورق 17.5×25 B5.

ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 – يمين 2.5- يسار 2.5 سم

ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8

ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20

ـ كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي ـ العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.

ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.

8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.

9- تقديم أي بحث للنشـر في المجلة يدل ضـمناً على عدم نشـره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.

10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة ـ الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة ـ سنة النشر ـ وتتبعها معترضة (–) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة ـ دار النشر وتتبعها فاصلة ـ الطبعة (ثانية . ثالثة) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة.

وفيما يلي مثال على ذلك:

–MAVRODEANUS, R1986– **Flame Spectroscopy**. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

ـــ بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة ـــ المجلد والعدد (كتابة مختزلة) وبعدها فاصلة ـــ أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة.

مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases **Clinical Psychiatry News** , Vol. 4. 20 – 60

ج. إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد بالبنود (أ و ب) ويكتب في نهاية المراجع العربية: (المراجع In Arabic)

رسوم النشر في مجلة جامعة حمص

1. **دفع رسم نشر (600) ل.س ستمئة ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.**
2. **دفع رسم نشر (2000) ل.س الفا ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .**
3. **دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .**
4. **دفع مبلغ (150) ل.س مئة وخمسون ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.**

المحتوى

اسم البحث	اسم الباحث	الصفحة
حلول تحليلية لمعادلة فريدمان الأولى في نموذج كون مادي فقط وتطبيقاتها على العمر والمصير الكوني	سعادة جرجس ديوب د. جبور نوفل جبور د. جهاد كامل ملحم	42-11
وجود الحل ووحدانيته لمعادلة بواسون على منطقة متعددة الوجوه بطريقة بيرون	سوزان مفيد السماعيل أ.د. محمد عامر د. محمد شراباتي	70-43
دراسة المركبات الكيميائية لمستخلصات أوراق وأزهار نبات لسان الجمل *Silybum marianum* المنتشر في سوريا	زينب طوبال د. حسن وسوف د. يوسف زريق	102-71
دراسة جبرية حول جبورB	محمد محمود الحايك د. سوسن السطايحي د. نور رضوان	126-103
دراسة تفصيلية لمتراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم العامة مع معادلات ماكسويل وقوانين الانحفاظ الميكانيكية في الإحداثيات المنحنية ضمن الفضاء ^{3} ،	ولاء عادل العلي أ.د. منتجب الحسن د. رقية رضوان	143-127

حلول تحليلية لمعادلة فريدمان الأولى في نموذج كون مادي فقط وتطبيقاتها على العمر والمصير الكوني

د. جبُور نوفل جبُور [1]
د. جهاد كامل ملحم [2]
سعادة جرجس ديوب[3]

ملخص

يقدّم هذا البحث دراسة تحليلية وعددية لمعادلة فريدمان الأولى في نموذج مبسط يعتمد على كون مادي فقط دون إشعاع أو طاقة مظلمة. بالاستناد إلى الصياغة الكلاسيكية لفريدمان ولوميتر، يتم تحليل أثر معاملات الكثافة على تطور عامل القياس، وشكل الكون، وعمره، ومصيره المستقبلي.

تُظهر الحلول التحليلية أن الكون يبدأ من حالة تفرد عند a=0، ويستمر في التمدد إلى ما لا نهاية عندما تكون كثافة المادة أقل من الكثافة الحرجة. كما تشير الحسابات العددية إلى أن عمر الكون في هذا النموذج يبلغ نحو 10.38 مليار سنة، وهي قيمة أقل من العمر الرصدي المعتمد (13.8 مليار سنة وفق أرصاد Planck 2018) ، وذلك بسبب إهمال مساهمة الطاقة المظلمة والإشعاع.

يركّز هذا العمل على المستقبل الكوني، ويقدّم معالجة تعليمية مبسطة للحلول التحليلية، مع جداول ومنحنيات توضّح اعتماد الزمن على عامل المقياس ومعاملات الكثافة. وتُعد هذه الدراسة خطوة تمهيدية لفهم تأثير كل مركبة كونية على مصير الكون ضمن نماذج أكثر شمولًا.

كلمات مفتاحية: معادلات أينشتاين في النسبية العامة، معادلات فريدمان، شكل الكون، تضخم الكون، إنحناء الكون، عمر الكون

([1]) أستاذ في قسم الفيزياء – كلية العلوم– جامعة اللاذقية – اللاذقية – سورية.
([2]) أستاذ في قسم الفيزياء – كلية العلوم – جامعة اللاذقية – اللاذقية – سورية.
([3]) طالب دراسات عليا (دكتوراه) – اختصاص فيزياء إشعاعية – قسم الفيزياء – كلية العلوم – جامعة اللاذقية – اللاذقية – سورية.

Analytical solutions to the first Friedmann equation in a matter-only universe model and their applications to the cosmic age and fate.

Dr. Jabbour Noufal Jabbour[4]
Dr. Jehad Kamel Mulhem[5]
Saadeh Jerjose Daiyoub[6]

ABSTRACT

This research presents analytical and numerical solutions to the first Friedmann equation within a simplified cosmological model that assumes a matter-only universe, neglecting radiation and dark energy. Building on the classical formulations of Friedmann and Lemaître, the work examines how density parameters influence the evolution of the scale factor, the geometry of the universe, its age, and its future behavior.

The analytical solutions show that the universe originates from a singular state at a=0 and expands indefinitely when the matter density is below the critical value. Numerical calculations yield an age of approximately 10.38 billion years, lower than the observational estimate of 13.8 billion years from Planck 2018, due to the omission of dark-energy and radiation contributions.

This study provides an accessible educational treatment of analytical solutions, supported by tables and plots illustrating the dependence of cosmic time on the scale factor, offering a foundation for more comprehensive cosmological models.

([4]) Professor, Physics Department, Faculty of Science, Lattakia University, Lattakia, Syria.
([5]) Professor, Physics Department, Faculty of Science, Lattakia University, Lattakia, Syria.
([6]) Postgraduate Student, Radiation Physics, Department of Physics, Faculty of Science, Lattakia University, Lattakia, Syria.

Keywords: Einstein's equations of general relativity, Friedmann equations, shape of the universe, inflation of the universe, curvature of the universe, age of the universe

1- مقدمة:

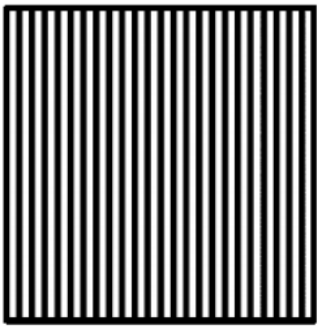
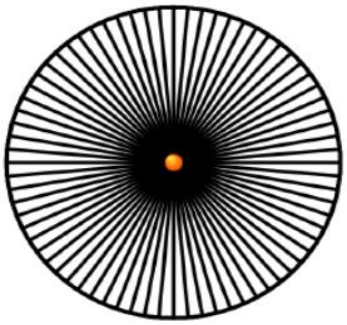
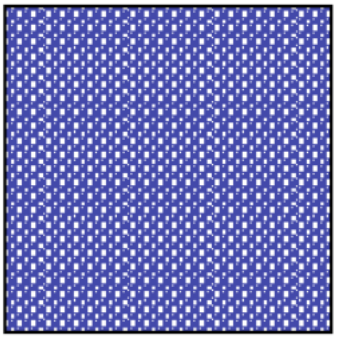
ما هي معادلات فريدمان؟

تُعرف معادلات فريدمان (أو معادلات فريدمان–لوميتر–روبرتسون–ووكر) بأنها الصياغة الكونية لمعادلات أينشتاين في النسبية العامة، وذلك عندما يُفترض أن الكون متجانس ومتساوي المناحي على المقاييس الكبيرة [1، 2]. صِيغت هذه المعادلات لأول مرة من قبل الفيزيائي الروسي ألكسندر فريدمان عام 1922 [3]، ثم طورها بشكل مستقل الفيزيائي البلجيكي جورج لوميتر عام 1927 [4]. وهي تصف تطور عامل المقياس الكوني (Scale Factor) بدلالة الزمن، معتمدة على محتوى الكون من المادة والإشعاع والطاقة المظلمة، وكذلك على هندسته (مسطح، مغلق أو مفتوح).[6]

تكمن الأهمية الجوهرية لهذه المعادلات في قدرتها على وصف تمدد الكون. فباستخدام قانون هابل التجريبي، الذي ينص على أن المجرات تبتعد عنا بسرعة تتناسب مع بعدها [7]، تتنبأ المعادلات بأن الكون كان أصغر حجماً وأعلى كثافة في الماضي، مما أدى إلى نشوء نظرية الانفجار العظيم (Big Bang).

وقد تم تأكيد هذا التمدد من خلال العديد من الأرصاد، أبرزها إشعاع الخلفية الكونية الميكروي (CMB) [8]، والذي يُعتبر "الصورة" الحرارية للكون عندما كان عمره 380,000 سنة فقط. على الرغم من النجاحات الهائلة لنموذجΛCDM ، تبقى معادلات فريدمان الإطار الأساسي لفهم تاريخ الكون وتطوره [5].

أنماط التجانس وتساوي المناحي موضحة في الشكل (1). تمثل هذه الأنماط الخصائص الهندسية الأساسية للكون على المقاييس الكبيرة، وهي الافتراضات الرئيسية التي تقوم عليها معادلات فريدمان.

		
Homogenous but not isotropic **متجانس لكن غير متساوي المناحي**	**Isotropic at the center but not Homogenous** **متساوي المناحي في المركز** **لكن غير متجانس**	**Homogenous and isotropic** **متجانس ومتساوي المناحي**

شكل (1): يوضح مفهوم التجانس وتساوي المناحي.

1-2- معادلات فريدمان كلاسيكياً (انطلاقاً من مفاهيم نيوتن):

تكتب معادلات فريدمان الثلاثة، انطلاقاً من مفاهيم ميكانيك نيوتن على الشكل:

المعادلة الأولى لفريدمان	$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}$
المعادلة الثانية لفريدمان	$\frac{a''}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho$
معادلة مائع كوني لفريدمان	$\frac{d\rho}{dt} + 3H\rho = 0$

حيث ρ يرمز لكثافة مادة الكون، G يرمز لثابت الجاذبية، و K يرمز لانحناء الكون. ونرمز لمعامل أو لثابت هابل بـ H، بينما نرمز للعامل السلمي بـ a ولمشتقه بـ a''.

1-3- معادلات فريدمان النسبية:

إن المعادلات النسبية الثلاث لفريدمان هي:

المعادلة الأولى لفريدمان	$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K.c}{a^2}$
المعادلة الثانية لفريدمان	$\frac{a''}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3\frac{P}{c^2}\right)$
معادلة مائع كوني لفريدمان	$\frac{d\rho}{dt} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0$

تشبه هذه المعادلات نظيراتها الكلاسيكية، إلا أنها تأخذ في الاعتبار طبيعة الكتلة–الطاقة في النسبية العامة، حيث تختلف الكثافات العطالية والثقالية الفعالة وغير الفعالة بحسب الحالة الفيزيائية. وتُعد حالة المائع الكامل الحالة التي يمكن فيها تحديد هذه الكثافات بدقة. وبافتراض أن الكون مملوء بمائع متجانس يضم المادة والإشعاع والمجرات، وأن درجة الحرارة والكثافة والضغط موحدة في كل مكان، يمكن استخدام المعادلات الكلاسيكية بعد إجراء الاستبدالات المناسبة.

2- هدف البحث:

تهدف هذه الدراسة إلى تحليل معادلة فريدمان الأولى وتقديم حلول تحليلية وعددية لها في حالات خاصة تعتمد على نموذج كوني مبسّط مكوّن من المادة فقط، وذلك بهدف استكشاف تأثير معاملات الكثافة على تطور عامل المقياس وشكل الكون وعمره ومصيره المستقبلي، سواء من حيث التمدد غير المحدود أو الانهيار نحو حالة الانسحاق الكبير (الانكماش الى نقطة).

3- طرائق البحث ومواده:

يرتكز هذا العمل على منهج تحليلي وعددي لدراسة معادلة فريدمان الأولى ضمن نموذج كوني مبسّط يعتمد على المادة فقط، مع استخدام المعاملات الكونية القياسية وافتراض التجانس وتماثل المناحي. وقد جرى تحليل الحلول رياضيًا، ثم استكمالها عددياً عبر جداول ومنحنيات توضّح اعتماد الزمن على عامل المقياس ومعاملات الكثافة.

3-1- الصياغة البارامترية لمعادلة فريدمان الأولى:

أدخلت في علم الكون مفاهيم أساسية مثل **تمدد الكون** و**العامل السلمي**، مما يسمح بكتابة معادلة فريدمان الأولى التي تصف تغير عامل المقياس $a(t)$ بدلالة الزمن وبحسب محتوى الكون من المادة والإشعاع والطاقة المظلمة. كما تُستخدم العلاقات التي تربط الكثافة بتطور الزمن ومحتوى الكون. بوضع هذه المفاهيم معًا، تُكتب معادلة فريدمان–لوميتر الأولى على الشكل:

$$H^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \qquad (1)$$

حيث ρ يرمز للكثافة لمختلف المركبات التي يمكن أن تكون المركبة المتعلقة بالمادة أو المتعلقة بالإشعاع بشكل رئيسي. الحد $\frac{kc^2}{a^2}$ يمثل انحناء الزمكان، حيث $(k = +1, 0, -1)$، بحسب انحناء الزمكان بجهة أو بجهة أخرى أو أن يكون مسطح. الحد $\frac{\Lambda c^2}{3}$ يمثل الثابت الكوني.

تُعطى العلاقات التي تصف تطور كثافة المادة والإشعاع بالعلاقات [9–16]:

$$\rho_m = \rho_m^0\, a^{-3} \quad , \quad \rho_r = \rho_r^0\, a^{-4}$$

واصطلاحاً، نفرض أن العامل السلمي اليوم أي في اللحظة الحالية (ليس في بداية الزمن ولكن في اللحظة الحالية) أي من أجل $t = 0$ يساوي الواحد $a = 1$.

سنهتم هنا بحل المعادلة التفاضلية السابقة في بعض الحالات الخاصة، حيث ليس لتلك المعادلة حل عام. ومن أجل ذلك سنعتمد المصطلحات الآتية المعتمدة عادة في علم الكون.

سنعرف أولاً بما يُدعى بالكثافة الحرجة (critic density) والتي تُعطى بالعلاقة:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c$$

حيث H_0 ثابت هابل الحالي (في تلك اللحظة). والتفسير الفيزيائي لتلك العلاقة هو أن الكثافة الحرجة لكون هي الكثافة لكون مسطح (دون انحناء $k = 0$) ودون ثابت كوسمولوجي أي $\Lambda = 0$. وتبلغ قيمتها تقريباً: $\rho_c \sim 10^{-26} kg.m^{-3}$ أو $\rho_c \sim 6\, m_p m^{-3}$، حيث m_p ترمز لكتلة البروتون، أي ما يعادل 6 بروتونات بالمتر المكعب. بقسمة المعادلة (1) على H_0^2 نجد أن:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_c} - \frac{3kc^2}{8\pi G\rho_c}a^{-2} + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho_c} \qquad (2)$$

ونكتب الكثافة على شكل مجموع كثافة المادة وكثافة الإشعاع: $\rho = \rho_m + \rho_r$. والعلاقة (2) تصبح على النحو الآتي:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_m}{\rho_c} + \frac{\rho_r}{\rho_c} - \frac{3kc^2}{8\pi G\rho_c}a^{-2} + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho_c} \qquad (3)$$

وهنا نعتمد اصطلاحات خاصة حيث نرمز لكل من المقادير بـ:

$$\frac{\rho_m}{\rho_c} \equiv \Omega_m \ , \ \frac{\rho_r}{\rho_c} \equiv \Omega_r \ , \ \Omega_k = -\frac{3kc^2}{8\pi G\rho_c}a^{-2} \ , \ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G\rho_c}$$

وهـذه المعـاملات الأربعـة يُطلق عليهـا اسـم "**معـاملات كوسـمولوجيـة– Cosmological parameters**" تصـف مسـاهمة كل مركبة من المركبات: مادة، إشـعاع، انحناء، والثابت الكوسمولوجي المحتواة في الكون بالنسبة للكثافة الحرجة. وبما أن:

$$\rho_m = \rho_m^0 a^{-3}$$

فنكتب:

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{\rho_m^0}{\rho_c} a^{-3} \ , \ \Omega_m^0 \equiv \frac{\rho_m^0}{\rho_c}$$

ونقوم بنفس العملية من أجل بقية المعاملات فنجد:

$$\Omega_m = \Omega_m^0 a^{-3} \ , \ \Omega_r = \Omega_r^0 a^{-4} \ , \ \Omega_k = \Omega_k^0 a^{-2}$$

وبالتعويض في المعادلة (3) نحصل على:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m^0 a^{-3} + \Omega_r^0 a^{-4} + \Omega_k^0 a^{-2} + \Omega_\Lambda \qquad (4)$$

الملاحظة الأولى أن هذه المقادير (ليس لها واحدة). وهذه المعادلة تُظهر المركبات الحالية للكون. إن المقادير: Ω_m^0، Ω_r^0، Ω_k^0، المركبات الحالية للمادة، للإشـعاع، وللانحناء على التوالي. بينما Ω_Λ تمثل مركبة الثابت الكوني. ونريد الآن حل هذه المعادلة التفاضـلية (الشـكل التفاضـلي لمعادلة فريدمان الأولى) في بعض الحالات الخاصة:

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m^0 a^{-3} + \Omega_r^0 a^{-4} + \Omega_k^0 a^{-2} + \Omega_\Lambda \qquad (5)$$

نسـتعرض هنا بعض الحالات الخاصـة التي يمكن فيها الحصـول على حلول تحليلية لمعادلة فريدمان الأولى.

3-2- حلول خاصة لمعادلة فريدمان الأولى:

تُكتب المعادلة السابقة على الشكل:

$$a' = \pm H_0 \{\Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_r^0 a^{-2} + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda a^2\}^{1/2} \qquad (6)$$

يتم فصل المتحولات للحصول على صيغة قابلة للتكامل، لتصبح المعادلة كمايلي:

$$\frac{da}{\sqrt{\{\Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_r^0 a^{-2} + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda a^2\}}} = \pm H_0 dt \qquad (7)$$

حيث قيم Ω ثوابت بينما المتحول هو a. في الحالة العامة ليس هناك معادلة تحليلية للمعادلة السابقة أي ليس هناك حل تحليلي ولكن يمكن حلها عددياً بمساعدة برنامج على الكومبيوتر، حيث يتم برمجة تلك المعادلة ومن ثم حلها. والذي يهمنا هو إيجاد وضع أو أوضاع فيزيائية مهمة حيث يمكننا حل تلك المعادلة التفاضلية. ونركّز فيما يلي على معالجة رياضية للحالات التي تسمح بحلول تحليلية.

سنهتم بأوضاع حيث بعض قيم Ω تكون معدومة علماً أن هذه القيم غير مستقلة عن بعضها البعض. إذا أخذنا حدود المعادلة:

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m^0 a^{-3} + \Omega_r^0 a^{-4} + \Omega_k^0 a^{-2} + \Omega_\Lambda \qquad (5)$$

في اللحظة الحالية أي عند $t = 0$، فقيمة العامل السلمي $a = 1$ فيكون لدينا:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m^0 + \Omega_r^0 + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda \qquad (8)$$

وإن مجموع المركبات الكونية في اللحظة الحالية (شرط الاتزان الكوني):

$$\Omega_m^0 + \Omega_r^0 + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda = 1 \qquad (9)$$

وبالتعويض في المعادلة (7) ينتج:

$$\frac{da}{\sqrt{\Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_r^0 a^{-2} + (1 - \Omega_m^0 - \Omega_r^0 - \Omega_\Lambda) + \Omega_\Lambda a^2}} = \pm H_0 dt \qquad (10)$$

3-3-حل خاص لمعادلة فريدمان الأولى من أجل $(\Omega_r^0 = \Omega_\Lambda = 0)$:

الوضع الفيزيائي الأول الذي سنهتم به هو أن مساهمة الإشعاع معدومة وبالتالي الثابت الكوني معدوم، وهذا يوافق كون لا يوجد فيه إلا المادة. والمعادلة تصبح على الشكل:

$$\frac{da}{\sqrt{\Omega_m^0 a^{-1} + (1 - \Omega_m^0)}} = \pm H_0 dt \qquad (11)$$

وبإعادة ترتيب الحدود، يمكن كتابة المعادلة على الشكل:

$$\frac{da}{\sqrt{a^{-1} + \frac{1 - \Omega_m^0}{\Omega_m^0}}} = \pm H_0 \sqrt{\Omega_m^0}\, dt \qquad (12)$$

ونلجأ لتغيير المتحولات حيث سنرمز بـ b للمقدار:

$$b \equiv \frac{1 - \Omega_m^0}{\Omega_m^0}$$

ويسهّل هذا التغيير عملية التكامل لاحقاً.

4- النتائج ومناقشتها:

نستعرض في هذا القسم النتائج المستخلصة من الحلول التحليلية والعددية، مع مناقشة سلوك العامل السلمي والزمن الكوني.

4-1- من أجل القيم الموجبة لـ $b > 0$ أي أن $(\Omega_m^0 < 1)$:

وتمثل الحالة b>0 كونًا تكون فيه كثافة المادة أقل من الكثافة الحرجة. ومنه فإن:

$$\frac{da}{\sqrt{a^{-1}+b}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\, dt \qquad (13)$$

ولإجراء التكامل، نستخدم طريقة مناسبة تعتمد على تغيير المتحولات فمثلاً نضرب ونقسم الطرف الأيسر بـ $\sqrt{a}$ نكتب:

$$\frac{\sqrt{a}\, da}{\sqrt{1+ab}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\, dt \qquad (14)$$

ومن ثم نغير المتحولات بفرض أن: $ab = sinh^2 u$ بشرط أن يكون b موجب(وهذا التغيير شائع في الحلول التحليلية لمعادلات فريدمان) وإلا يجب القيام بشيء آخر. ومنه فإن:

$$ab = sinh^2 u \rightarrow a = \frac{1}{b}\, sinh^2 u \rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{b}} sinh\, u$$
$$\rightarrow da = \frac{2}{b}\sinh u \cosh u\, du$$

وبالتبديل في العلاقة (14) ينتج:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{b}}\sinh u \times \frac{2}{b}\, \sinh u \cosh u\, du}{\sqrt{1+sinh^2 u}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\, dt$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{b}}\sinh u \times \frac{2}{b}\, \sinh u \cosh u\, du}{\cosh u} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\, dt \qquad (15)$$

وبعد التبسيط نجد:

$$\frac{2}{b^{3/2}}\sinh^2 u du = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\, dt \qquad (16)$$

علماً أن:

$$\int sinh^2 u\, du = \frac{1}{4}\sinh 2u - \frac{u}{2}$$

وبالمكاملة نجد:

$$\int \frac{2}{b^{3/2}}\sinh^2 u du = \int \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\, dt \qquad (16')$$

$$\frac{1}{2b^{3/2}}[\sinh 2u - 2u] = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\,[t] \qquad (17)$$

ونأخذ حدود التكامل الموافقة لـــــ $t = 0$، أي الآن، وإلى قيمة أخرى هي t لا على التعيين. ومن أجل $t = 0$ فإن قيمة u الموافقة هي من أجل قيمة للعامل السلمي تساوي الواحد $a = 1$، أي أن:

$$t = 0 \to a = 1 \to ab = \sinh^2 u \to \sqrt{ab} = \sinh u \to \sqrt{b} = \sinh u$$
$$\to u = \operatorname{arc}\sinh\sqrt{b}$$
$$cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

ومن أجل قيمة لا على التعيين لـــــ a فإن قيمة $u = \operatorname{arc}\sinh\sqrt{ab}$، ومنه تصبح المعادلات كما يلي:

$$\frac{1}{2b^{3/2}}[\sinh 2u - 2u]_{\operatorname{arc}\sinh\sqrt{b}}^{\operatorname{arc}\sinh\sqrt{ab}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\,[t]_0^t \qquad (18)$$

ولكن $\sinh 2u = 2\sinh u\cosh u$ فيكون لدينا:

$$\frac{1}{b^{3/2}}[\sinh u\cosh u - u]_{\operatorname{arc}\sinh\sqrt{b}}^{\operatorname{arc}\sinh\sqrt{ab}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\,[t]_0^t \qquad (19)$$

وبما أن:

$$\sinh u = \sinh\left[\operatorname{arc}\sinh\sqrt{ab}\right] = \sqrt{ab}$$
$$\cosh u = \sqrt{1+\sinh^2 u} = \sqrt{1+ab}$$

وبعد التعويض بحدود التكامل في الطرف الأيسر للعلاقة (19) نجد:

$$\frac{1}{b^{3/2}}\left[\sqrt{ab}\sqrt{1+ab} - \operatorname{arc}\sinh\sqrt{ab} - \sqrt{b}\sqrt{1+b} + \operatorname{arc}\sinh\sqrt{b}\right]$$
$$= \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\,[t]_0^t$$
$$\pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\,[t]_0^t = \frac{1}{b^{\frac{3}{2}}}\left[\sqrt{ab}\sqrt{1+ab} - \operatorname{arc}\sinh\sqrt{ab} - \sqrt{b}\sqrt{1+b} + \operatorname{arc}\sinh\sqrt{b}\right] \quad (20)$$

وبتعويض $b \equiv \frac{1-\Omega_m^0}{\Omega_m^0}$ بقيمتها نجد:

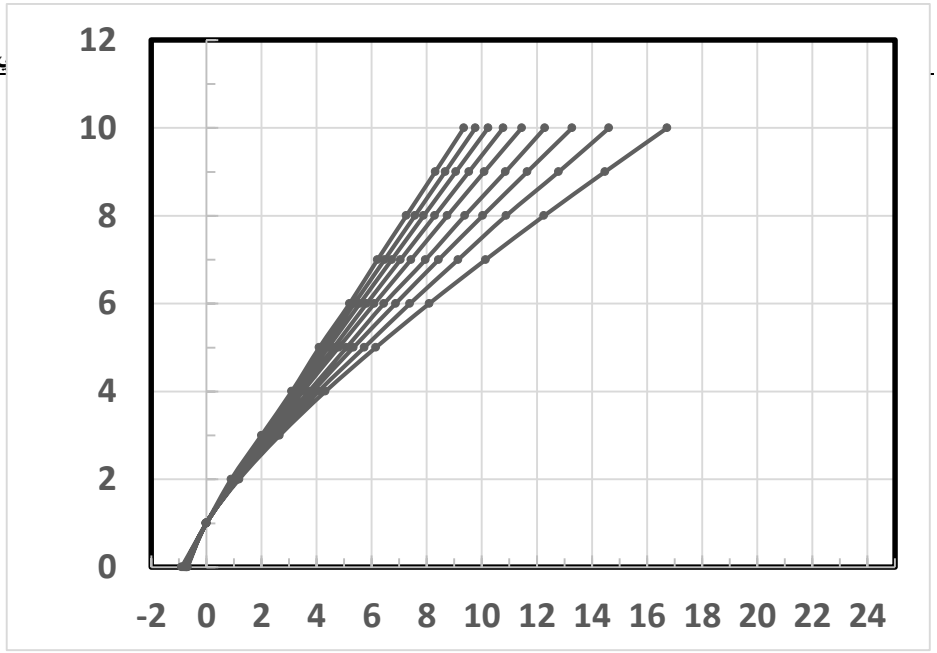
$$\pm H_0 t = \frac{\Omega_m^0}{(1-\Omega_m^0)^{\frac{3}{2}}}\left[\sqrt{ab}\sqrt{1+ab} - \operatorname{arc\,sinh}\sqrt{ab} - \sqrt{b}\sqrt{1+b} + \operatorname{arc\,sinh}\sqrt{b}\right] \quad (21)$$

وهذه العلاقة تعطينا علاقة الزمن بالعامل السـلمي: $t = f(a)$. وتم إعطاء عدة قيم لكل من العامل السلمي a والمقدار Ω_m^0، ومن ثم تم استنتاج القيم الموافقة للزمن، أو بالأحرى لـــــ $H_0 t$. تلك القيم معطاة في الجدول (1) والمنحنيات الموافقة على الشكل (2).

جدول (1): نرفق في هذا الجدول القيم المختلفة لكل من a، و $H_0\ t$ من أجل عدة قيم لـ Ω_m^0 تتراوح ما بين $\Omega_m^0 = 0,1$ و $\Omega_m^0 = 0,9$.

$\Omega_m^0 = 0,1$		$\Omega_m^0 = 0,2$		$\Omega_m^0 = 0,3$		$\Omega_m^0 = 0,4$		$\Omega_m^0 = 0,5$	
$H_0\ t$	a	$H_0\ t$	a	$H_0\ t$	a	$H_0\ t$	a	$H_0\ t$	a
−0,89	0	−0,85	0	-0.81	0	−0,78	0	−0,75	0
0,00	1	0,00	1	0,00	1	0,00	1	0,00	1
0,89	2	1,04	2	1,05	2	1,07	2	1,09	2
2,05	3	1,50	3	2,15	3	2,22	3	2,28	3
3,08	4	3,18	4	3,27	4	3,41	4	3,53	4
4,13	5	4,27	5	4,42	5	4,62	5	4,81	5
5,17	6	5,37	6	5,57	6	5,82	6	6,11	6
6,21	7	6,47	7	6,73	7	7,05	7	7,43	7
7,26	8	7,57	8	7,89	8	8,29	8	8,75	8
8,31	9	8,67	9	9,06	9	9,53	9	10,09	9
9,35	10	9,77	10	10,23	10	10,00	10	11,45	10

$\Omega_m^0 = 0,6$		$\Omega_m^0 = 0,7$		$\Omega_m^0 = 0,8$		$\Omega_m^0 = 0,9$	
$H_0\ t$	a	$H_0\ t$	a	$H_0\ t$	a	$H_0\ t$	a
-0,73	0	-0,71	0	-0,71	0	−0,68	0



$H_0 t$

0,00	1	0,00	1	0,00	1	0,00	1
1,13	2	1,14	2	0,48	2	1,19	2
2,37	3	2,45	3	2,59	3	2,66	3
3,72	4	3,86	4	4,07	4	4,32	4
5,09	5	5,34	5	5,73	5	6,15	5
6,45	6	6,87	6	7,39	6	8,09	6
7,96	7	8,43	7	9,14	7	10,14	7
9,38	8	10,03	8	10,88	8	12,26	8
10,86	9	11,65	9	12,79	9	14,47	9
12,29	10	13,28	10	14,62	10	16,73	10

شكل (2): يمثل تغير العامل السلمي a بتابعية المقدار $H_0 t$ أي بتابعية الزمن من أجل قيم مختلفة لـ Ω_m^0.

إن نقطة الانطلاق هي من أجل $t = 0$، فإن $a = 1$ حيث نجد منحنيات لها الشكل (2). حيث رسمنا المنحنيات من أجل زمن موجب. ويمكننا رؤية ماذا يكون لدينا من أجل زمن سالب $t < 0$. ونصادف فعلاً أن هذه المنحنيات ستمتد وستتجه نحو القيم الصغيرة للعامل السلمي a حتى

قيمة معدومة له $a = 0$. بتعبير آخر، فإنه يوجد قيمة للزمن حيث العامل السلمي معدوم. ومما سبق نرى أنه يوجد زمن معين نرمز له بـــــ t_0 حيث $a = 0$. وإذا عوضنا $t = t_0$ حيث $a = 0$ في العلاقة (21) نجد:

$$H_0 t_0 = \frac{\Omega_m^0}{(1-\Omega_m^0)^{3/2}}\left[\text{arc sinh}\sqrt{b} - \sqrt{b}\sqrt{1+b}\right] \qquad (22)$$

وباختيار قيمة لـ Ω_m^0 وتعويضها في العلاقة السابقة نستطيع حساب t_0، وهذا الزمن يأخذ قيمة سالبة $(-t_0)$ كما موضح في الشكل السابق، نُطلق عليها اسم "**عمر الكون**". وهذا النموذج للكون مع $(b > 0)$ يمتلك عمر منتهي كما هو مبين في الشكل السابق (الجزء السالب للزمن أي قيمة $H_0 t$). وإن هذا الذي يسميه علماء الكون بـــــ (**الانفجار العظيم – The big bang**) هي اللحظة البدائية (اللحظة الفريدة) التي من أجلها $(t = t_0)$.

إن هذه الأشكال هي من أجل القيم الموجبة للزمن $t > 0$، أي من أجل قيم الموجبة لـــ b وذلك لأن $\Omega_m^0 < 1$:

$$b \equiv \frac{1-\Omega_m^0}{\Omega_m^0}$$

أي أن كثافة المادة أقل من الكثافة الحرجة. وهكذا فإن التابع يستمر بأخذ القيم الكبيرة حتى اللانهاية عندما يتناهى الزمن إلى اللانهاية. وهذا النموذج هو يبدأ أو ينطلق من القيمة $a = 0$، ومن ثم يتمدد بشكل غير محدد أو غير معرف.

حساب "عمر الكون":

إذا أخذنا القيمة التالية لـ $H_0\ t = -0{,}7531$ [9–16]، وبما أن:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c$$

فيمكننا استنتاج أو حساب ρ_0 بأخذ القيمة الآتية لثابت التجاذب العام $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\left[N\left(\frac{m}{kg}\right)^2\right]$:

$$\rightarrow {H_0}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \rightarrow \rho_0 = \frac{3{H_0}^2}{8\pi G}$$

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \frac{3 \times (7 \times 10^1)^2}{8 \times 3{,}14 \times 6{,}67 \times 10^{-11}\left[N\left(\frac{m}{kg}\right)^2\right]}\left[\frac{km}{s.Mpc}\right]^2 = \frac{14700}{167.64}\frac{1}{\left[\left(\frac{kg.m}{s^2}\right)\left(\frac{m}{kg}\right)^2\right]}\left[\frac{km}{s.Mpc}\right]^2 =$$

$$= 87.69 \times 10^{-11}\left[\left(\frac{kg}{m^3}\right)\right] \times \left[\frac{10^3 m}{3{,}083 \times 10^{22}\, m}\right]^2 = 9{,}23 \times 10^{-38} \times 10^{+11}\left[\left(\frac{kg}{m^3}\right)\right]$$

$$= 9{,}23 \times 10^{-27}\left[\left(\frac{kg}{m^3}\right)\right] \approx 10^{-29}\left[\left(\frac{g}{cm^3}\right)\right]$$

وبما أن $\rho_m = \rho_m^0 a^{-3}$، فنكتب أن:

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{\rho_m^0}{\rho_c} a^{-3} \ , \ \Omega_m^0 \equiv \frac{\rho_m^0}{\rho_c}$$

ومن أجل $\Omega_m^0 \equiv \frac{\rho_m^0}{\rho_c} = 0{,}5$ فإن $H_0\, t = -0{,}7531$ فنجد أن:

$$H_0\, t = -0{,}7531 \rightarrow t = -\frac{0{,}7531}{H_0} = -\frac{0{,}7531}{2{,}3 \times 10^{-18}\, s^{-1}}$$

$$= -0.3274 \times 10^{18}\, s$$

$$\rightarrow t = -0.3274 \times 10^{+18}\, s = -\frac{0.3274 \times 10^{+18}}{365 \times 24 \times 60 \times 60}\, s$$

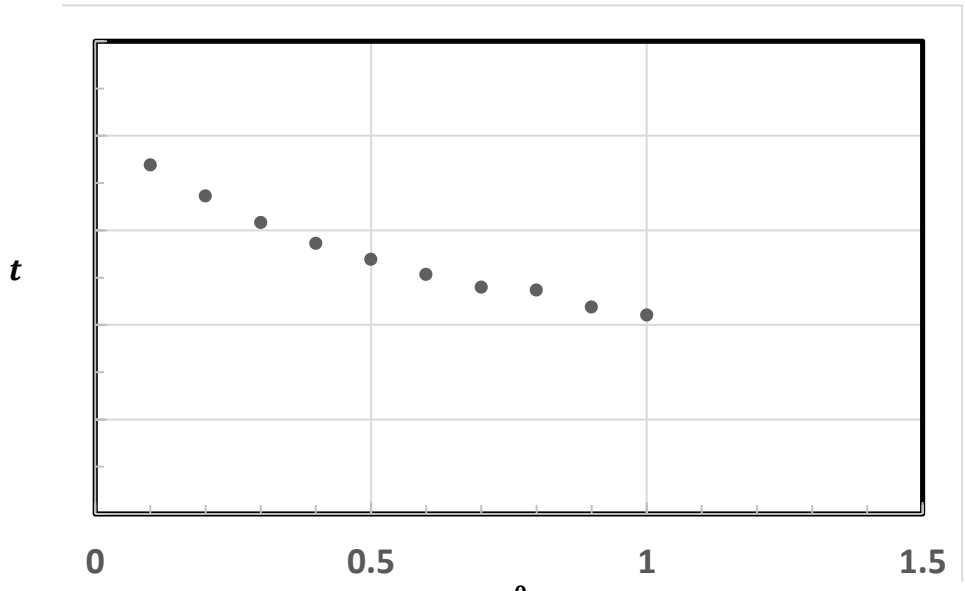
$$= -1.038e - 8 \times 10^{-18} s = -1{,}038 \times 10^{-8} \times 10^{+18} s$$

$$= -1{,}038 \times 10^{+10}\, years = 10{,}38 \times 10^{+9}\, yr$$

أي أن عمر الكون يساوي 10,38 مليار سنة. وتم حساب عمر الكون من أجل قيم مختلفة لـــ Ω_m^0، حيث الجدول (3) يبين مختلف القيم مع القيم الموافقة لـ $H_0\, t$.

جدول (2): نُعطي في الجدول القيم المختلفة Ω_m^0 مع القيم الموافقة لعمر الكون،

Ω_m^0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1
$H_0\, t$	−0,90	−0,85	−0,81	−0,78	−0,75	−0,73	−0,71	−0,71	−0,68	−0,6
t $\times 10^{+9}\, years$	12,38	11,72	11,16	10,72	10,38	10,06	9,79	9,73	9,37	9,20



وذلك من أجل $H_0 = 2,3 \times 10^{-18}\ s^{-1}$.

شكل (3): يمثل تغير عمر الكون t بتابعية الكثافة Ω_m^0.

4-2- من أجل القيم السالبة لـ $b < 0$ أي أن $(\Omega_m^0 > 1)$:

يمكننا الآن القيام بالحسابات السابقة من أجل القيم السالبة لـ b، وذلك من أجل $\Omega_m^0 > 1$، ونقول في هذه الحالة أن الكون هو في حالة (ما فوق الحرجة – over critical)، أي كثافته أكبر من الكثافة الحرجة. في الحالة الســـابقة ندعوه بالحالة (ما تحت الحرجة – under critical). إن الذي يتغير في تلك الحسابات هو الآتي:

$$ab = -sin^2u \ \rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{-b}}\sin u \rightarrow da = -\frac{2}{b}\sin u \cos u \ du$$

$$sin^2u + cos^2u = 1 \rightarrow -ab + cos^2u = 1 \rightarrow 1 + ab = cos^2u \rightarrow \sqrt{1+ab} = \cos u$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\frac{\sqrt{a}da}{\sqrt{1+ab}} = -\frac{2}{b}\sin u\cos u\ du \times \frac{1}{\sqrt{-b}}\sin u \times \frac{1}{\cos u} = \frac{2}{(-b)^{\frac{3}{2}}} sin^2u\ du$$

$$\frac{\sqrt{a}da}{\sqrt{1+ab}} = -\frac{2}{b}\sin u\cos u\ du \times \frac{1}{\sqrt{-b}}\sin u \times \frac{1}{\cos u} = \frac{2}{(-b)^{\frac{3}{2}}} sin^2u\ du$$

$$\frac{2}{(-b)^{\frac{3}{2}}} sin^2u\ du = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\ dt$$

علماً أن:

$$\int sin^2u\ du = \frac{u}{2} - \frac{1}{4}\sin 2u$$

وبالمكاملة نجد:

$$\frac{2}{(-b)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{u}{2} - \frac{1}{4}\sin 2u\right] = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\ [t]$$

ونأخذ حدود التكامل الموافقة لـــــ $t = 0$، أي الآن، وإلى قيمة أخرى هي t لا على التعيين. ومن أجل $t = 0$ فإن قيمة u الموافقة هي من أجل قيمة للعامل السلمي تساوي الواحد $a = 1$، أي أن:

$$t = 0 \to a = 1 \to ab = -\sin^2 u \to \sqrt{-ab} = \sin u \to \sqrt{-b} = \sin u \to u = \arcsin\sqrt{-b}$$

ومن أجل قيمة لا على التعيين لـ a فإن قيمة $u = \arcsin\sqrt{-ab}$، ومنه فحدود التكامل هي:

$$\frac{1}{2(-b)^{\frac{3}{2}}}[2u - \sin 2u]_{\arcsin\sqrt{-b}}^{\arcsin\sqrt{-ab}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\ [t]_0^t$$

ولكن $\sin 2u = 2\sin u\cos u$ فيكون لدينا:

$$\frac{1}{2(-b)^{\frac{3}{2}}}[2u - 2\sin u\cos u]_{\arcsin\sqrt{-b}}^{\arcsin\sqrt{-ab}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\ [t]_0^t$$

$$\frac{1}{(-b)^{\frac{3}{2}}}[u - \sin u\cos u]_{\arcsin\sqrt{-b}}^{\arcsin\sqrt{-ab}} = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\ [t]_0^t$$

$$\frac{1}{(-b)^{\frac{3}{2}}}\left[\arcsin\sqrt{-ab}-\sin\arcsin\sqrt{-ab}\cos\arcsin\sqrt{-ab}-\arcsin\sqrt{-b}\right.$$
$$\left.+\sin\arcsin\sqrt{-b}\cos arc\ sin\ \sqrt{-b}\right]=\pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}\,[t]_0^t$$

وبما أن:

$$\sin u=\sin\left[\arcsin\sqrt{-ab}\right]=\sqrt{-ab}$$
$$\sin^2 u+\cos^2 u=1\rightarrow\cos u=\sqrt{1-\sin^2 u}=\sqrt{1+ab}$$

وبعد التعويض بحدود التكامل في الطرف الأيسر للعلاقة السابقة، وبتعويض $b\equiv\frac{1-\Omega_m^0}{\Omega_m^0}$ بقيمتها نجد:

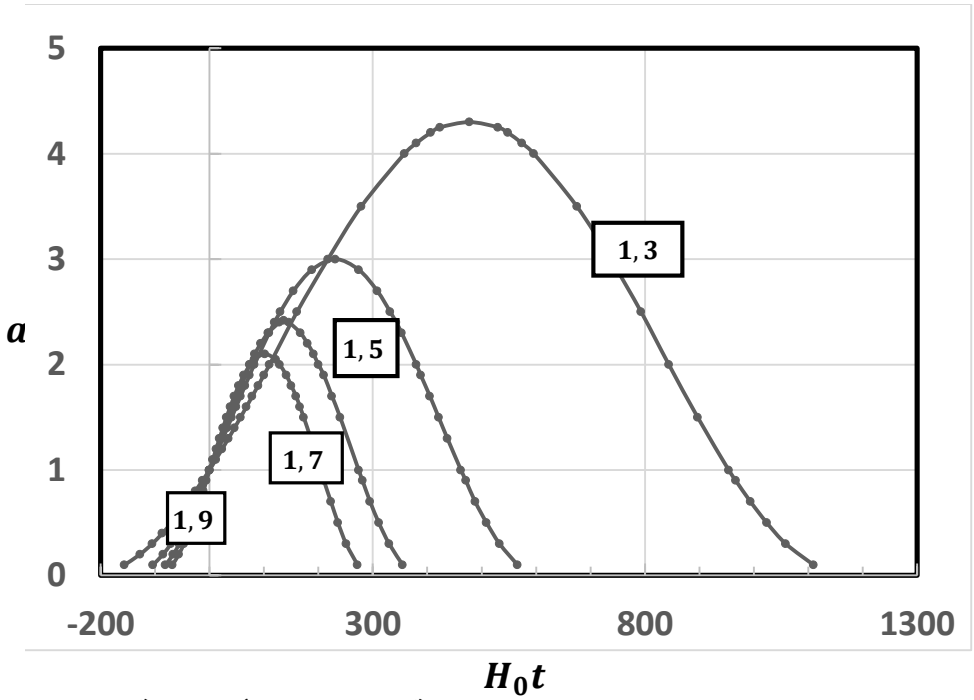
$$\frac{\Omega_m^0}{(\Omega_m^0-1)^{3/2}}\left[\arcsin\sqrt{-ab}\right.$$
$$-\sin\arcsin\sqrt{-ab}\cos\arcsin\sqrt{-ab}-\arcsin\sqrt{-b}$$
$$\left.+\sin\arcsin\sqrt{-b}\cos\arcsin\ \sqrt{-b}\right]=\pm H_0[t]_0^t$$
$$\frac{\Omega_m^0}{(\Omega_m^0-1)^{\frac{3}{2}}}\left[\arcsin\sqrt{-ab}-\arcsin\sqrt{-b}-\sqrt{-ab}\sqrt{1+ab}+\sqrt{-b}\sqrt{1+b}\right]$$
$$=\pm H_0[t]_0^t$$
$$\frac{\Omega_m^0}{(\Omega_m^0-1)^{\frac{3}{2}}}\left[\arcsin\sqrt{-ab}-\arcsin\sqrt{-b}-\sqrt{-ab}\sqrt{1+ab}+\sqrt{-b}\sqrt{1+b}\right]$$
$$=\pm H_0[t]_0^t$$
$$H_0\,t=\frac{\Omega_m^0}{(\Omega_m^0-1)^{3/2}}\left[\left[\arcsin\sqrt{-ab}-\arcsin\sqrt{-b}-\sqrt{-ab}\sqrt{1+ab}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sqrt{-b}\sqrt{1+b}\right]\right]$$

وتم حساب قيم H_0t من أجل قيم مختلفة لـــــــ Ω_m^0، وهذه القيم معطاة في الجدول (3)، والتمثيل البياني لتلك القيم معطى في الشكل (4).

جدول (3): ادرج في هذا الجدول القيم المختلفة لكل من a، و H_0t من أجل عدة قيم لـ Ω_m^0 تتراوح ما بين $\Omega_m^0 = 1,10$ و $\Omega_m^0 = 1,90$.

$\Omega_m^0 \rightarrow$	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
$a \downarrow$	H_0t	H_0t	H_0t	H_0t	H_0t
0,10	−407,34	−156,34	−104,07	−80,96	−68,18
0,20	−335,26	−127,86	−85,54	−66,77	−56,43
0,30	−275,49	−105,45	−71,04	−55,61	−47,16
0,40	−224,59	−86,75	−58,53	−45,99	−38,01
0,50	−179,40	−69,80	−47,35	−37,24	−31,82
0,60	−138,66	−54,26	−36,99	−29,14	−24,98
0,70	−110,66	−39,80	−26,45	−21,49	−18,52
0,80	−65,90	−26,12	−17,08	−14,12	−11,09
0,90	−31,77	−13,13	−9,05	−6,99	−6,08
1,00	0.02	−0,08	−0,41	−0,02	−0,03
1,10	31,00	11,56	8,03		6,04
1,20	60,00	23,25	16,35		12,10
1,30	90,00	34,70	24,55		18,28
1,40	115,00	45,95	32,67		24,59
1,50	141,49	56,95	40,77		31,15
1,60	167,00	67,81	48,87		38,06
1,70	192,00	78,53	53,07		45,45
1,80	217,00	89,17	65,22		53,58
1,90	240,80	99,75	73,62		62,91
1,95	252,50				
2,00	264,20	110,25	82,14	73,55	74,58
2,05					82,43
2,10				83,09	101,72
2,20				94,09	
2,30	332,36		109,40	107,47	
2,40				128,37	
2,42				136,74	
2,50	375,74	160,72	129,92		
2,70			154,23		
2,90			188,24		
3,00	479,53	217,52	231,22		
3,50	578,30	278,77			
4,00	673,43	358,16			
4,10		379,76			
4,20		406,44			
4,25		423,58			
4,30		477,38			
4,59	766,29				

5,00	857,56				
5,50	948,27				
6,00	1039,00				
6,50	1130,84				
7,00	1211,89				
7,50	1310,61				
8,00	1420,93				
8,50	1526,80				
9,00	1640,76				
9,50	1766,69				
10,00	1912,64				
10,30	2017,15				
10,60	2164,39				
10,80	2263,19				
10,90	2347,34				



شكل (4): يمثل تغير العامل السلمي a بتابعية المقدار H_0t أي بتابعية الزمن من أجل قيم مختلفة لـ Ω_m^0 (تطور العامل السلمي في حالة الكون فوق الحرِج)

من أجل قيمة معدومة للعامل السـلمي يبدأ الكون بالتمدد ومن ثم يصـل إلى نقطة حيث العامل السـلمي يبدأ بالتناقص ومن ثم عند وصـوله إلى القيمة التي تسـاوي الصـفر يُطلق على تلك الحالة (بالانكماش الكبير – Big Crunch). إذاً بحسـب محتوى الكون يمكن أن نعيش في كون يتطور بطريقة غير منتهية، أي يتمدد مع الزمن حتى اللانهاية بطريقة غير محددة، أو يكون لدينا كون (أو نعيش بكون) يبدأ بالانكماش على نفسه.

4-3- من أجل القيم التي يكون فيها $\Omega_m^0 = 1$:

وإذا اهتمينا في الحالة الحدية للحالتين السـابقتين (تمثل هذه الحالة الحد الفاصـل بين الكون المفتوح والمغلق)، أي من $\Omega_m^0 = 1$، فيمكننا القيام بهذا انطلاقاً من معادلة فريدمان رقم (6):

$$a' = \pm H_0\{\Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_r^0 a^{-2} + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda a^2\}^{1/2} \qquad (6)$$

وكما في الحالة السابقة إذا كان ليس هناك من إشعاع وليس هناك من ثابت كوني:

$$\Omega_r^0 a^{-2} = 0 \ , \qquad \Omega_\Lambda a^2 = 0$$

وبما أن:

$$\Omega_m^0 + \Omega_r^0 + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda = 1$$

فيكون $\Omega_\Lambda = 0$. ومنه فالمعادلة رقم (6) تصبح على الشكل:

$$a' = \pm H_0\sqrt{\Omega_m^0}a^{-1/2} \rightarrow \sqrt{a}\frac{da}{dt} = \pm H_0 \qquad (23)$$

بالمكاملة نجد:

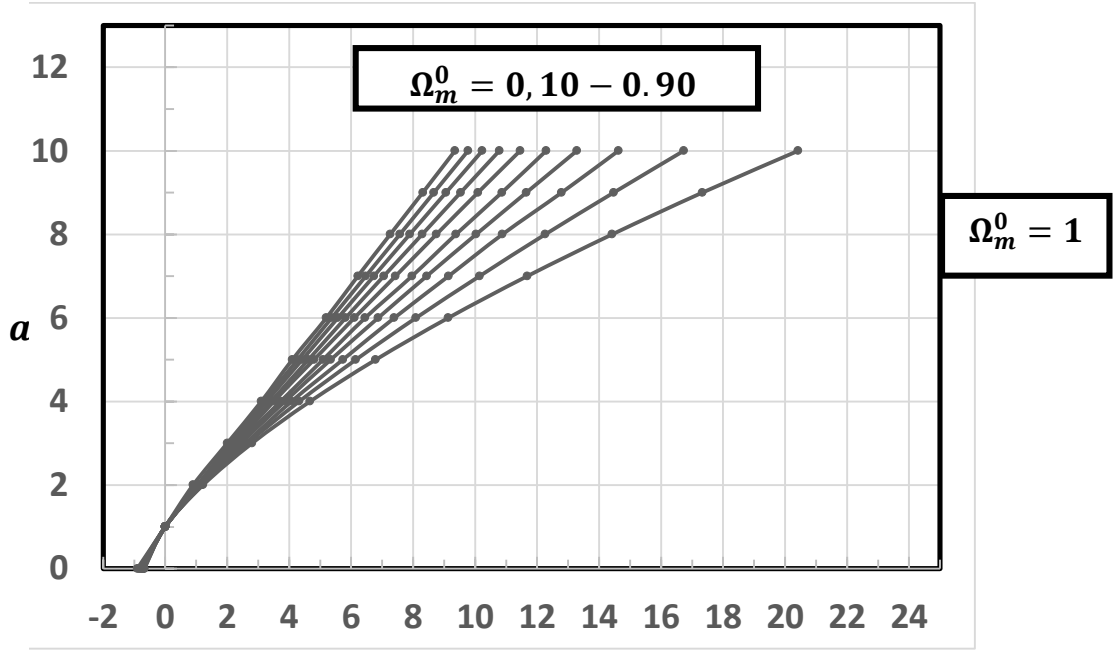
$$\frac{2}{3}\left[a^{\frac{3}{2}}\right]_1^a = \pm H_0[t]_0^t$$

$$\rightarrow \frac{2}{3}\left(a^{3/2} - 1\right) = H_0 t \qquad (24)$$

تم حساب قيم $H_0 t$ الموافقة لقيم مختلفة لـــ a ، والقيم التي تم الحصول عليها معطاة في الجدول (4). بينما المنحني البياني لتغيرات العامل السلمي بتابعية $H_0 t$ مُعطى في الشكل (5)، وهو عبارة عن منحني يفصل الحالتين أو النظامين أي بين القيم الموجبة والسالبة لـ b.

جدول (4): نُعطي في الجدول القيم المختلفة لكل من a، و $H_0 t$ من أجل $\Omega_m^0 = 1$.

$H_0\, t$	$-0{,}67$	0	1,22	2,80	4,67	6,79	9,13	11,68	14,42	17,33	20,42
a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



شكل (5): يمثل تغير العامل السلمي a بتابعية المقدار $H_0 t$ أي بتابعية الزمن من أجل قيم مختلفة لـ Ω_m^0.

والسؤال الذي نسأله هو الآتي: انطلاقاً من هذه الحسابات ما هي ردة فعلنا كفيزيائيين؟

يجب علينا دوماً التأكد من الحسابات على أنه لا يوجد أي خطأ في مكان ما، وأن الحسابات صحيحة. ولهذه الغاية لنأخذ المعادلة رقم (21):

$$H_0\, t = \frac{\Omega_m^0}{(1-\Omega_m^0)^{3/2}}\left[\sqrt{ab}\sqrt{1+ab} - \operatorname{asinh}\sqrt{ab} - \sqrt{b}\sqrt{1+b} + \operatorname{asinh}\sqrt{b}\right] \qquad (21)$$

وكان هذا من أجل $\Omega_m^0 < 1$، ومن أجل $\Omega_m^0 = 1$ وجدنا العلاقة (24):

$$\frac{2}{3}\left(a^{3/2} - 1\right) = H_0 t \qquad (24)$$

وإنه في غاية الأهمية أخذ العلاقة (21) والنظر ما هي القيمة التي نحصـــل عليها عندما تنتهي قيمة b إلى الصفر $b \to 0$. إن القيمة التي من أجلها $\Omega_m^0 = 1$ يوافق $b \to 0$: وذلك لأن:

$$b \equiv \frac{1-\Omega_m^0}{\Omega_m^0}$$

ويمكن القيام بذلك بنشر المقادير:

$$\sqrt{1+ab} \approx 1+\frac{ab}{2}$$
$$\sqrt{ab}\sqrt{1+ab} \approx \sqrt{ab}+\frac{1}{2}(ab)^{\frac{3}{2}}+6(b)^{\frac{5}{2}}$$
$$\operatorname{arc\,sinh}\sqrt{ab} \approx \sqrt{ab}-\frac{1}{6}(ab)^{\frac{3}{2}}+6(b)^{\frac{5}{2}}$$

وأن:

$$\frac{\Omega_m^0}{(1-\Omega_m^0)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_m^0}}\,\frac{1}{b^{\frac{3}{2}}}$$

وبالتعويض نجد أن:

$$H_0 t \approx \frac{2}{3\sqrt{\Omega_m^0}}\left(a^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_m^0=1}}\left(a^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{2}{3}\left(a^{3/2}-1\right)$$

ويمكن القيام بذلك من أجل $\Omega_m^0 \to 0$، ودوماً من أجل كون مكون من مادة فقط.

يمكننا الاهتمام بأوضاع مختلفة بأخذ معادلة فريدمان (المعادلة رقم 6) التي رأيناها سابقاً:

$$a' = \pm H_0\{\Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_r^0 a^{-2} + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda a^2\}^{1/2} \qquad (6)$$

بفرض أننا نعيش في كون مســـطح أي أن $\Omega_k^0 = 0$، فيبقى لدينا ثلاث معاملات حيث مجموع المعاملات الأربعة يســـاوي الواحد. وفي الكون الذي نعيش فيه فهذه الحدود ليس لها نفس الأهمية بنفس الوقت. وإذا مثلنا بيانياً هذه المعاملات، انطلاقاً من المعادلة (5):

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m^0 a^{-3} + \Omega_r^0 a^{-4} + \Omega_k^0 a^{-2} + \Omega_\Lambda \qquad (5)$$

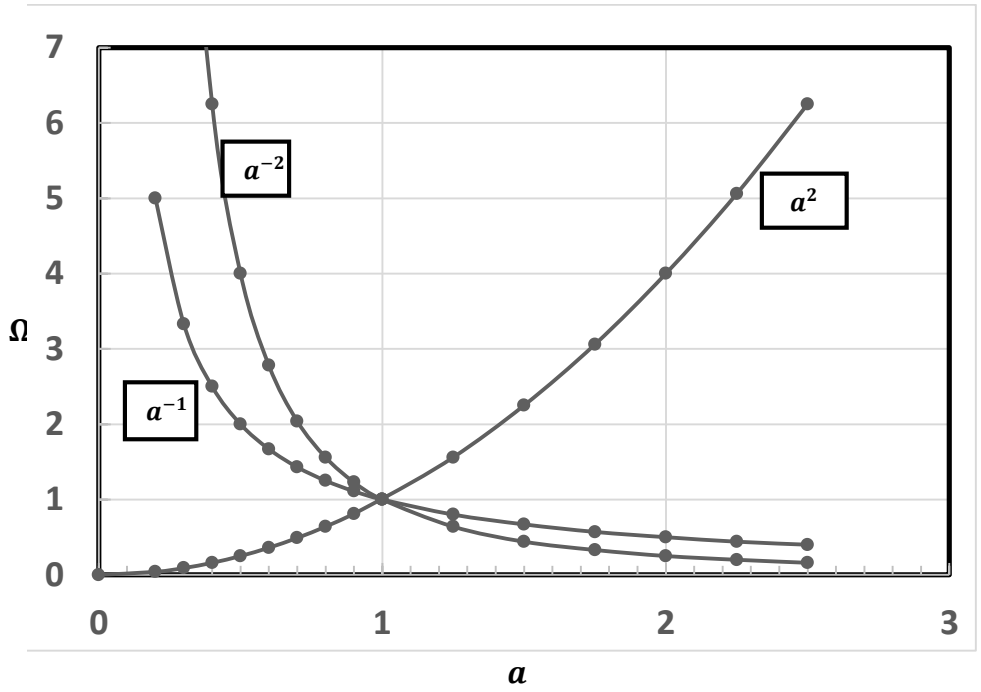
$$a' = \pm H_0\{\Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_r^0 a^{-2} + \Omega_k^0 + \Omega_\Lambda a^2\}^{1/2}$$

$$\Omega_m = \Omega_m^0 a^{-1}\ ,\ \Omega_r = \Omega_r^0 a^{-2}\ ,\Omega_k = \Omega_k^0 = 0\ ,\ \Omega_\Lambda a^{+2}$$

بتابعية العامل السلمي فنجد الشكل (6) والشكل (7)، حيث القيم الموافقة للشكلين معطاة في الجدولين (5) و (6).

جدول (5): أدرج في هذا الجدول القيم المختلفة لكل من a، a^{-1}، a^{-2}، و a^2.

a	0	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
a^{-1}	$\to\infty$	5,00	3,33	2,50	2,00	1,67	1,43	1,25	1,11	1,00	0,80	0,67	0,57	0,50	0,44	0,40
a^{-2}	$\to\infty$	25,00	11,11	6,25	4,00	2,78	2,04	1,56	1,23	1,00	0,64	0,44	0,33	0,25	0,2	0,16
a^2	0	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1,00	1,56	2,25	3,06	4,00	5,06	6,25



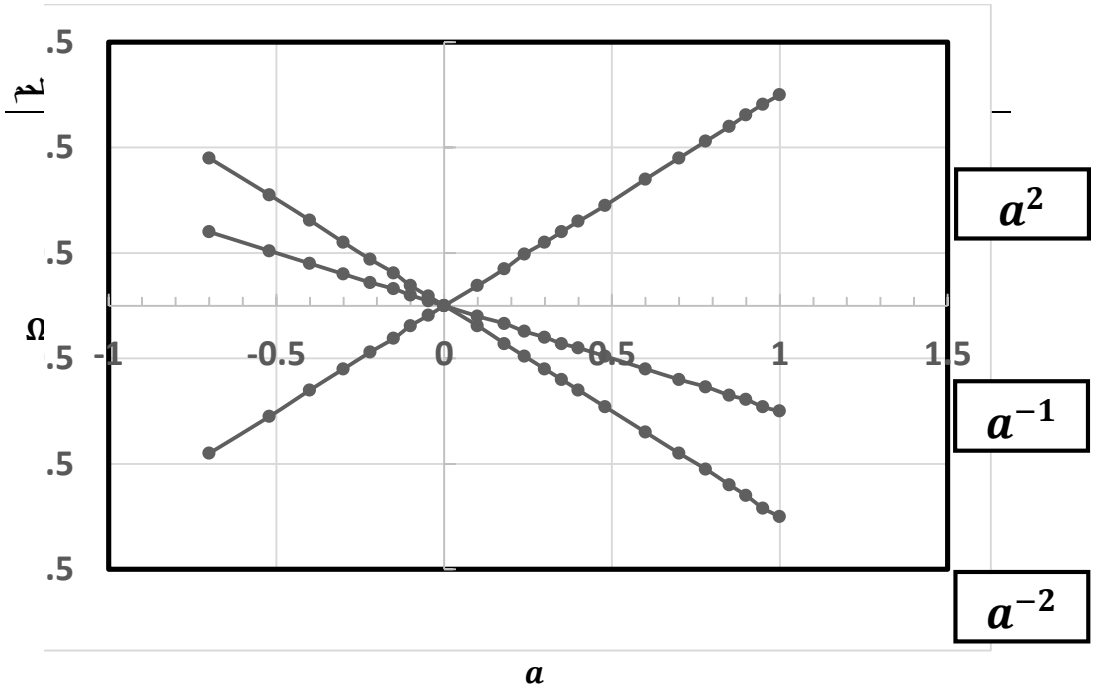
شكل (6): يمثل تغير الكثافة بتابعية العامل السلمي a حيث:

$$\Omega_m = \Omega_m^0 a^{-1} \ , \ \Omega_r = \Omega_r^0 a^{-2} \ , \ \Omega_\Lambda a^{+2}$$

جدول (6): أدرج في هذا الجدول القيم المختلفة لكل من $(a^{-1}, loga^{-1})$، $(a^{-2}, loga^{-2})$، و $(a^2, loga^2)$ من أجل قيم مختلفة لـ $(a, loga)$.

a	0	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
$log\ a$	$\to \infty$	-0,70	-0,52	-0,40	−0,30	−0,22	−0,15	−0,10	−0,05	0	0,10	0,18	0,24	0,30	0,35	0,40
a^{-1}	$\to \infty$	5,00	3.33	2,50	2,00	1,67	1,43	1,25	1,11	1	0,80	0,67	0,57	0,50	0,44	0,40
$log\ a^{-1}$		0,70	0,52	0,40	0,30	0,22	0,16	0,10	0,05	0	−0,10	−0,17	−0,24	−0,30	−0,36	−0,40
a^{-2}	$\to \infty$	25,00	11,11	6,25	4,00	2,78	2,04	1,56	1,23	1	0,64	0,44	0,33	0,25	0,20	0,16
$log\ a^{-2}$		1,40	1,05	0,81	0,60	0,44	0,31	0,19	0,09	0	−0,19	−0,36	−0,48	−0,60	−0,70	−0,80
a^2	0	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1	1,56	2,25	3,06	4,00	5,06	6,25
$loga^2$		−1,40	−1,05	−0,80	−0,60	−0,44	−0,31	−0,19	−0,09	0	0,19	0,35	0,49	0,60	0,70	0,80

a	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
$log\ a$	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1,00
a^{-1}	0,33	0,25	0,20	0,17	0,14	0,13	0,11	0,10
$log\ a^{-1}$	−0,48	−0,60	−0,70	−0,77	−0,85	−0,89	−0,96	−1,00
a^{-2}	0,11	0,06	0,04	0,03	0,02	0,02	0.01	0.01
$log\ a^{-2}$	−0,96	−1,20	−1,40	−1,55	−1,70	−1,80	−1,92	−2,00
a^2	9,00	16,00	25,00	36,00	49,00	64,00	81,00	100,00
$loga^2$	0,95	1,20	1,40	1,56	1,70	1,81	1,91	2,00



شكل (7): يمثل تغير الكثافة بتابعية العامل السلمي a.

$$\Omega_m = \Omega_m^0 a^{-1} \ , \ \Omega_r = \Omega_r^0 a^{-2} \ , \ \Omega_\Lambda a^{+2}$$

4-4- مناقشة المعاملات الكونية:

نجد أنه بزمن نسبي حديث، أي لا نذهب بعيداً في الماضي، حيث مساهمة كثافة الإشعاع تكون مهملة. الوضـــع الأول المهم، أو الذي يمكن الاهتمام به هو: $\Omega_r^0 = 0$. وهذا ما يُدعى بعلم الكون الحديث. وعلى الشكلين السابقين إذا ذهبنا بالعكس أي بالنسبة للقيم الصغيرة للعامل السلمي نلاحظ أن مساهمة الثابت الكوني تصبح صغيرة بالنسبة للحدين الأخريين. وإذا اهتمينا بالقيم المتزايدة للعامل السلمي نلاحظ أن الكون يصبح تدريجياً مسيطر عليه بالثابت الكوني مقارنة بالإشعاع والمادة. بتعبير أخر، عندما كان الكون في حالة الشباب كان المسيطر هو الإشعاع والمادة، وعندما يتزايد في العمر يصبح الثابت الكوني هو المسيطر.

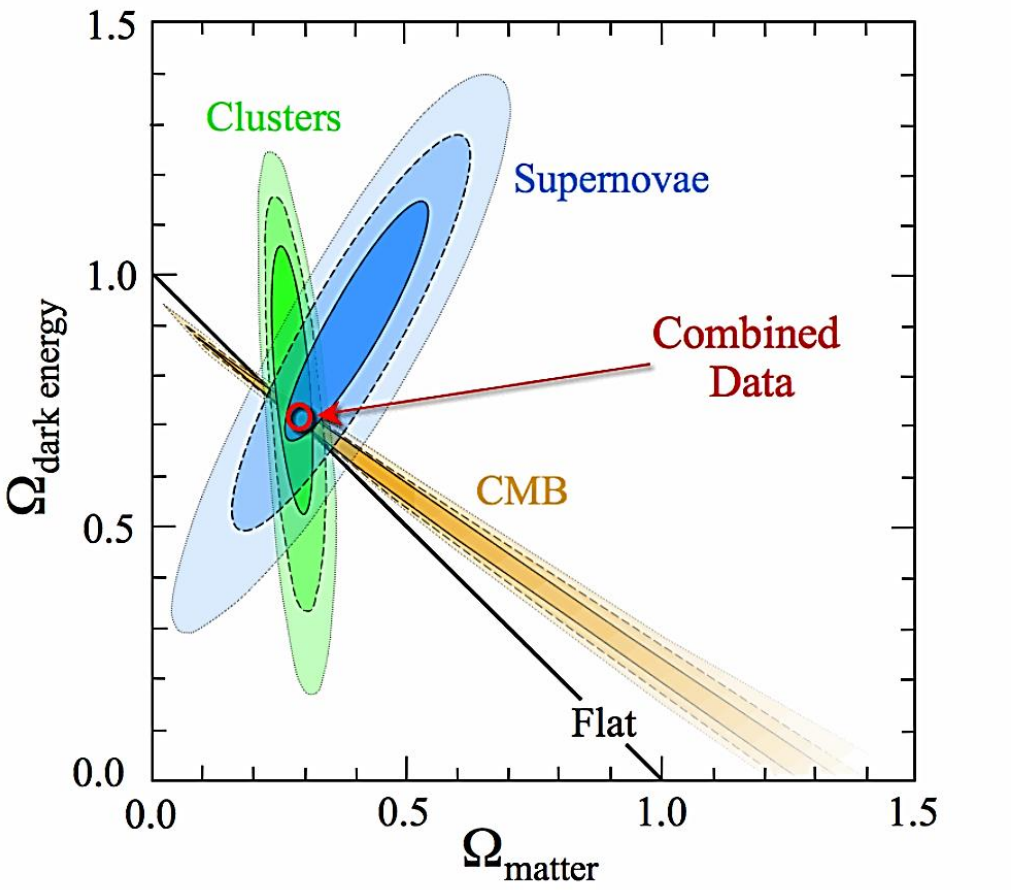
ولدراسة الحقبة حيث لا يمكن اهمال أي معامل من المعاملات الثلاثة السابقة، وبفرض أن الكون مسطح فإن معادلة فريدمان، وفق علم الكون الحديث، تُكتب على النحو الآتي:

$$a' = \pm H_0 \{\Omega_m^0 a^{-1} + \Omega_r^0 a^{-2} + \Omega_\Lambda a^2\}^{1/2}$$

والسؤال الذي يطرح: ما هي القيم الرصدية للمعاملات الكونية في الكون الحالي؟ أو بتعبير آخر ما هي قيم المعاملات الكونية في هذا الكون الذي نعيش فيه؟ أو مما يتكون هذا الكون؟ من بين هذه المعادلات هناك معامل يمكن قياسه بشكل مباشر هو Ω_r^0. يمكن قياسه بسهولة لأنه عبارة عن إشعاع، وهو عبارة عن الإشعاعات التي تحيط بنا وهي تقع في مجال الأمواج الميكروية والتي من السهل مراقبتها. وتُقاس هذه الكثافة عبر طيف الخلفية الكونية الميكروية، حيث تم تقدير قيم هذه المعاملات فوجد أنها تساوي [17 – 20]:

$$\Omega_m^0 \sim 0{,}3 \quad , \quad \Omega_r^0 \sim 10^{-4} \quad , \quad \Omega_\Lambda \sim 0{,}7$$

ومن أجل القيم القريبة من الواحد للعامل السلمي (حيث يمثل هذا الزمن الحقبة الحالية تقريبًا) فالحد $\Omega_m^0 a^{-1}$ هو الحد الأكثر أهمية. وبما أن هذه القيمة في أغلب الأحيان معروفة بشكل جيد، فإن هذا الذي نراه، في كتب علم الكون وفي المقالات المتعلقة بذلك، مرسوم في المستوي البياني $(\Omega_\Lambda, \Omega_m^0)$، مُعطى بالشكل (8).



شكل (8): يوضح قيمة كل من $\Omega_{\text{dark energy}} = \Omega_{\Lambda} \sim 0,7$ و $\Omega_{\text{matter}} = \Omega_{m}^{0} \sim 0,3$ الناتجتين عن تجميع وتشكيل القيم ($Combined\ Data$) التي تم الحصول عليها انطلاقاً من قياسات تستند إلى: نموذج الإشعاع الكوني الخلفي CMB [7]، قياسات السوبرنوفا $Supernova$ [17 − 18]، قياسات نمو تجمع المجرات The growth of massive clusters [20].

توجد تجارب متعددة في علم الكون تسمح بالقيام بقياس تلك المعاملات الكونية حيث لا يمكننا أن نحدد قيمها بشكل دقيق وقطعي. ولكن تقول القياسات إن تلك المعاملات تقع في تلك المنطقة (قياسات تستند إلى الإشعاع الكوني الخلفي CMB) [19]، وقياسات تقول إنها تقع في ذاك

المنطقة (استناداً إلى قياسات السوبرنوفا −Supernovae) [17-18]، وقياسات تستند لتجمع المجرات المرموز لها بـــ Clusters [20]. وبتجميع قيم تلك التجارب نحصل على منطقة مشتركة حيث قيم المعاملات الكونية تقع فيها(Combined Data). وتلك المنطقة تتمركز حول القيم التي أعطيناها أعلاه.

5- الاستنتاجات والتوصيات:

تم في هذا البحث إيجاد حلول خاصة لمعادلة فريدمان الأولى من أجل $(\boldsymbol{\Omega_r^0 = \Omega_\Lambda = 0})$ أي من اجل الحالات التي تكون فيها مساهمة الإشعاع معدومة وبالتالي الثابت الكوني معدوم، وهذا يوافق كون لا يوجد فيه إلا المادة أي أن $\boldsymbol{\Omega_m^0 \neq 0}$، حيث يمثل هذا المتحول العلاقة بين كثافة المادة والكثافة الحرجة:

$$\boldsymbol{b \equiv \frac{1 - \Omega_m^0}{\Omega_m^0}}$$

وذلك من أجل القيم الموجبة لـــ $b > 0$ أي أن $(\Omega_m^0 < 1)$ ومن أجل القيم السالبة لـــ $b < 0$ أي أن $(\Omega_m^0 > 1)$.

وباختيار قيمة لـ Ω_m^0 نستطيع حساب t_0، وهذا الزمن يأخذ قيمة سالبة $(-t_0)$ كما موضح في الشـــكل (2)، نُطلق عليها اســـم "**عمر الكون**". وهذا النموذج للكون مع $(b > 0)$ يمتلك عمر منتهي كما هو مبين في الشـــكل (2) (الجزء الســـالب للزمن أي قيمة $H_0 t$). وإن هذا الذي يســـميه علماء الكون بـــ (**الانفجار العظيم – The Big Bang**) هي اللحظة البدائية (اللحظة الفريدة) التي من أجلها $(t = t_0)$.

قمنا أيضا بالحسابات من أجل القيم السالبة لـ b، وذلك من أجل $\Omega_m^0 > 1$، ونقول في هذه الحالة أن الكون هو في حالة (**ما فوق الحرجة – over critical**)، أي كثافته أكبر من الكثافة الحرجة. في الحالة السابقة ندعوه بالحالة (**ما تحت الحرجة – under critical**).

اهتمينا أيضـاً في الحالة الحدية للحالتين السـابقتين، أي من $\Omega_m^0 = 1$، فقمنا بذلك انطلاقاً من المعادلة رقم (6). تم حساب قيم $H_0 t$ الموافقة لقيم مختلفة لـــ a ، والقيم التي تم الحصول عليها معطاة في الجدول (4). بينما المنحني البياني لتغيرات العامل السلمي بتابعية مُعطى $H_0 t$ في الشكل (5)، وهو عبارة عن منحني يفصل الحالتين أو النظامين أي بين القيم الموجبة والسالبة لـ b.

تؤكد هذه الحلول أن شكل الكون هو الذي يحدد مصيره (وهذا الارتباط بين الهندسة والمحتوى المادي هو نتيجة مباشرة لمعادلات فريدمان): فالكون المغلق ($\Omega_m^0 > 1$) منتهٍ وينتهي بانكماش، بينما الكون المفتوح أو المسطح ($\Omega_m^0 \leq 1$) غير منتهٍ ويتمدد إلى الأبد. هذا الارتباط بين الهندسة والمحتوى المادي هو أحد الاستنتاجات الأساسية في علم الكون الحديث [5–8].

استنادًا إلى النتائج السابقة، نقترح ما يلي:

- **التوصية 1: دراسة تأثير إدخال Ω_r^0 و Ω_Λ معاً في الحل التحليلي.**
- **التوصية 2: مقارنة النتائج مع بيانات مرصد جيمس ويب الفضائي المستقبلية.**
- **التوصية 3: تطبيق الحلول على نماذج الطاقة المظلمة المتغيرة مع الزمن.**

المـراجـع

[1] RYDEN, B. (2017). Introduction to Cosmology (2nd ed.). Cambridge University Press, UK.

[2] BAUMANN, D. (2022). Cosmology. Cambridge University Press, UK.

[3] FRIEDMANN, A. (1922). Über die Krümmung des Raumes. Zeitschrift für Physik, Germany, 10, 377–386.

[4] LEMAÎTRE, G. (1927). Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles A, Belgium, 47, 49–59.

[5] DODELSON, S.; SCHMIDT, F. (2020). Modern Cosmology (2nd ed.). Academic Press, Netherlands.

[6] PEACOCK, J. A. (2016). Cosmological Physics. Cambridge University Press, UK.

[7] PLANCK COLLABORATION; AGHANIM, N.; et al. (2020). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. Astronomy & Astrophysics, France, 641, A6.

[8] WEINBERG, S. (2008). Cosmology. Oxford University Press, UK.

[9] MARTIN, J. (2012). Everything You Always Wanted To Know About The Cosmological Constant Problem (But Were Afraid To Ask). Comptes Rendus Physique, France, 13, 566–665.

[10] MARTIN, J.; RINGEVAL, C.; TROTTA, R.; VENNIN, V. (2014). The Best Inflationary Models After Planck. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, UK, 1403, 039.

[11] WEINBERG, S. (1972). Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. Wiley, USA.

[12] WEINBERG, S. (1989). The Cosmological constant problem. Reviews of Modern Physics, USA, 61, 1–23.

[13] WEINBERG, S. (1992). Dreams of a final theory: The Search for the fundamental laws of nature. Pantheon Books, USA.

[14] WEINBERG, S. (2002). Cosmological fluctuations of short wave-length. Astrophysical Journal, USA, 581, 810–816.

[15] WEINBERG, S. (2005). The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations. Cambridge University Press, UK.

[16] WEINBERG, S. (2006). A No-Truncation Approach to Cosmic Microwave Background Anisotropies. Physical Review D, USA, 74, 063517.

[17] KOWALSKI, M.; et al. (2008). Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets. Astrophysical Journal, USA, 686, 749.

[18] KNOP, R. A.; ALDERING, G.; AMANULLAH, R.; ASTIER, P.; et al. (2003). New Constraints on Ω_M, Ω_Λ, and w from an Independent Set of 11 High-Redshift Supernovae Observed with HST. Astrophysical Journal, USA, 598, 102.

[19] SPERGEL, D. N.; et al. (WMAP Collaboration) (2003). First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. Astrophysical Journal Supplement Series, USA, 148(1), 175.

[20] ALLEN, S. W. (2011). Cosmological Parameters from Observations of Galaxy Clusters. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, USA, 49, 409–470.

وجود الحل ووحدانيته لمعادلة بواسون على منطقة متعددة الوجوه بطريقة بيرون

[1] سوزان مفيد السماعيل [2] أ.د. محمد عامر [3] د. محمد شراباتي

الملخص

نتناول في هذا البحث دراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة ديرخليه لمعادلة بواسون:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

على صف المناطق المحدودة متعدّدة الوجوه $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (حيث $n \geq 2$)، والمحققة لشرط الجانب الواحد (يقع Ω موضعياً على جانبٍ واحدٍ من حدّه، ويكافئ ذلك: $\Omega = \text{int}(\overline{\Omega})$)، وذلك بطريقة بيرون.

وتكمن مساهمة البحث في معيار وحيد للانتظام عند نقاط الحدود والذي يكافئ الشرط الزاوي: $\overline{D}_\xi \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$.

وانطلاقاً منه نبني حاجزاً $W(rw) = r^\lambda \psi(w)$ بالأس:

$$\lambda = \frac{-(n-2) + \sqrt{(n-2)^2 + 4\mu_1}}{2} > 0$$

حيث ψ الدالة الذاتية الموجبة لمؤثر لابلاس _ بلترامي على المنطقة الكروية الجزئية $\boldsymbol{D}$` بقيمة ذاتية $\mu_1 > 0$ ، فتكون كل نقطة من $\partial\Omega$ منتظمة، عندئذٍ يكون للمسألة حلاً وحيداً $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

الكلمات المفتاحية: معادلة بواسون، مسألة ديرخليه، طريقة بيرون، الدوال تحت التوافقيّة، دالّة الحاجز، النقطة المنتظمة، شرط المخروط الخارجي، المناطق متعدّدة الوجوه، مؤثّر لابلاس–بلترامي.

[1] معيدة موفدة، طالبة ماجستير، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة حمص

[2] عضو هيئة تدريسية، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة حمص

[3] عضو هيئة تدريسية، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة حمص

Existence and Uniqueness of the Solution to Poisson's Equation on a Polyhedral Domain by Perron's Method

Souzan Mufid Al Smail [1] Dr. Mohamad Amer [2] Dr. Mohamad Charabati [3]

Abstract

In this paper we study the existence and uniqueness of the solution to the Dirichlet problem for Poisson's equation:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

over the class of bounded polyhedral domains $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (where $n \geq 2$) satisfying the one-sided condition (Ω lies locally on one side of its boundary، this is equivalent to: $\Omega = \text{int}(\overline{\Omega})$), by Perron's method.

The contribution of this research lies in a single criterion for regularity at boundary points, which is equivalent to the angular condition $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$.

From it, we construct a barrier $W(rw) = r^\lambda \psi(w)$ with exponent:

$$\lambda = \frac{-(n-2) + \sqrt{(n-2)^2 + 4\mu_1}}{2} > 0$$

where ψ is the positive eigenfunction of the Laplace–Beltrami operator on the spherical subdomain $\boldsymbol{D}^{`}$ with eigenvalue $\mu_1 > 0$ ، then every point of $\partial\Omega$ is regular, whereupon the problem has a unique solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Keywords: Poisson's equation, Dirichlet problem, Perron's method, subharmonic functions, barrier function, regular points, exterior cone condition, polyhedral domains, Laplace–Beltrami operator.

[1] Seconded Teaching Assistant، Master's Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Homs University

[2] faculty member, Department of Mathematics, Faculty of Science, Homs University

[3] faculty member, Department of Mathematics, Faculty of Science, Homs University

1. المقدمة:

تُعدّ معادلة بواسون $-\Delta u = f$ من المعادلات الأساسية في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية، إذ تمثل المعادلة المنظِّمة لجهد الكمون، وتصف حالات الاستقرار في مناطق فيزيائية متعددة كالانتشار الحراري والجاذبية وميكانيك الموائع [4]. وترتبط بهذه المعادلة مسألة ديرخليه والتي تُعنى بإيجاد حلٍ يتطابق على حدود المنطقة مع قيم حدية مفروضة وهذا ما جعلها المسألة التأسيسية لمسائل القيم الحدّية منذ القرن التاسع عشر [2].

وقد ظُنّ طويلًا، استنادًا إلى «مبدأ ديرخليه»، أنّ حلّ هذه المسألة مضمونٌ دائمًا باعتباره مصغِّرًا لطاقة ديرخليه، إلى أن بيّن فايرشتراس أن وجود هذا المُصغِّر غير مضمون [2] بتقديم أمثلة تُبيّن أن الحل قد يخفق في بلوغ قيمه الحدية عند نقاط «غير منتظمة» مثل: الكرة المثقوبة عند زاريمبا (1911)، وشوكة ليبيغ (spine Lebesgue , 1912) [2]. وقد نُقلت هذه النتائج من إثبات الوجود الداخلي للحل إلى دراسة انتظام النقطة الحدّية.

وقد أحدثت طريقة بيرون تحولاً يفصل إثبات الوجود الداخلي عن انتظام الحدود حيث يُبنى الحلّ باعتباره الحدّ الأعلى لمجموعة الدوال تحت التوافقية S_φ، فيثبت توافقيًّا في الداخل دون أيّ شرطٍ على الحدود، ولا يبقى إلا التحقّق من بلوغه القيم الحدية المعطاة عند كلّ نقطة، وهو ما يكفله وجود «حاجزٍ» عندها [1].

وبالنسبة للمناطق ذات الحدود الملساء يُعد شرط الكرة الخارجية (بوانكاريه) [1]، أو شرط المخروط الخارجي (زاريمبا) [12] شرطاً كافياً لضمان هذا الانتظام، غير أنّ شرط الكرة الخارجية لا يصلح عند

الزوايا والحواف والرؤوس التي تُكوّن حدود المناطق متعدّدة الوجوه، وبخاصّةٍ عند الزوايا المنعكسة (غير المحدّبة) [6]. وهذه المناطق ليست حالاتٍ شاذّة، بل هي القاعدة في التطبيقات العملية والهندسية بدءاً من طريقة العناصر المنتهية، والبلّورات وأدلّة الموجات في الفيزياء، إلى مسائل الجهد في الأوساط ذات الحواف الحادّة [6]. وقد بُنِيت لهذه المناطق نظريات عميقة (مثل أعمال: كوندراتييف، مازيا، داوج) والتي تعتمد على فضاءات سوبوليف الموزونة والتحليل الطيفي على المقاطع الكروية [9]، ورغم قوة هذه الأدوات إلا أنها تتطلب بناءً رياضياً يتجاوز ما يحتاجه إثبات وجود الحل في حدّ ذاته.

كما يقدّم هذا البحث مسلكًا مغايرًا، إذ يعالج المسألة على المناطق متعدّدة الوجوه بأدواتٍ تحليلية أوّليّةٍ كافية، إذ يردّ الانتظام إلى الدراسة عند كلّ نقطةٍ حدّية، وإلى بناء حاجزٍ مباشر من الدالّة الذاتيّة لمؤثّر لابلاس–بلترامي على المقطع الكروي، فيَثبت وجود الحل على أوسع صفٍ من متعددات الوجوه – محدّبةً كانت أم غير محدّبة – دون تجاهل الإطار الكلاسيكي لطريقة بيرون [1].

2. مشكلة البحث:

تكمن مشكلة البحث في إثبات وجود ووحدانية الحل لمسألة ديرخليه لمعادلة بواسون على صف المناطق المحدودة متعدّدة الوجوه $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (حيث $n \geq 2$)، عبر إيجاد معيارٍ وحيد للانتظام صالحٍ في الحالات الثلاث (وجه/حافة/رأس) بما فيها الحالة غير المحدّبة، وبناء حاجزٍ صريحٍ عند كلّ نقطةٍ حدّية [1].

ويتفرّع ذلك إلى **[9,11,12]:**

(أ) إثبات التطابق المخروطي التام، أي تطابق المنطقة محلّيًّا مع مخروطها المماسّ عند كلّ نقطة حدية.

(ب) توصيف وجود المخروط الخارجي بالشرط الزاوي: $\overline{D}_{\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$.

(ج) التحقّق من هذا الشرط عبر الحالات الثلاث.

(د) بناء الحاجز من أوّل دالةٍ ذاتيّةٍ موجبة لمؤثّر لابلاس–بلترامي على المقطع الكروي.

3. أهمية البحث:

تكمن أهمية هذا البحث في عدّة وجوه.

أوّلًا: إنّه يوحّد الحالات الحدّية الثلاث (الوجه والحافة والرأس) تحت معيارٍ وحيد – المخروط الخارجي والشرط الزاوي المكافئ له – عوضًا عن المعالجات المتفرّقة لكلّ حالةٍ على حدة **[12]**.

ثانيًا: يقدّم برهانًا لدراسة الوجود بحيث يبقى ضمن الإطار الكلاسيكي لطريقة بيرون **[1]**.

ثالثًا: يُثبِت النتيجة بمعزلٍ عن تحدّب المنطقة، فيشمل متعددات الوجوه غير المحدّبة ذات الزوايا المنعكسة، حيث يخفق شرط الكرة الخارجية بينما يبقى المخروط الخارجي **[12]**.

رابعًا: بناء حاجزٍ صريحٍ $W(r\omega) = r^{\lambda}\psi(\omega)$ من أوّل دالّةٍ ذاتيّةٍ موجبةٍ لمؤثّر لابلاس–بلترامي على المقطع الكروي، فيربط انتظام الحدّ بهندسة المخروط المماسّ وطيف المقطع الكروي **[12]**.

وأخيرًا: يربط البحث بين نظرية الكمون الكلاسيكية وطريقة بيرون **[1]** من جهة، وهندسة متعددات الوجوه والمخاريط المماسّة **[11]** من جهةٍ أخرى، ويكمّل الأدبيات التحليلية للمناطق ذات الزوايا **[7]** برؤيةٍ هندسيّةٍ مباشرة، وهو ما ينفع عمليًّا لعموم المناطق متعدّدة الوجوه في الحساب العددي والتطبيقات **[13]**.

4. مواد البحث:

4.1. تعريف < الدالة تحت التوافقية > [1]:

لتكن Ω منطقة مفتوحة ومحدودة في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ نقول عن الدالة $v: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ إنها **تحت توافقية** إذا حققت الشروط التالية:

1. **الاستمرارية** :تكون v مستمرة على المنطقة، أي $v \in C^0(\Omega)$.
2. **خاصية المقارنة التوافقية:(The Comparison Property)**

لكل كرة مفتوحة Bمحتواة تماماً في Ω (أي $B \subset\subset \Omega$) ولكل دالة hتحقق:

- $\Delta h = 0$ في B (دالة توافقية داخل الكرة).
- $h \in C^0(\bar{B})$ (مستمرة على غلاقة الكرة).
- $v \leq h$على حدود الكرة ∂B.

فإن شرط تحت التوافقية يفرض أن: $v(x) \leq h(x) \ , \ \forall x \in B$.

4.2. تعريف [1]:

بفرض أن Ω منطقة مفتوحة، نسمي الدالة $v \in C^2(\Omega)$ تحت توافقية إذا كان $\Delta v \geq 0$ وفوق توافقية إذا كان $\Delta v \leq 0$ في Ω.

4.3. بعض خصائص الدوال تحت التوافقية [1]:

1. إذا كانت u تحت توافقية في منطقة محدودة Ω فإنها تحقق مبدأ القيمة العظمى.
2. عند مقارنة دالة فوق توافقية v ودالة تحت توافقية u في المنطقة المحدودة Ω بحيث $v \geq u$ على $\partial\Omega$، فإما أن يكون $v > u$ في جميع Ω أو يكون $v \equiv u$.
3. إذا كانت uتحت توافقية في Ω ، وأخذنا كرة B بحيث $\bar{B} \subset \Omega$، من خلال تكامل بواسون ل u على ∂B فنحصل على دالة توافقية $\bar{u}$ في B بحيث تكون $u = \bar{u}$ على ∂B ومنه نحصل على دالة تحت توافقية U في Ω معرفة بالشكل: $U(x) = \begin{cases} \bar{u}(x) & ; x \in B \\ u(x) & ; x \in \Omega \backslash B \end{cases}$

4. لتكن $\{u_1. \dots . u_m\}$ مجموعة منتهية من الدوال تحت التوافقية في Ω عندئذٍ تكون:
$u(x) = \max_i \{u_i(x)\}$ تحت توافقية.

ملاحظة [3]: نعلم أن الحل الأساسي المحقق لـ $-\Delta\Phi = \delta_0$ (حيث δ_0 هي دالة دلتا ديراك المتمركزة عند الصفر) يعطى بالعلاقة:

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x| & if\ n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha_n}\frac{1}{|x|^{n-2}} & if\ n \geq 3 \end{cases}$$

حيث α_n هو حجم الكرة الواحدية $B(0,1)$ في الفضاء ذو n بُعد يعطى العلاقة:

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} & n\ even \\ \frac{2^{n+1/2}\pi^{n-1/2}}{1.3 \dots \dots \dots (n-2)n} & n\ odd, n \geq 3 \end{cases}$$

حجم الكرة $B(0,\rho)$ يعطى بالعلاقة $\alpha_n\rho^n$.

4.4. تعريف < الاستمرار وفق هولدر محلّياً > [3]:

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ منطقة مفتوحة، وليكن $\alpha \in (0,1]$.

(أ) نقول عن الدالّة $f: \Omega \to \mathbb{R}$ إنّها **مستمرّة وفق هولدر بالأُسّ** α على مجموعة $E \subseteq \Omega$ إذا وُجد ثابت $C \geq 0$ بحيث:

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|^{\alpha} \qquad \forall\ x, y \in E.$$

(ب) ونقول إنّها **مستمرّة وفق هولدر محلّياً** في Ω، ونكتب $f \in C^{\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$، إذا كانت مستمرّة وفق هولدر بالأُسّ α على كلّ مجموعة متراصّة $K \subset\subset \Omega$، بثابت $C = C(K)$ يعتمد على K.

4.5. مبرهنة [1]:

ليكن

$$w(x) = \int_{\Omega} \Phi(x-y)\, f(y) dy$$

إذا كانت f محدودة ومستمرة وفق هولدر محلياً فإن $w \in C^2(\Omega)$ و $-\Delta w = f$ في Ω..

4.6. تعريف < متعدد الوجوه > [5]:

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (حيث $n \geq 2$) منطقة مفتوحة ومتصلة ومحدودة، نقول إن Ω متعدد وجوه إذا تحقق الشرطان:

1) الحدُّ مسطّحٌ على قِطَع: لكلّ $\xi \in \partial\Omega$ يوجد جوارٌ مفتوحٌ U لـ ξ بحيث يتطابق $\partial\Omega \cap U$ مع اتّحادٍ منتهٍ من قطعٍ مستويةٍ بُعدُها $n-1$.

2) شرطُ الجانب الواحد: يقع Ω موضعياً على جانبٍ واحدٍ من حدّه؛ ويكافئ ذلك:

$$\Omega = \mathrm{int}(\overline{\Omega})$$

ملاحظة < الصيغة المحدّبة >: إذا كان Ω محدّباً، يكافئ ذلك كون Ω داخل تقاطع منتهٍ لأنصاف الفضاءات:

$$\Omega = int\left(\bigcap_{i=1}^{N}\left\{x \in \mathbb{R}^n : a_i.x \leq b_i\right\}\right), \quad a_i \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, b_i \in \mathbb{R}$$

بشرط أن يكون الداخل غير خالٍ ومحدوداً.

بنية الحدّ [11]:

بما أنّ $\partial\Omega$ متراصة والشرطُ (1) موضعيٌّ، فإنّ عددَ القطع المستوية منتهٍ. وعليه تتفكّك $\partial\Omega$ إلى اتّحادٍ منتهٍ ومنفصلٍ من طبقاتٍ مفتوحةٍ نسبياً:

$$\partial\Omega = \bigcup_{d=0}^{n-1} \mathcal{F}_d,$$

حيث $\mathcal{F}_d$ اتّحادُ الطبقات ذات البُعد d. ونسمّي الطبقةَ ذاتَ البُعد $n-1$ **وجهاً**، وذاتَ البُعد $n-2$ **حافةً**، وذاتَ البُعد 0 **رأساً**. وتوجد **طبقاتٌ وسطية** ببُعد $1 \leq d \leq n-3$ حيث $n \geq 4$.

4.7. تعريف < الأثر الزاوي والمخروط المماس > [10]:

لتكن $\xi \in \partial\Omega$، نعرّف **الأثر الزاوي** للمنطقة Ω عند ξ:

$$D_\xi := \{\omega \in \mathbb{S}^{n-1} : \exists\sigma > 0 \ \ ,\forall\, t \in (0,\sigma) :\ \xi + t\omega \in \Omega\}$$

ونسمي المخروط المولَّد عنه:

$$K_\xi = \{\xi + r\omega \ : r > 0 \ , \omega \in D_\xi \}$$

المخروط المماس لـ Ω عند ξ.

ملاحظة: D_ξ هو مجموعة الاتجاهات القطرية الداخلة، وأيضاً يتطابق مع أثر المخروط المماس في متعدد الوجوه Ω.

4.8. تعريف < شرط المخروط الخارجي بزاوية صلبة موجبة > [12]:

لتكن $\xi \in \partial\Omega$، نقول إن Ω **يحقق شرط المخروط الخارجي** عند ξ إذا وجد متجه واحدي $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ حيث

$\mathbb{S}^{n-1} = \{\omega \in \mathbb{R}^n : |\omega| = 1\}$ هي الكرة الواحدية، ونصف زاوية $\beta \in (0, \pi/2]$، ونصف قطر $\rho > 0$ بحيث يكون المخروط ذو الرأس ξ والمحور e ونصف الزاوية β:

$$C_\xi(e,\beta) := \left\{x \in \mathbb{R}^n \ :\ (x-\xi).e \geq |x-\xi|\cos\beta \ \right\}$$

محقّقاً: $C_\xi(e,\beta) \cap B_\rho(\xi) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \Omega$.

والزاوية الصلبة الموجبة تعني أنه بعد نقل الرأس ξ إلى المبدأ، يكون أثر المخروط على الكرة الواحدية $\mathbb{S}^{n-1}$:

$$D_{C_\xi} := C_\xi(e,\beta) \cap \mathbb{S}^{n-1} = \{\omega \in \mathbb{S}^{n-1} : \ \omega.e \geq \cos\beta \ \ \} = \bar{B}_\beta(e)$$

وهي **الكرة الجيوديزية المغلقة** ذات المركز e ونصف الزاوية β في $\mathbb{S}^{n-1}$. **والزاوية الصلبة** للمخروط هي قياسها السطحي (قياس هاوسدورف ذو البعد $n-1$):

$$\left|\bar{B}_\beta(e)\right| = \mathcal{H}^{n-1}\left(\bar{B}_\beta(e)\right) = |\mathbb{S}^{n-2}| \int_0^\beta \sin^{n-2} t \, dt > 0\,, \quad \forall \beta > 0$$

فالشرط $\beta > 0$ يكافئ تماماً إيجابية الزاوية الصلبة.

4.9. تعريف < الحاجز > [1]:

لكل نقطة $\xi \in \partial\Omega$ نعرّف الحاجز عند ξ بالنسبة إلى Ω ويرمز له بالرمز W على أنه دالة من الصنف $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ بحيث تحقق:

W فوق توافقية في Ω.

$W > 0 \ in \ \overline{\Omega}\backslash\{\xi\}$.

$W(\xi) = 0$.

النقطة ذات الحاجز تسمى نقطة منتظمة.

ملاحظة [8]:

اللابلاسيان في الاحداثيات الكروية ($\omega \in \mathbb{S}^{n-1}, x = r\omega\,,\ r > 0$):

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

حيث $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ هو مؤثر لابلاس–بلترامي على الكرة الواحدية $\mathbb{S}^{n-1}$ والذي هو تباعُد التدرّج على الكرة:

$$\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} f = \mathrm{div}_{\mathbb{S}^{n-1}}(\nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} f)$$

المسألة والفرضيات:

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ منطقة مفتوحة ومتصلة ومحدودة متعدّدَة الوجوه، سوف ندرس الآن مسألة ديرخليه:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & in\ \Omega \\ u = g & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

بالفرضيات: f محدودة ومستمرة وفق هولدر محلياً $f \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega) \cap L_{\infty}$ و $g \in C(\partial\Omega)$.

وبحسب مبرهنة الكمون النيوتوني، لدينا $w(x) = \int_{\Omega} \Phi(x-y)\, f(y) dy$، يحقق المعادلةَ $-\Delta w = f$ في Ω عندئذٍ نضع: $\varphi := (g-w)|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$ **[1]**:

وبالتالي يكون حل المسألة u إذا وفقط إذا كان:

$h := u - w$ توافقية في Ω و $h = \varphi$ على $\partial\Omega$.

إذاً يكفي حل المسألة:

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & in\ \Omega \\ h = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

لتكن $m \leq \varphi \leq M$، نعرف **مجموعة الدوال التحتية [1]**:

$$S_\varphi = \left\{ v \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) : \ \Omega \text{ تحت } v \text{ في توافقية } , \ \limsup_{x\to\xi} v(x) \le \varphi(\xi) \ \ \forall\, \xi \in \partial\Omega \right\}$$

نلاحظ أن المجموعة غير خالية ومحدودة من الأعلى بـ M وذلك لأن:

المجموعة غير خالية لأنه لو أخذنا الدالة الثابتة $v_0 \equiv m$ حيث $m = \min_{\partial\Omega} \varphi$ نلاحظ أنها تحقق:

$$v_0 \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) \quad , \Delta v_0 \ge 0 \quad , \qquad \limsup_{x\to\xi} v_0(x) = m \le \varphi(\xi) \ \ \forall\, \xi \in \partial\Omega$$

عندئذٍ فإن $v_0 \in S_\varphi$.

وأيضاً محدودة من الأعلى بـ M (حسب خاصية مبدأ القيمة العظمى والتي تنص على أن الدالة تحت التوافقية تبلغ قيمتها العظمى على الحدود) أي أن $v \le M$ لكل $v \in S_\varphi$ حيث $M = \max_{\partial\Omega} \varphi$.

لنعرّف **دالة بيرون [1]**:

$$h(x) = \sup\left\{ v(x) : \quad v \in S_\varphi \right\} \quad , \qquad x \in \Omega$$

وهي معرّفة جيداً لأنه لو أخذنا الدالة الثابتة $v_0 \equiv m$ حيث $m = \min_{\partial\Omega} \varphi$ نلاحظ أنها تحقق:

$$v_0 \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) \quad , \Delta v_0 \ge 0 \quad , \ \limsup_{x\to\xi} v_0(x) = m \le \varphi(\xi) \ \ \forall\, \xi \in \partial\Omega$$

$$h(x) = \sup_{v\in S_\varphi} v(x) \ge v_0(x) = m$$

وبما أن $v \in S_\varphi$ محدودة عندئذٍ فإن:

$$h(x) = \sup_{v\in S_\varphi} v(x) \le M$$

عندئذٍ فإن: $m \le h \le M$.

لنثبت أن h توافقية في Ω بطريقة بيرون:

بأخذ $x_0 \in \Omega$ نقطة اختيارية وكرة $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$، وبما أن

$$h(x) = \sup_{v \in S_\varphi} v(x)$$

توجد متتالية $\{v_k\} \subset S_\varphi$ بحيث $v_k(x_0) \longrightarrow h(x_0)$ عندما $k \longrightarrow \infty$.

وباستبدال v_k ب $max\{v_1, \dots, v_k, m\}$ حيث يبقى $v_k \in S_\varphi$ وذلك حسب الخاصية التي تنص على أن القيمة العظمى لعدد منته من دوال تحت توافقية هي دالة تحت توافقية وعلى الحدود:

$$\limsup_{x \to \xi} v_k = \max_j \{\limsup v_j, m\} \le max\{\varphi(\xi), m\} = \varphi(\xi)$$

عندئذٍ يكون $m \le v_1 \le v_2 \le \cdots \le h$.

لنعرّف الرفع التوافقي:

$$V_k = \overline{v_k} = \begin{cases} \int_{\partial B} p(x,y) v_k(y)\, dS_y & , x \in B \\ v_k(x) & , x \in \Omega \backslash B \end{cases}$$

أي أنه داخل B هو تكامل بواسون لقيم v_kعلى ∂B (فتكون توافقية) وخارجها تبقى v_kكما هي.

حيث $p(x,y)$ هي نواة بواسون للكرة في $\mathbb{R}^n$ **[3]**:

$$p(x,y) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{n\alpha_n R} \frac{1}{|x-y|^n}\,, \qquad x \in B_R(x_0)\,, y \in \partial B_R(x_0)$$

حيث α_n هي حجم الكرة الواحدية و dS_y عنصر المساحة على $\partial B_R(x_0)$.

فتكون:

- $V_k \in S_\varphi$: واضح أنها تبقى تحت توافقية في Ω وبما أن $B \subset\subset \Omega$ فقرب الحدود $\partial\Omega$ يكون $V_k = v_k$ عندئذٍ يكون:

$$\limsup_{x\to\xi} V_k = \limsup_{x\to\xi} v_k \le \varphi(\xi)$$

- V_k توافقية في B: لأنه داخل B فإن V_k هي تكامل بواسون وهو توافقي بالبناء أعلاه.

- $V_k \ge v_k$: لنفرض أن $q := v_k - V_k$ عندئذٍ نلاحظ أن q تحت توافقية داخل B وذلك لأن $\Delta v_k \ge 0$ و

$\Delta V_k = 0$ عندئذٍ فإن:

$$\Delta q = \Delta v_k \ge 0$$

و $q = 0$ على ∂B وذلك لأن $v_k = V_k$.

وحسب مبدأ القيمة العظمى فإن الدالة تحت التوافقية تبلغ قيمتها العظمى على الحدود أي أن:

$$q \le \max_{\partial B} q = 0 \implies V_k \ge v_k \ \ in\ B$$

- $V_k \le M$: لأن $V_k \in S_\varphi$ حسب مبدأ القيمة العظمى يتم المطلوب.

- V_k متزايدة: نعلم $v_k \le v_{k+1}$ عندئذٍ يكون $V_k \le V_{k+1}$ داخل B.

وخارج B يكون $V_k = v_k \le v_{k+1} = V_{k+1}$.

ينتج أن:

$$v_k(x_0) \le V_k(x_0) \le h(x_0) \Longrightarrow V_k(x_0) \longrightarrow h(x_0)$$

وبحسب مبرهنة هارناك للتقارب **[1]:** فإن $V_k \longrightarrow V$ بانتظام على أي مجموعة متراصة في B و V توافقية في B، ومن $v_k(x_0) \leq V_k(x_0) \leq h(x_0)$ ينتج $V(x_0) = h(x_0)$ ومن $V_k \leq h$ ينتج $V \leq h$ في B.

والآن لنثبت أن $V \equiv h$ في B: لنفرض جدلاً أن $V \not\equiv h$، فتوجد $z \in B$ بحيث $V(z) < h(z)$، وبأخذ $\bar{u} \in S_\varphi$ بحيث $\bar{u}(z) > V(z)$ ولنضع:

$$u_k = max\{\bar{u}, V_k\} \in S_\varphi$$

وليكن $U_k = \overline{u_k}$ فتكون $U_k \in S_\varphi$ ومتزايدة و $U_k \geq V_k$ فحسب هارناك U_k تتقارب من دالة توافقية في B أي أن $U_k \longrightarrow U$ بحيث:

$$V \leq U \leq h\,, \quad U(x_0) = h(x_0) = V(x_0)$$

عندئذٍ فإن الدالة $U - V$ توافقية في B(لأنها فرق توافقيتين)، وغير سالبة $(U \geq V)$، وتنعدم عند النقطة الداخلية x_0 فحسب مبدأ القيمة الصغرى القوي **[1]** (دالّة توافقية غير سالبة تبلغ قيمتها الصغرى 0 عند نقطة داخلية تنعدم في كامل المنطقة) يكون $U \equiv V$ في B، لكن:

$$U(z) \geq U_k(z) \geq u_k(z) \geq \bar{u}(z) > V(z) = U(z)$$

وهذا تناقض، إذاً $V \equiv h$ في B، فتكون h توافقية في B، وبما أن x_0 اختيارية، عندئذٍ تكون h توافقية في كل Ω.

الآن بعد إثبات أن دالة بيرون h توافقية في كل Ω، يبقى أن نبيّن أنها تبلغ القيم الحدية φ على $\partial\Omega$. وهذا يكافئ أن تكون كل نقطة من $\partial\Omega$ منتظمة. والصعوبة أن حدود المنطقة متعددة الوجوه ليست ملساء: تتركب من أوجه وحواف ورؤوس، نعالج ذلك بتصنيف نقاط الحدود ثم بناء حاجز عند كل نقطة عبر شرط المخروط الخارجي للانتظام.

توطئة < التطابق المخروطي التام >:

ليكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ منطقة متعددة الوجوه، فعند كل نقطة حدية $\xi \in \partial\Omega$ يوجد $\rho > 0$ ومجموعة مفتوحة $D_\xi \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ بحيث (بعد نقل ξ إلى المبدأ):

$$\Omega \cap B_\rho = \{r\omega : 0 < r < \rho\,, \omega \in D_\xi\} = K_\xi \cap B_\rho$$

حيث $K_\xi = \{rw : r > 0\,, w \in D_\xi\}$ هو المخروط المماس.

أي أن Ω يتطابق محلياً مع مخروطه المماس K_ξ تطابقاً تاماً لا تقريبياً.

الإثبات:

لنبرهن على الصيغة المحدبة للوضوح، حيث:

$$\Omega = int\left(\bigcap_{i=1}^{N}\left\{x \in \mathbb{R}^n : a_i.x \le b_i\right\}\right), \quad a_i \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}, b_i \in \mathbb{R}$$

ثم نشير في النهاية إلى الحالة العامة.

بعد نقل ξ إلى المبدأ أي لنضع $\xi = 0$ فيكون $0 \in \partial\Omega$، نقسّم القيود $\{a_i \cdot x \le b_i\}$ قسمين حسب مرورها بالمبدأ:

القيود المارة بالمبدأ: هي التي $b_i = 0$ (إذ 0 على حدها: $a_i.0 = 0 = b_i$). نرمز لمجموعة دلائلها

$$J = \{i :\ b_i = 0\}.$$

القيود غير المارة بالمبدأ: هي التي $b_i \neq 0$ (وبما أن $0 \in \Omega \subseteq \{a_i.x \le b_i\}$ يكون $b_i \ge 0$ أي $b_i > 0$). نرمز لمجموعة دلائلها $I = \{i :\ b_i > 0\}$.

القيود المارة بالمبدأ مخروطية أي لكل $i \in J$، نصف الفضاء $a_i.x \leq 0$ مخروط: لأنه إذا كان $a_i.x \leq 0$ فإن $a_i.(tx) = t(a_i.x) \leq 0$ لكل $t > 0$. إذاً تقاطعهما:

$$K_\xi := \bigcap_{i\in J}\{x : \ a_i.x \leq 0\}$$

مخروط مماسي (تقاطع مخاريط). نعرّف $D_\xi := int(K_\xi) \cap \mathbb{S}^{n-1}$.

أما القيود غير المارة بالمبدأ يكون لكل $i \in I$، مستوى القيد $\{a_i.x = b_i\}$ لا يمر بالمبدأ، فمسافته عن المبدأ موجبة:

$$d_i = dist(0, \{a_i.x = b_i\}) = \frac{b_i}{|a_i|} > 0$$

وبأخذ $\rho = \frac{1}{2}\min_{i\in I} d_i > 0$، عندئذٍ لكل $x \in B_\rho$ ولكل $i \in I$:

$$a_i.x \leq |a_i||x| < |a_i|\rho \leq |a_i|d_i = b_i$$

أي أن القيد $a_i.x \leq b_i$ محقق تلقائياً داخل B_ρ فالقيود غير المارة بالمبدأ غير فعالة في هذا الجوار.

ينتج من ذلك القيود الفعالة داخل B_ρ، هي $\{a_i.x \leq 0\}_{i\in J}$ أي المارة بالمبدأ (لأن قيود I محققة تلقائياً في الخطوة 2). إذاً:

$$\Omega \cap B_\rho = int(K_\xi) \cap B_\rho = \{r\omega : 0 < r < \rho\,, \omega \in D_\xi\} = K_\xi \cap B_\rho$$

وهذه مساواة تامة لا تقارب. إذ لم نهمل أي حد، بل أثبتنا أن القيود البعيدة لا أثر لها داخل B_ρ.

وبما أن $int(K_\xi)$ تقاطع منتهٍ لأنصاف فضاءات مفتوحة فهو مفتوح ومنه $D_\xi = int(K_\xi) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ مفتوح في $\mathbb{S}^{n-1}$، وحد D_ξ يتكون من تقاطع المستويات $\{a_i.x = 0\}_{i\in J}$ مع الكرة، أي أقواس من دوائر كبرى، فهو مسطّح على قطع.

ملاحظة < الحالة غير المحدبة >: برهنّا أعلاه على الصيغة المحدبة (تقاطع أنصاف فضاءات) للوضوح. في الحالة العامة يبقى التطابق المخروطي صحيحاً بالاعتماد على البنية المسطحة على قطع للحدود: أي قرب ξ، يكون $\partial\Omega$ اتحاداً منتهياً من وجوه مستوية، بعضها يمر ب ξ وبعضها لا، الوجوه التي لا تمر ب ξ مغلقة ولا تحويه، فمسافتها عنه موجبة، فنبعدها بأخذ كرة B_ρ صغيرة كفاية فتغدو غير فعالة. أما الوجوه المارة ب ξ فكل منها يطابق موضعياً مخروطه المماس عند ξ، لذا يكون $\partial\Omega \cap B_\rho$ مساوياً تماماً لاتحاد هذه المخاريط المماسة، وهو مخروط ومنه:

$$\Omega \cap B_\rho = K_\xi \cap B_\rho$$

بالضبط حيث K_ξ هو المخروط المماس وأثره الزاوي D_ξ حده أقواس دوائر كبرى.

أهمية هذه التوطئة أنها تختزل دراسة الحد إلى هندسة D_ξ على الكرة $\mathbb{S}^{n-1}$.

توطئة < شرط وجود المخروط الخارجي >:

تحوي المتممة $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ مخروطاً خارجياً عند ξ (برأس ξ وزاوية صلبة موجبة) إذا وفقط إذا كان:

$$\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1} \quad \text{أي} \quad |D_\xi| < |\mathbb{S}^{n-1}|$$

الإثبات:

لنضع $\xi = 0$، ونبرهن الاتجاهين.

الاتجاه ($\Longleftarrow$): أي إذا كان $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$ فيوجد مخروط خارجي.

بما أن $\overline{D_\xi}$ مغلقة و $\overline{D_\xi} \neq \mathbb{S}^{n-1}$ فإن:

$$U = \mathbb{S}^{n-1} \backslash \overline{D_\xi}$$

مفتوحة وغير خالية، لنختار $\omega_0 \in U$، ولأن U مفتوحة، توجد نصف زاوية $\beta \in (0, \pi/2]$ بحيث تكون الكرة الجيوديزية المفتوحة:

$$E_0 = \{\omega \in \mathbb{S}^{n-1} : \ (\omega, \omega_0) < \beta\} \subseteq U$$

ومساحتها $|E_0| > 0$، نعرف المخروط الخارجي بمحور $e = \omega_0$ ونصف الزاوية β:

$$C_\xi = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x.e \geq |x| \cos\beta \quad \}$$

ولأنّ $E_0 \subseteq U = \mathbb{S}^{n-1} \backslash \overline{D_\xi}$، فكلّ اتّجاه $\omega \in E_0$ ليس في D_ξ، أي $r\omega \notin \Omega$ لأجل r صغيرة. فبأخذ ρ صغيراً كفايةً (ضمن جوار التطابق المخروطي) نحصل على: $C_\xi \cap B_\rho \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \Omega$.

الزاوية الصلبة موجبة $\beta > 0$ عندئذٍ فإن $|E_0| > 0$ ، وبالتالي فيكون C_ξ مخروطاً خارجياً فعلياً.

الاتجاه ($\Longrightarrow$): إذا وجد مخروط خارجي فإن $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$.

نفترض وجود C_ξ مخروطاً خارجياً أثره الزاوي $E_0 \subset \mathbb{S}^{n-1}$ بمساحة موجبة، بحيث: $C_\xi \cap B_\rho \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \Omega$

عندئذٍ لكل $\omega \in E_0$ يكون $r\omega \in C_\xi \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ ل r صغيرة، أي $r\omega \notin \Omega$ وبالتالي فإن $\omega \notin D_\xi$، ومنه:

$$E_0 \cap D_\xi = \emptyset \quad \Longrightarrow D_\xi \subseteq \mathbb{S}^{n-1} \backslash E_0$$

ولأن المجموعة E_0 مفتوحة، فمتممتها $\mathbb{S}^{n-1} \backslash E_0$ مغلقة وتحوي انغلاق D_ξ، فينتج:

$$\overline{D_\xi} \subseteq \mathbb{S}^{n-1} \backslash E_0$$

ولأن $|E_0| > 0$ فإن $\mathbb{S}^{n-1} \backslash E_0 \neq \mathbb{S}^{n-1}$، ومنه $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$.

مبرهنة < التصنيف الثلاثي >: لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ منطقة متعددة الوجوه محدودة محققة لشرط الجانب الواحد (أي كل زاوية عند الحد أصغر تماماً من 2π). فعند كل نقطة من $\partial\Omega$ يتحقق $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$، ومن ثم يوجد مخروط خارجي عند ξ.

الإثبات:

بوضع ξ في المبدأ، يكون Ω مخروطاً بأثرٍ زاوي D_ξ، نميّز الحالات حسب بُعد الطبقة الحدّية التي تقع عليها ξ.

إذا كانت ξ نقطة وجه ذو البعد $n-1$، عندئذٍ يوجد مستوٍ واحد مار بالمبدأ، بمتجه ناظمي واحدي ν، بحيث يكون Ω محلياً هو نصف الفضاء المفتوح:

$$\Omega \cap B_\rho = \{x \in B_\rho : \ x.\nu < 0\}$$

وأثره الزاوي هو نصف الكرة المفتوحة:

$$D_\xi = \{\omega \in \mathbb{S}^{n-1} : \ \omega.\nu < 0\}, \quad \overline{D_\xi} = \{\omega : \ \omega.\nu \leq 0\}$$

فالنصف الآخر المفتوح $\{w.\nu > 0\}$ لا ينتمي إلى $\overline{D_\xi}$، ومنه $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$. (بل توجد كرة خارجية كاملة ملامسة، وهي أبسط مخروط خارجي).

وإذا كانت ξ نقطة حافة ذات البعد $n-2$ عندئذٍ يلتقي عندها وجهان بزاوية ثنائية الوجه $\theta \in (0,2\pi)$. باختيار إحداثيات مناسبة نفصل اتجاه الحافة عن المستوي العمودي عليها: يتطابق Ω محلياً قرب ξ مع:

$$\Omega \cap B_\rho \cong \left(S_\theta \times \mathbb{R}^{n-2}\right) \cap B_\rho$$

حيث $S_\theta \subset \mathbb{R}^2$ قطاع مستوٍ مفتوح بزاوية θ، و $\mathbb{R}^{n-2}$ اتجاه الحافة. (هذا التطابق المحلي قرب ξ تام للمخروط المماس).

أثره الزاوي D_ξ هو المجموعة القطبية المتولدة عن S_θ على الكرة. وبما أن $\theta < 2\pi$، فإن المتممة تحوي أثر الوتد المكمِّل بزاوية ثنائية الوجه:

$$2\pi - \theta > 0$$

وهو مخروط بزاوية صلبة موجبة. إذاً:

$$\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1} \quad \text{أي} \quad |D_\xi| < |\mathbb{S}^{n-1}|$$

(نلاحظ أنه إذا كانت $\theta > \pi$ زاوية داخلية فلا توجد كرة خارجية، لكن الوتد الخارجي بزاوية $2\pi - \theta$ يكفي، وهنا تظهر ضرورة المخروط لا الكرة).

إذا كانت ξ نقطة رأس معزول، يلتقي عنده عدد منتهٍ من الأوجه، أثره الزاوي D_ξ هو مضلع كروي على $\mathbb{S}^{n-1}$ (تقاطع منتهٍ من أنصاف الكرات المحددة بالمستويات المارة بالرأس). والزاوية الصلبة ل Ω عند الرأس هي $|D_\xi|$.

وبما أن الرأس محقق لشرط الجانب الواحد، وبالفرض $|D_\xi| < |\mathbb{S}^{n-1}|$، أي يبقى على الكرة جزء بمساحة موجبة خارج $\overline{D_\xi}$. ومنه $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$.

ففي الحالات الثلاث يتحقق $\overline{D_\xi} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$. وحسب التوطئة السابقة يوجد مخروط خارجي عند ξ. ولأن كل نقطة من $\partial\Omega$ تقع في إحدى هذه الطبقات، عندئذٍ يتحقق الشرط عند كل نقطة.

ملاحظة: الكرة الخارجية في حالة الوجه ليست استثناء بل حالة خاصة من المخروط (نصف الفضاء مخروط). فالمعيار الواحد يغطي الطبقات الثلاث دفعة واحدة، والتصنيف يبين لماذا يتحقق الشرط في كل نوع، وشرط الجانب الواحد ضروريّ: إذ أن الزاوية $(\theta = 2\pi)$ تجعل $\overline{D_\xi} = \mathbb{S}^{n-1}$ فينعدم المخروط الخارجي.

مبرهنة < شرط المخروط الخارجي للانتظام >:

إذا حقق Ω شرط المخروط الخارجي عند ξ، فإن ξ منتظمة، وذلك لكل $n \geq 2$.

الإثبات:

بوضع $\xi = 0$، وليكن $E_0 \subset \mathbb{S}^{n-1}$ الأثر الزاوي للمخروط الخارجي C_ξ (كرة جيوديزية مفتوحة مركزها e ونصف قطرها الزاوي $\beta > 0$). فالأثر الزاوي للمنطقة $D = \{\omega : r\omega \in \Omega\}$ يحقق $D \cap E_0 = \emptyset$، ومنه:

$$\overline{D} \subseteq \mathbb{S}^{n-1} \backslash E_0 \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}.$$

بما أن $\overline{D}$ متراصة داخل المنطقة المفتوحة $\mathbb{S}^{n-1} \backslash \overline{E_0^`}$ (حيث $E_0^` \subset E_0$ كرة جيوديزية مغلقة أصغر ذات مساحة موجبة)، نختار منطقة كروية مفتوحة ملساء الحد $D^`$ بحيث:

$$\overline{D} \subset D^` \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$$

أي نوسع D نحو المخروط الخارجي فتبقى $D^`$ منطقة على الكرة.

ولتكن $\mu_1 = \mu_1(D^`) > 0$ أول قيمة ذاتية لمسألة ديرخليه لمؤثر لابلاس–بلترامي على $D^`$ و ψ دالتها الذاتية:

$$-\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\psi = \mu_1\psi \quad in\ D^`, \quad \psi = 0 \quad on\ \partial D^`, \ \psi > 0 \ in\ D^`$$

وجود ψ وموجبيتها وكون $\mu_1 > 0$ ولأن $\overline{D} \subset D^`$ متراصة داخل المنطقة المفتوحة، يوجد ثابت $c > 0$ بحيث:

$$\psi \geq c > 0 \quad on\ \overline{D}$$

نبحث الآن عن أس λ يجعل الدالة المتجانسة $W = r^\lambda\psi(w)$ توافقية. وبتطبيق اللابلاسيان في الإحداثيات الكروية على W:

$$\partial_r^2 W = \lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2}\psi \ , \ \frac{n-1}{r}\partial_r W = (n-1)\lambda r^{\lambda-2}\psi \ , \ \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} W = r^{\lambda-2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\psi$$

وبالجمع:

$$\Delta W = r^{\lambda-2}[\lambda(\lambda+n-2)\psi - \mu_1\psi]$$

فتكون W توافقية إذا وفقط إذا كان: $\lambda(\lambda+n-2) = \mu_1$. وبأخذ الجذر الموجب:

$$\lambda = \frac{-(n-2)+\sqrt{(n-2)^2+4\mu_1}}{2} > 0$$

وهو موجب لأن $\mu_1 > 0$.

الآن لنعرّف الحاجز على $\Omega \cap B_\rho$ (حيث $w \in \overline{D} \subset D^{`}$):

$$W(rw) = r^\lambda \psi(w) \, , \qquad W(0) = 0$$

ونتحقق من خواصه الثلاث:

1. فوق توافقي: لأنه توافقي و $\lambda(\lambda+n-2) = \mu_1$:

$$\Delta W = r^{\lambda-2}[\mu_1\psi - \mu_1\psi] = 0$$

عندئذٍ فإن W توافقي في $\Omega \cap B_\rho$ وبالتالي فهو فوق توافقي.

2. $W(0) = 0$ لأن $\lambda > 0$ يكون $r^\lambda \longrightarrow 0$ عندما $r \longrightarrow 0^+$ و ψ محدودة، عندئذٍ فإن:

$$W(rw) \longrightarrow 0 = W(0)$$

3. $W > 0$ فيما عدا الرأس: عندما يكون $r > 0$ يكون $r^\lambda > 0$، و $\psi \geq c > 0$ على $\overline{D}$. إذاً $W(rw) \geq cr^\lambda > 0$ وذلك لكل $rw \neq 0$، وتنعدم عند الرأس $r = 0$ فقط.

إذاً W تمثل حاجزاً عند ξ، ووجود الحاجز يكافئ انتظام النقطة، عندئذٍ تكون ξ منتظمة.

مبرهنة < بلوغ القيم الحدية عند نقطة منتظمة> [1]:

إذا كانت ξ منتظمة و φ مستمرة عند ξ، عندئذٍ فإن دالة بيرون تبلغ القيمة الحدية عندها:

$$\lim_{x\to\xi} h(x) = \varphi(\xi).$$

الإثبات: ليكن $\varepsilon > 0$، وباستمرار φ، يوجد $\delta > 0$ بحيث $|\varphi - \varphi(\xi)| < \varepsilon$ على $\Omega\partial \cap B_\delta(\xi)$. وبوضع

$$M_0 = \sup_{\Omega\partial}|\varphi|.$$

وعلى المجموعة المتراصة $K = \overline{\Omega}\backslash B_\delta(\xi)$ تبلغ W حداً أدنى موجب $m_\delta > 0$، وباختيار $k = 2M_0/m_\delta$، فيكون $kW \geq 2M_0$ على K.

الدالة $s = \varphi(\xi) + \varepsilon + kW$ فوق توافقية و $s \geq \varphi$ على $\Omega\partial$، أي على $\Omega\partial \cap B_\delta$ يكون:

$$\varphi < \varphi(\xi) + \varepsilon \leq s$$

وعلى $\Omega\partial\backslash B_\delta$ يكون $s \geq \varphi(\xi) + \varepsilon + 2M_0 \geq M_0 \geq \varphi$. فحسب مبدأ المقارنة $h \leq s$. وبالتناظر

$h \geq \varphi(\xi) - \varepsilon - kW$. إذاً:

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - kW(x) \leq h(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + kW(x)$$

وبأخذ $x \longrightarrow \xi$ فإن $W \longrightarrow 0$ ثم $\varepsilon \longrightarrow 0$ عندئذٍ ينتج $\lim_{x\to\xi} h(x) = \varphi(\xi)$.

الخلاصة < وجود ووحدانية الحل على منطقة متعدّدة الوجوه >:

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ منطقة متعدّدَة الوجوه محدودة محقّقة لشرط الجانب الواحد، ولتكن $f \in C_{\mathrm{loc}}^{\alpha}(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$ و $g \in C(\partial\Omega)$. عندئذٍ لمسألة ديرخليه لمعادلة بواسون:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

حلٌّ **وحيد** $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

الإثبات:

لتكن $\xi \in \partial\Omega$ اختيارية، وبما أنّ Ω محقّقة لشرط الجانب الواحد، فإنّ $\overline{\mathrm{D}_{\xi}} \subsetneq \mathbb{S}^{n-1}$ بالتعريف، وحسب التوطئة (شرط وجود المخروط الخارجي) فإنه يوجد مخروطٌ خارجيٌّ بزاويةٍ صلبةٍ موجبة عند ξ، وبحسب المبرهنة (شرط المخروط الخارجي للانتظام) تكون ξ منتظمة، ولأنّ ξ اختيارية، فكلّ نقاط $\partial\Omega$ منتظمة.

الوجود: أُنشئت دالّة بيرون **[1]**:

$$h(x) = \sup\left\{v(x) : \quad v \in \mathrm{S}_{\varphi}\right\} \quad , \qquad x \in \Omega$$

حيث $\varphi = (g - w)|_{\partial\Omega}$ و w الكمون النيوتوني، وأُثبت أنّها توافقيةٌ في Ω. ولأنّ كلّ نقطةٍ حدّيةٍ منتظمة و φ مستمرة، فإنّ h تبلغ القيمة الحدّية عند كلّ ξ (بالمبرهنة السابقة)، فتكون $h \in C(\overline{\Omega})$ وتحقّق

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & in\ \Omega \\ h = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ومن الكمون النيوتوني $-\Delta w = f$، تكون $u = h + w$ حلّاً للمسألة:

$$-\Delta u = -\Delta h - \Delta w = 0 + f = f \quad in\ \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi + w = g$$

و $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

الوحدانية: بفرض أن u_1 و u_2 حلَّين للمسألة، فإنّ فرقَهما $v = u_1 - u_2$ يحقّق $-\Delta v = f - f = 0$، أي أن v توافقيةٌ في Ω، ومستمرةٌ على $\overline{\Omega}$، وتنعدم على الحدّ: $v = g - g = 0$ على $\partial\Omega$. وبما أنّ Ω محدودة و v توافقيةٌ مستمرةٌ على $\overline{\Omega}$، فحسب مبدأ القيمة العظمى (والصغرى) **[1]** تبلغ v قيمتيها العظمى والصغرى على $\partial\Omega$، حيث $v = 0$، ومنه $v \equiv 0$ في $\overline{\Omega}$، أي أن $u_1 \equiv u_2$.

المراجع:

[1] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S., 2001. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.

[2] ARMITAGE, D. H.; GARDINER, S. J., 2001. Classical Potential Theory. Springer-Verlag, London.

[3] EVANS, L. C., 2010. Partial Differential Equations. 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society, Providence, RI.

[4] SALSA, S., 2016. Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory. 3rd ed., Unitext 99, Springer, Cham.

[5] MAZ'YA, V.; ROSSMANN, J., 2010. Elliptic Equations in Polyhedral Domains. Mathematical Surveys and Monographs 162, American Mathematical Society, Providence, RI.

[6] GRISVARD, P., 2011. Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Classics in Applied Mathematics 69, SIAM, Philadelphia.

[7] KOZLOV, V. A.; MAZ'YA, V. G.; ROSSMANN, J., 1997. Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities. Mathematical Surveys and Monographs 52, American Mathematical Society, Providence, RI.

[8] KOZLOV, V. A.; MAZ'YA, V. G.; ROSSMANN, J., 2001. Spectral Problems Associated with Corner Singularities of Solutions to Elliptic Equations. Mathematical Surveys and Monographs 85, American Mathematical Society, Providence, RI.

[9] DAUGE, M., 1988. Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains: Smoothness and Asymptotics of Solutions. Lecture Notes in Mathematics 1341, Springer-Verlag, Berlin.

[10] ROCKAFELLAR, R. T., 1970. Convex Analysis. Princeton Mathematical Series 28, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[11] ZIEGLER, G. M., 1995. Lectures on Polytopes. Graduate Texts in Mathematics 152, Springer-Verlag, New York.

[12] MILLER, K., 1967. Barriers on Cones for Uniformly Elliptic Operators. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 76(1), pp. 93-105.

[13] LI, H.; NICAISE, S., 2021. A Priori Analysis of an Anisotropic Finite Element Method for Elliptic Equations in Polyhedral Domains. Computational Methods in Applied Mathematics, 21(1), pp. 145-177.

دراسة المركبات الكيميائية لمستخلصات أوراق وأزهار نبات لسان الجمل *Silybum marianum* المنتشر في سوريا

اعداد الطالبة : زينب طوبال ، اشراف : د. حسن وسوف ، د. يوسف زريق

ملخّص

دُرس التركيب الكيميائي لمستخلصات أوراق وأزهار نبات لسان الجمل *Silybum marianum* بطريقة الكروماتوغرافيا الغازية . مطيافية الكتلة GC/MS.

تمّ الحصول على المستخلصات بوساطة جهاز Ultrasound- assisted باستخدام خلات الايتيل.

تم تحديد 51 مركباً لمستخلص الأوراق، تشكل هذه المركبات 99.93% من المجموع الكلي للمركبات الموجودة في المستخلص.

كما تم تحديد 53 مركباً لمستخلص الأزهار، تشكل هذه المركبات 99.61% من المجموع الكلي للمركبات الموجودة في المستخلص.

أهم المركبات الرئيسية لمستخلص الأوراق هي:

42,4% Methyl linolelaidate

28,2% Methyl octadec -11- enoate.

13,7% Methyl hexadecanoate.

3,9% Methyl 16 – methyl – heptadecaneoate

أهم المركبات الرئيسية لمستخلص الأزهار هي:

22,7% Lupeol

14,4% Alpha-Amyrin

13,5% Mehtyl hexadecanoate.

10,4% Octahydro -1H- carbazole

الكلمات المفتاحية: لسان الجمل، التركيب الكيميائي للمستخلصات.

Study of chemical compound of leaves and flowers extracts of *Silybum marianum* Distributed In Syria

Abstract

Chemical composition of the Silybum marianum leaves and flowers extract by Ethyl acetate, was determined by GC/MS. The extracts obtained by Ultrasound- assisted contain 51 components of leaves extract, accounting for 99,93%.

Contain 53 components of flowers extract, accounting for 99,61%

The major components of leaves extract determined were 42,4%Methyl linolelaidate, 28,2% Methyl octadec -11- enoate

, 13,7% Methyl hexadecanoate, 3,9% Methyl 16- methyl – heptadecaneoate

The major components of flowers extract determined were 22,7% lupeol, 14,4% alpha – AMYRIN, 13,5% Methyl hexadecanoate, 10,4% Octahydro-1H-carbazole.

Key words: Silybum marianum, chemical composition of extracts.

مقدمة:

أطلق على نبات لسان الجمل Silybum marianum أسماء عديدة (هي: شوك مريم، شوك الجمل، حليب الشوك، الحرشف البري، السلبين المريمي أو خرفيش الجمال)

ينتمي هذا النبات إلى الفصيلة النجمية، وهو نبات بري شوكي يتبع جنس Silybum.

يُعرف هذا النبات ببعض أنحاء سورية والعراق بالحرشف البري أو الكعيب وفي العراق تُعرف بـ العاكول أو الكلغان.

نبات لسان الجمل هو نبات شوكي حولي يصل ارتفاعه إلى 120 سم، يتميز بأوراق خضراء لامعة، مفصصة، ذات عروق بيضاء لامعة وحوافها مسننة بأشواك قوية حادة، الأزهار محاطة بقنابات (أوراق صغيرة) ذات أشواك قوية معكوفة، والأزهار أنبوبية الشكل بلون أرجواني أو أبيض، تظهر في أواخر الربيع حتى الصيف، الساق قائم، سميك، صلب، محزز ومتفرع. [1]

الموطن الأصلي لهذا النبات هو منطقة البحر الأبيض المتوسط، ويشمل ذلك جنوب أوروبا، شمال إفريقيا، والشرق الأوسط ينمو هذا النبات الشوكي بكثرة في هذه المناطق، كما تم إدخاله وانتشاره في أماكن أخرى مثل أمريكا الشمالية، ينتشر بكثرة في سهول وجبال فلسطين، وشمال الأردن خاصة في سهول أربد (بيت يافا) من شهر آذار وحتى تموز. [2, 3, 4]

يتواجد هذا النبات على جوانب الطرقات والمروج، والأراضي البور، ويتحمل التربة الفقيرة والشمس الكاملة. [5]

يمتاز هذا النبات بفعالية طبية عالية وخاصة البذور لاحتوائه على المركب الفعال الرئيسي السيليمارين الذي يتركز بشكل كبير في البذور بنسبة تتراوح بين 4-6% وهو عبارة عن مزيج من

مركبات الفلافونوليجنان أهمها السيليبينين أ، ب، السيليكريستين، السيليديانين والإيزوسيلبين [6]، ويمتاز بفعالية مضادة للأكسدة [7]، مضاد للالتهابات [8]، مضاد للبكتريا [9]، مضاد للسرطان [10].

ووجد أن هذا النبات غني جداً بالعديد من الفلافونويدات، الأحماض الدهنية، الزيوت الطيارة، الأحماض الامينية، الستيرولات، البروتينات، الكربوهيدرات.

درس العالم Ouided وزملاؤه في الجزائر عام 2025 الفعالية الطبية لنبات لسان الجمل الذي ينتمي إلى الفصيلة النجمية Asteraceae وجنس (Silybum)، بينت الدراسة أن هذا النبات له دور طبي هام في معالجة أمرض الكبد، فهو يساعد في تقليل التهاب وتليف الكبد، معالجة سرطان الكبد [11]

كما قام العالم Juei-Tang وزملاؤه في إفريقيا عام 2025 بدراسة فعالية نبات لسان الجمل في خفض مستوى السكر في الدم لدى الأشخاص المصابين بمرض السكري من النوع الثاني [12]

ـــــ أما الدراسة التي أجراها الباحث Vikas وزملاؤه في الهند عام 2026 فقد بينت أن نبات لسان الجمل من النباتات الطبية الهامة كمضادات للأكسدة والالتهابات [13]

بينت دراسة أجراها Harveer وزملاؤه في الهند عام 2021 احتواء نبات لسان الجمل على مركبات دوائية هامة السيلمارين تستخدم في علاج اضطرابات الجهاز الهضمي حيث تقلل الشعور بالقيء والغثيان، الإمساك المزمن، البواسير، القولون العصبي، تُساهم في خفض الكوليسترول والدهون، كما تستخدم لعلاج التهاب الشعب الهوائية. [14].

في حين حذر الباحث Chelsey وزملاؤه في الدراســـة التي أجراها عام 2025 من خطر تناول المستحضر الطبي لنبات لسان الجمل أثناء العلاج لأنه قد يؤدي إلى زيادة حدوث أثار جانبية رد فعل تحســسـي شـديد بالأخص لدى الأشـخاص الذين يعانون حسـاسـية من النباتات الأخرى في العائلة النجمية، مثل الأقحوان، انتفاخ البطن، إسهال، عسر الهضم، فقدان الشهية. [15]

في العراق قامت العالمة Rasha وزملاؤها عام 2020، باســتخلاص الأوراق، الأزهار، البذور لنبات لسـان الجمل كلاً على حدا بجهاز سـوكسـيليه باسـتخدام الهكسـان والايتانول كمذيب، أظهرت نتائج تحليل جهاز (GC/MS) احتواءه على العديد من المركبات مثل:

التربينات، الكحولات الدهنية، الأحماض المشـبعة وغير المشـبعة، السـكريات الأحادية، الفايتوسـتيرول والكاتيكين بنسب مختلفة في أجزاء النبات. [16]

قامت الدكتورة دينا حداد، الأسـتاذة في قسـم علم الحياة النباتية في كلية العلوم ـــــ جامعة اللاذقية، مشكورة بتصنيف النبات المدروس، وتمّ توضيحه في الجدول التالي:

التصنيف		S.marianum
المملكة	Kingdom	Plantae النباتية
الشعبة	Phylum	Magnoliophyta النباتات الوعائية
الصف	Class	Magnoliopsida ثنائيات الفلقة
تحت الصف	Subclass	Asteridae النجميات
الرتبة	Order	Asterales النجميات
الفصيلة	Family	Asteraceae النجمية
الجنس	Genus	*Silybum* السَّلْبِين
النوع	Species	(*S.marianum*) السلبين المريمي/ لسان الجمل
الاسم العلمي		*Silybum marianum*

الأسماء المحلية	لسان الجمل

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى الدراسة الكيميائية لمستخلصات أوراق وأزهار نبات لسان الجمل *Silybum marianum* بمذيب خلات الايتيل بواسطة جهاز الأمواج فوق الصوتية.

مواد البحث وطرائقه:

جُمعت أوراق وأزهار نبات لسان الجمل في شهر أيار عام 2024 من ريف اللاذقية، جففت الأوراق والأزهار في مكان ظليل جيد التهوية عند درجة حرارة الغرفة ($20 - 25C^o$) مدة شهر تقريباً ثم طحنت بمطحنة كهربائية للحصول على النعومة المطلوبة.

تم الحصول على المستخلصات بنقع الأوراق والأزهار لمدة 24 ساعة ومن ثم استخلاصها بجهاز الأمواج فوق الصوتية Ultrasound- assisted.

حيث تم وضع العينة النباتية المطحونة في وعاء وأضيف إليها مذيب خلات الإيتيل بنسبة محددة مذيب خلات الايتيل 200ml: 15gr عينة نباتية مطحونة حيث تم غمر الوعاء داخل الحمام المائي عند درجة الحرارة $30C^o$ والاستخلاص لمدة 30 دقيقة ومن ثم ترشيح العينة باستخدام ورق ترشيح لفصل البقايا الصلبة عن السائل الغني بالمستخلص وتبخير المذيب من السائل الناتج باستخدام المبخر الدوار Rotary Evaporater عند درجة الحرارة $77C^o$ للحصول على مستخلص مركز

ونقي. حُفظ بعد ذلك المســـتخلص الناتج في أنبوب زجاجي عاتم محكم الإغلاق في الثلاجة بدرجة الحرارة 4C° إلى حين إجراء التحليل.

تحليل الخلاصة العضوية:

أنجز التحليل من خلال حقن 2µL من المستخلص في جهاز GC/MS من نوع Shimadzu طراز GCMS-QP2010PLUS باستخدام عمود شعري من النوع (TRB- WAX) بأبعاد قدرها (Length 60m* diameter 0,25mm* thickness0.25µm) وغاز حامل هو الهيليوم نقاوته 99,9999% بمعدل تدفق 1mL/min أما المذيب المستخدم كان الاتير تم ضبط درجة حرارة الحاقن عند 250C° ودرجة حرارة مصـــدر التأين عند 225C° درجة حرارة رباعي الأقطاب 150 – 130 درجة مئوية.

بدأ البرنامج الحراري من الدرجة 200C° حيث كانت درجة حرارة عمود الفرن وتم الإبقاء على هذه الدرجة لمدة دقيقة واحدة (1min) ثم رفعت إلى الدرجة 270C° بمعدل 5C° لكل دقيقة وتم الإبقاء على هذه الدرجة مدة 35min كما ســـجلت أطياف الكتلة من: m/z15 حتى: m/z450 بعدها تم تحديد المركبات الكيميائية للمســتخلص العضــوي للأوراق والأزهار المجففة في الظل بمقارنة أطياف

الكتلة الناتجة لكل قمة مع أطياف الكتلة للمركبات الموجودة في المكتبة المتوفرة ضـــمن الجهاز HP Mass Sperliral Library Nist Wiley.

النتائج والمناقشة:

أعطى الاستخلاص، باستخدام جهاز الأمواج فوق الصوتية بمذيب خلات الايتيل لعينات الأوراق، مستخلص بلون أخضر غامق وبنسبة مئوية وزنية 7,24% للأوراق

ثمّ التعرف بعد تحليل مستخلص خلات الإيتيل للأوراق باستخدام جهاز GC/MS على 51 مركباً والتي شكلت نسبة 99,93% من المجموع الكلي للمركبات الموجودة في المستخلص، كما هو موضح في الجدول (1)

الجدول (1) مكونات مستخلص خلات الايتيل لأوراق نبات لسان الجمل Silybum marianum

Peak	R.Time	Compound name	%Percentage
1	12,6257	Tetradecane (CAS)$$ n- Tetradecane$$ Iso tetra decane $$ n- tetra – decane	0.1021
2	13,8674	Sulfurous acid, 2- propyl undecyl ester	0.092
3	14,3965	Phenol, bis (1, 1 – dimethyl ethyl) – (CAS) $$ Di – tert – Butyl phenol	0.0922
4	15,0597	4- Undecanone (CAS) $$ ALHEPTYL – N – PROPYL KETONE $$ UNDECAN-4- ONE	0.203
5	15,5818	Octane (CAS) $$ n- Octane $$ Octane (DOT) $$ Iso octane $$ n- C_8H_{18} $$ Oktan	0.1012
6	16,1745	Decane (CAS) $$ n- Decane $$ Isodecane $$ n- $C_{10}H_{22}$$ DECAN $$ DECYL HYDRIDE	0.1513
7	16,5696	Tetradecanoic acid, methyl ester (CAS) $$ Methyl myristate $$ Uniphat A50	0.3364
8	17,2539	Tetradecane (CAS) $$ n – Tetradecane $$ Isotetradecane $$ n- tetra – decane	0.1552
9	17,7407	Methyl 8- Oxo octanoate $$ OCTANOIC ACID, 8- OXO - , METHYL ESTER	0.1005

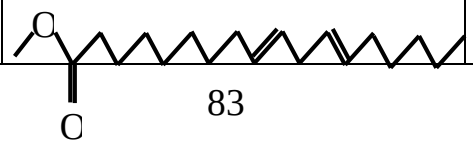
10	17,9947	2, 3,4, 7-TETRAHYDRO-1 H- INDOLO (2, 1-A) (2) BENZAZEPINE	0.1966
11	18,6156	Methyl 11- hexadecaenoate	0.4921
12	18,8625	Hexadecanoic acid, methyl ester (CAS) $$ Methyl palmitate $$ Uniphat A60	13.7915
13	19,1024	Pentadecanoic acid, 14- methyl -, methyl ester (CAS) $$ methyl iso – palmitate	0.2937
14	19,2223	Benzenepropanoic acid, 3,5- bis (1,1 – dimethyl ethyl) – 4hydroxy-, methyl ester	0.7006
15	19,4128	butyl 3- acetyl propanoate	0.0882
16	19,5963	Cyclohexane acetic acid, 3- OXO-, methyl ester $$ Methyl (3- Oxo cyclohexyl) acetate	0.1156
17	19,7303	Eicosane $$ n- Eicosane $$ Icosane#	0.2608
18	19,9208	Cis – 3 – (2- hydroxyl- 1, 1,2 – trimethyl propan) -1- cyclopentanol	0,1299
19	20,2454	2- Hexanoicacid, methyl ester (CAS) $$ Methyl 2- hexenoate	0,181
20	20,3441	Methacrylamide $$ 2- Propenamide, 2- methyl - $$ .alpha. – Methyl acrylic amide	0,1131
21	20,6405	Dimethyl phthalate $$ 1,2 – Benzendicarboxylic acid, dimethyl ester $$ Avolin	0,1706
22	20,7886	2- Oxepanone, 7- hexyl – (CAS) $$ epsilon – Dodecalactone $$ 7 – Hexyl – 2 – Oxe panone	0,2093
23	21,4025	9,12 – Octadecadienoic acid, methyl ester, (E,E) – (CAS) $$ Methyl lionle laidate	42,4689
24	21,5083	11- Octadecenoicacid, methyl ester$$ Methyl 11- Octadecenoate	28,2907
25	21,8258	Methyl 16- methyl – heptadecanoate	3,9344
26	22,5101	(E) -2,2,8,8 – Tetramethyl – 4 – nonen – 3,7 – diol	0,1262

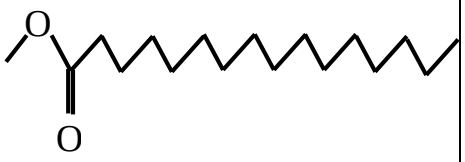
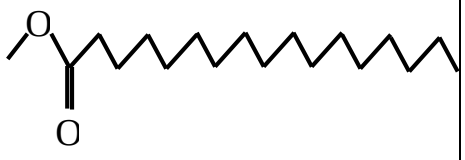
27	22,6512	2- Mercaptothiazole$$ 1,3 – Thiazol -2- yl hydrosulfide#	0,1423
28	22,9546	9,12 – Octadecadienoic acid, methyl ester, (E,E) - $$ Methyl Linolelaidate	0,3031
29	23,7236	(E) -2- Methyl -1- Piperidin -1- yl propenethione	0,1731
30	24,1963	Globulol $$ (-) – Globulol	0,133
31	24,7608	4,4 – Difluoro -3- hexanone $$ 3- Hexanone, 4,4 – difluoro – (CAS)	0,4064
32	24,9795	2- Butenal, 2- ethenyl - $$ crotonaldehyde, 2- Vinyl- $$ (ZZ) -2- Vinyl -2- butenal#	0,4201
33	25,2405	METHYL 3- ACETYLHYDROXY PALMITATE	0,1631
34	25,4451	Eicosanoic acid, methyl ester (CAS) $$ Arachidic acid methyl ester	0,5806
35	26,7292	Octacosane $$ n- Octacosane	0,2353
36	27,0679	7- Dehydrocholesteryl isocaproate	0,3103
37	27,4065	(1R*, 45*, 55*) -4- Ethyl – 2,9 – dioxabicyclo [3.3.1] nonan-7-one	0,1147
38	27,7381	Phenol, 2,2' – methylene bis [6 –(1,1- dimethyl ethyl) -4- methyl – (CAS) $$ CAO – 14	0,2829
39	28,7752	Hexadecane, 2- methyl - $$ 2- Methyl hexadecane	0,2071
40	29,5795	Docosanoic acid, methyl ester (CAS) $$ Methyl behenate$$ Methyl docosanoate	0,3837
41	30,1369	1,2 – Benzendi carboxylic acid, mono (2- ethyl hexyl) ester $$ Mehp	0,6598
42	30,8918	Hexacosane (CAS) $$ n- Hexacosoane$$ n- hexacosane $$ Cerane	0,2325
43	33,0296	Tetradecanoic acid, 2- hydroxyl -1- (hydroxyl methyl) ethyl ester $$ Myristin, 2- mono -	0,1937
44	33,8621	Heneicosanoic acid, 18- Propyl methyl ester $$ Methyl 18- Propylhenicosanoate#	0,2181

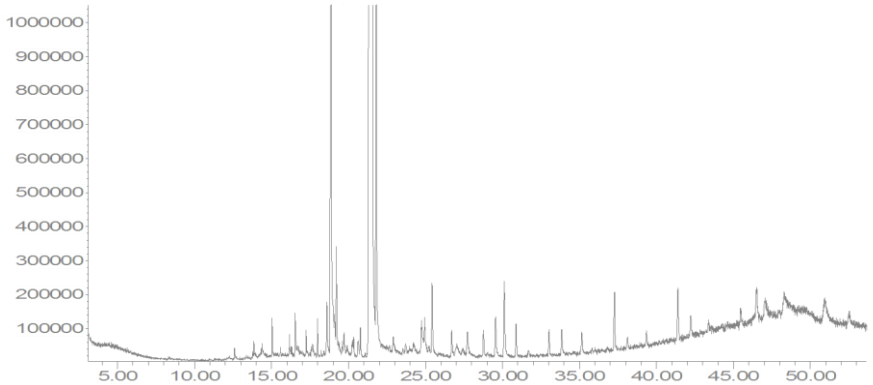
45	35,1532	Octacosane (CAS) $$ n- Octacosane $$ n- Octacosane $$ n- octacosanene	0,1925
46	37,2769	Heneicosane (CAS) $$ n- Heneicosane$$ Heneicosane $$ n- heneicosanene	0,4518
47	38,1235	Spinasterone$$ stigmasta – 7,22 – dien - 3- One, (5. alph; 22E) - $$ stigmastadienone	0,1325
48	39,3441	Eicosane (CAS) $$ n- Eicosane $$ Icosane $$ n- eicosane$$ n- icosane	0,1157
49	41,3972	Hexadecane, 2,6,10,14 – tetramethyl – (CAS) $$ Phytane $$ Phytan	0,4117
50	42,2368	Octacosanoic acid, methyl ester (CAS) $$ Methyl octacosanoate $$ FAME 28: O	0,1975
51	46,5193	Triacontanoic acid, methyl ester $$ Methyl melissate $$ Methyl melissicate	0,4416

أظهر التحليل أن المركب Methyl linolelaidate هو المكون الرئيسي لمستخلص خلات الإيتيل للأوراق بنسبة (42,4689%)، يليه المركب MethylOctadec-11-enoate (28,2907%) والمركب Methyl hexadecanoate (13,7915%) ثم المركب methyl 16-methyl heptadecanoate (3,9344%) والجدول (2) يوضح المكونات الرئيسية الموجودة في مستخلص خلات الايتيل للأوراق والتي تمثل حوالي 88,4855%

الجدول (2) صيغ المركبات الرئيسة الموجودة في مستخلص خلات الايتيل لأوراق نبات لسان الجمل

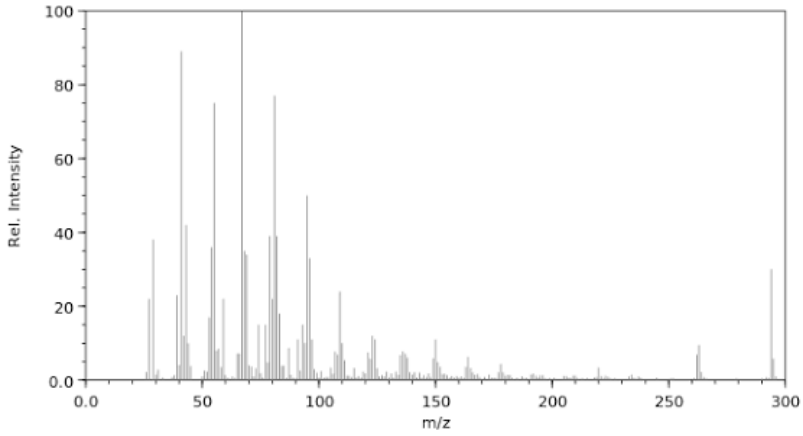
اسم المركب	الصيغة	النسبة المئوية الوزنية للمركب في العينة
Methyl linolelaidate		

		42,4689%
Methyl Octadec-11-enoate		28,2907%
Methyl hexadecanoate		13,7915%
methyl 16-methyl heptadecanoate		3,9344%



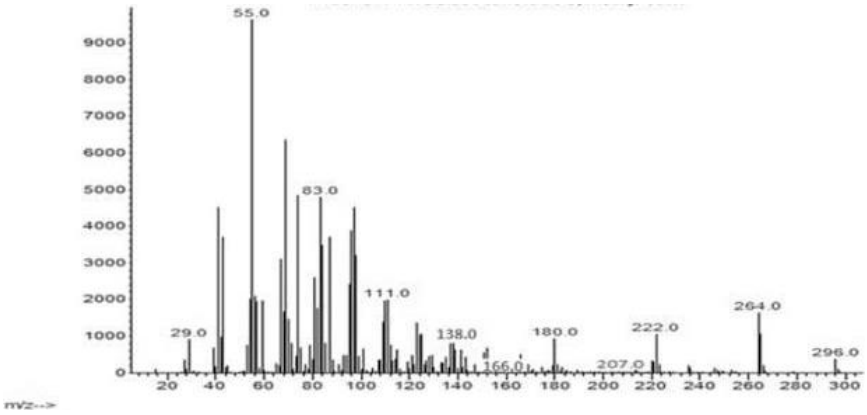
الشكل (1) كروماتوغرام الـ GC/MS لمستخلص خلات الايتيل من أوراق نبات لسان الجمل *Silybum marianum*

تبين الأشـكال (2, 3, 4, 5) طيوف الكتلة للمركبات الأربعة الرئيسـة الموجودة في مسـتخلص خلات الايتيل لأوراق نبات لسان الجمل.



الشكل (2) طيف الكتلة للمركب

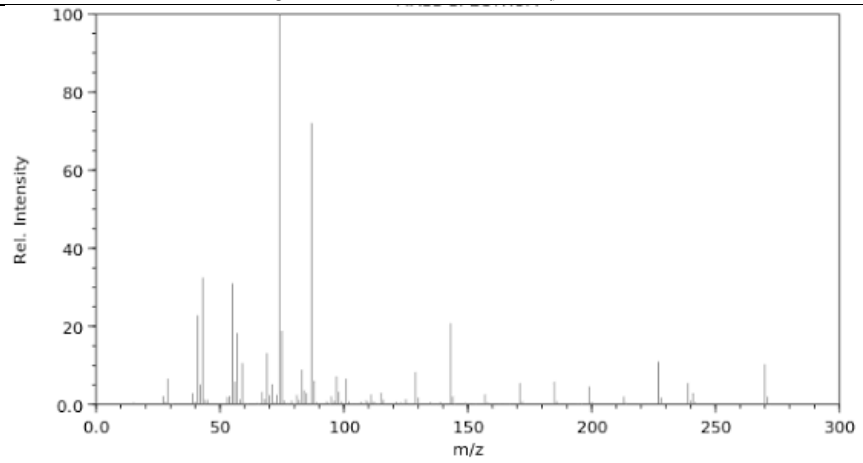
9,12- Octadecadienoicacid, methyl ester, (E,E) – (CAS)$$ Methyl linole laidate.



الشكل (3) طيف الكتلة للمركب

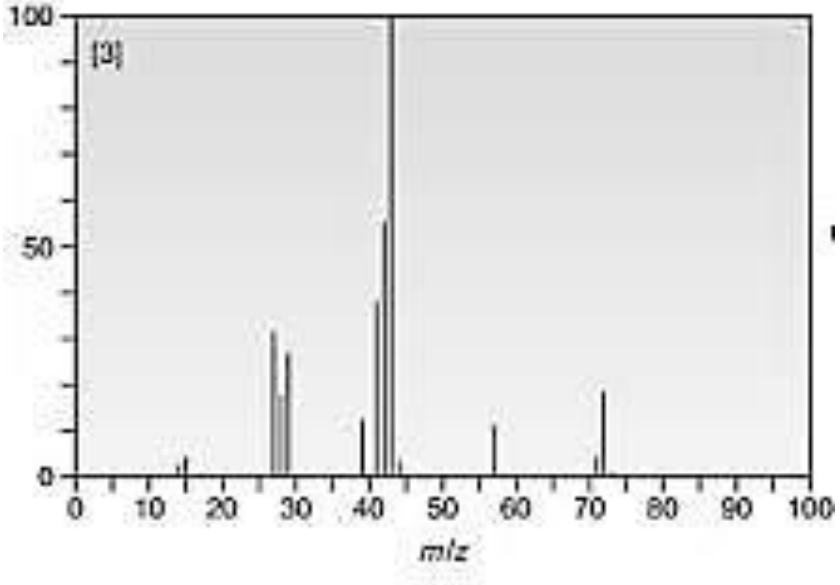
11- Octadecenoic acid, methylester $$ Methyl 11- Octadecanoate





الشكل (4) طيف الكتلة للمركب

Hexadecanoic acid, methyl ester (CAS) $$ methyl Palmitate $$ Uniphat A60



الشكل (5) طيف الكتلة للمركب

Methyl 16 – methyl – heptadecaneoate

كما أعطى الاستخلاص باستخدام جهاز الأمواج فوق الصوتية بمذيب خلات الايتيل لعينات الأزهار، مستخلص بلون أصفر غامق للأزهار وبنسبة 5.33%

ثمّ التعرف بعد تحليل مستخلص خلات الإيتيل للأزهار باستخدام جهاز GC/MS على 53 مركباً والتي شكلت نسبة 99,61% من المجموع الكلي للمركبات الموجودة في المستخلص، كما هو واضح في الجدول (3):

الجدول (3) مكونات مستخلص خلات الايتيل لأزهار نبات لسان الجمل

Silybum marianum

Peak	R.Time	Compound name	%Percentage
1	14,3118	Methyl 10- methyl undecanoate	1,1399
2	15,0596	2- Hexenal (CAS) $$ 2- Hexen -1- al $$ (E)-n-C_3H_7CH= CHCHO$$ Hex -2- enal	0,1639
3	16,5624	Tridecanoic acid, 12- methyl – , methyl ester $$ Methyl iso isomyristate	0,3278
4	17,2468	Nonadecane, 9 – methyl - $$ 9- Methyl nonadecane #	0,1148
5	17,6066	Heptanedioic acid, dimethyl ester $$ Pimelic acid, dimethyl ester.	0,1535
6	17,7265	N- Hydroxyacetaminophen $$ N, 4'- DIHYDROXYACETANILIDE $$ N- Hydroxy paracetamol.	0,1793
7	17,8677	2- Pentadecanone, 6, 10, 14 – trimethyl - $$ Hexahydrofamesyl acetone	0,1956
8	18,0087	6,11- Undecadiene, 1- acetoxy – 3,7 – dimethyl	0,2166
9	18,2345	Bicyclo [3. 1.1] heptane, 2, 6, 6 – trimethyl [1R – (1. alpha, 2. alpha, 5. alpha)], 5 (alpha)]	0,1558
10	18,5661	8- Cyclohexadecen-1- one	0,3798
11	18,8554	Hexadecanoic acid, methyl ester (CAS) $$ Methyl Palmitate $$ Uniphat A60	13,5645
12	19,0882	2- Propenoic acid, oxybis (2,1 – ethanediyloxy – 2,1 – ethanediyl) ester $$ TTEGDA	0,4119
13	19,2223	Benzenpropanoic acid, 3,5 – bis (1,1 – dimethyl ethyl) -4- hydroxyl- , methyl ester.	1,152
14	19,3281	4- Hexen -3- ol, 2,5 – dimethyl - $$ 4- Hexen -3- ol, 2,5 dimethyl	0,2563
15	19,4269	5,5 – Dimethoxy -3- (1- hydroxyl -1- methyl ethyl -1- oxacyckopent -3- en -2- one	0,3025

16	19,6032	Naphthalene, 1,5 –dimethyl – (CAS) $$ 1,5 – Dimehtyl naphthalene	0,2096
17	19,7303	METHYL ESTER OF SUCCINYL ACETONE $$ Derivative of succinyl acetone	0,2656

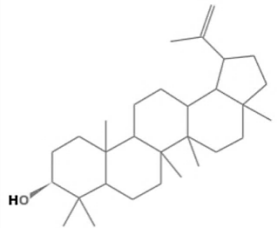
18	20,33	2H – Pyran, 2- (bromomethyl) tetrahydro - $$ 2- (Bromomethyl) tetrahydro -2 H – pyran	0,8073
19	20,7744	3,3,6- Trimethyl – 1,5 – heptadien -4- ol $$ Artemesia alcohol	1,223
20	21,0425	1- Naphthalene carboxylic acid, 8- (dimethyl amino) – 9 methyl ester	0,1672
21	21,1907	1- Docosanol (CAS) $$ Behenicalcohol $$ Behenyl alcohol $$ Docosyl alcohol	0,2302
22	21,3177	9,12 – Octadecadienoic acid, methyl ester, (E, E) - (CAS) $$ Methyl linolelaidate	3,809
23	21,4306	9,12,15 – Octadecatrienoic acid, methyl ester, (Z, Z, Z) - $$ Methyl linolenate	5,1209
24	21,8045	Octadecanoic acid, methyl ester (CAS) $$ Methyl stearate $$ kemester 9718	5,5302
25	22,637	Tetrahydro – 1,3 – Oxazine -2- thione $$ 1,3 – Oxazinane -2- thione	0,2115
26	22,9404	(6- deuterio) bicyclo [2.2.1] hept -5- en -2- one	0,2275
27	24,1751	3- Undecen -1- yne, (E) - $$ (3E) -3- Undecen -1- yne#	0,1916
28	24,7607	Butanoic acid, 3- oxo -, 1, 1 – dimethyl ethyl ester $$ tert – Butyl Acetoacetate	0,8712
29	24,9441	11- Eicosenoic acid, methyl ester (SAS) $$ METHYL 11- EICOSENOATE	0,2134
30	25,2122	Dodecanedioic acid, dimethyl ester (CAS) $$ DODECANEDIOIC ACID – DIMETHYL ESTER	0,277

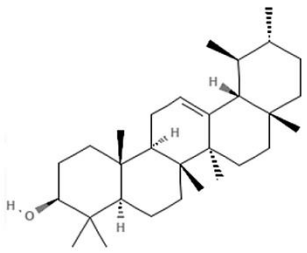
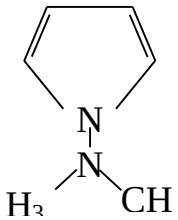
31	25,445	Eicosanoic acid, methyl ester (CAS) $$ Arachidic acid methyl ester.	2,9537
32	26,7009	Tetracosane (CAS) $$ n- Tetracosane $$ n- tetracosane	0,1443
33	27,738	Phenol, 2,2' – methyl lenebis [6- (1,1 – dimethyl ethyl) -4- methyl $$ A – 22 – 46 $$ Anti OX	0,1154
34	28,2319	Benzyl (dideuterated) methyl ether $$ BENZYL (DIDEUT ERATED) METHYL ETHER	0,1835
35	28,7822	Pentacosane $$ n- Pentacosane	0,402
36	29,5653	Docosanoic acid, methyl ester (CAS) $$ Methyl behenate $$ Methyl docosanoate	1,4367
37	30,1156	3,7 – Dimethyl geranial	0,3697
38	30,8847	Eicosane (CAS) $$ n- Eicosane $$ Icosane $$ n – eicosane $$ n- icosane	0,1338
39	31,7031	Dippinine B	0,1344
40	33,0295	Heptacosane $$ n- Heptacosane	0,4232
41	33,8479	Heneicosanoic acid, 18- propyl- , methyl ester $$ Methyl 18- propyl henicosanoate#	0,6395
42	35,1531	1- Octadecan esulphonyl chloride	0,1535
43	35,9927	Pentacosanoic acid, methyl ester $$ Methyl pentacosanoate#	0,1181
44	37,2909	Nonacosane $$ n- Nonacosane	1,9775
45	38,1164	Octadecanoic acid, 11- methyl, methyl ester $$ Methyl 11- methyloctadecanoate#	0,4408
46	39,3652	2,4, 3,5 – Diethyl idene -1- xylose	0,4594
47	41,3971	Pentacosane $$ n – pentacosane	0,9857
48	42,2367	Octacosanoic acid, methyl ester (CAS) $$ Methyl octacosanoate $$ FAME 28:0	0,8308
49	43,4855	Sydnone, 3- neopentyl - $$ 3- Neopentyl – 1, 2, 3 – Oxadiazol -3- ium -5- olate #	0,6048
50	46,5827	Triacontanoic acid, methyl ester $$ Methyl melissate $$ Methyl melissicate	0,8377
51	47,126	N- dimethyl amino – (di (cyclohexo) [b,d] pyrrole)	10,4866

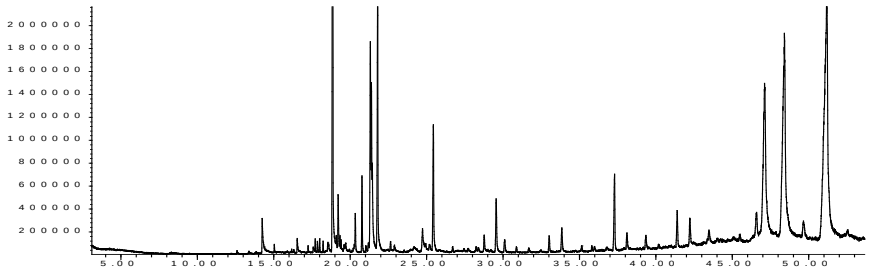
52	48,3889	alpha – AMYRIN $$ Urs – 12 – en -3beta – ol	14,4443
53	51,1264	Lup – 20 (29) – en – 3 – ol , (3, beta) – (CAS) $$ Lupeol $$ lupenol $$ clerodol	22,766

أظهر التحليل أن المركب Lupeol هو المكون الرئيسي لمستخلص خلات الايتيل للأزهار بنسبة (22,766%)، يليه المركب Alpha-Amyrin (14,4443%) والمركب Methylhexadecanoate (13,5645%) ثم المركب Octahydro-1H-Carbazole (10,4866%) والجدول (4) يوضح المكونات الرئيسية الموجودة في مستخلص خلات الإيتيل للأزهار والتي تشكل حوالي (61,2614%).

الجدول (4) صيغ المركبات الرئيسة الموجودة في مستخلص خلات الايتيل لأزهار نبات لسان الجمل

اسم المركب	الصيغة	النسبة المئوية الوزنية للمركب في العينة
Lupeol		22,766%

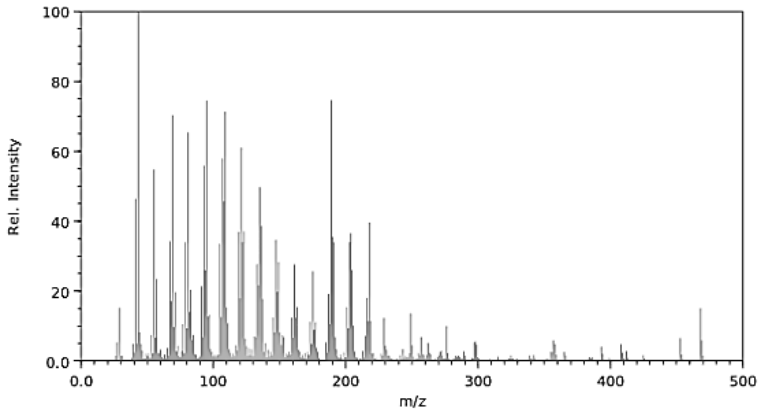
Alpha- Amyrin		14,4443%
Methyl hexadecanoate		13,5645%
Octahydro -1H-Carbazole		10,4866%



الشكل (6) كروماتوغرام الـ GC/MS لمستخلص خلات الإيتيل من أزهار نبات لسان الجمل

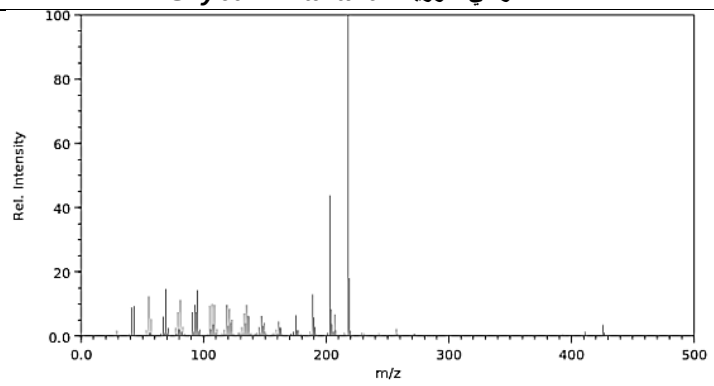
Silybum marianum

تبيّن الأشكال (7, 8, 9, 10) طيوف الكتلة للمركبات الأربعة الرئيسة الموجودة في مستخلص خلات الايتيل لأزهار نبات لسان الجمل.



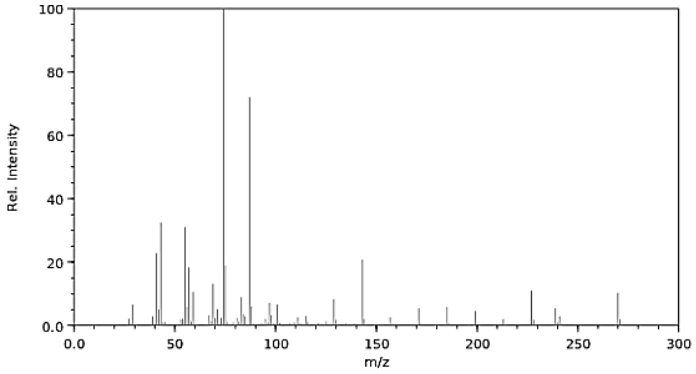
الشكل (7) طيف الكتلة للمركب

Lup – 20 (29) – en – 3 – ol, (3, bela) – (CAS) $$ lupeol $$ lupenol $$ clerodol



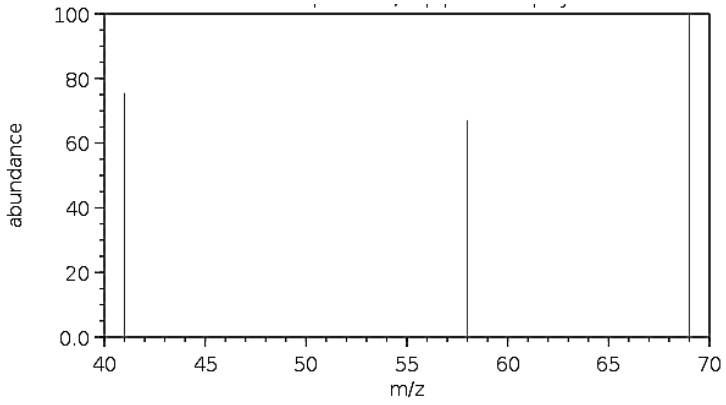
الشكل (8) طيف الكتلة للمركب

alpha – AMYRIN $$ Urs -12- en – 3beta – ol



الشكل (9) طيف الكتلة للمركب

Hexadecanoic acid, methyl ester (CAS) $$ Methyl Palmitate $$ Uniphat A60



الشكل (10) طيف الكتلة للمركب
N- dimethyl amino – (di (cyclohexo) [b,d] Pyrrole)

بمقارنة المحتوى الكيميائي لمستخلص خلات الإيتيل للأوراق مع المحتوى الكيميائي لمستخلص خلات الإيتيل لأزهار النبات نفسه، نجد أن هناك (7) سبعة مركبات مشتركة، من بينها المركب Methyl hexadecanoate وهو أحد المركبات الرئيسية في مستخلص خلات الإيتيل للأوراق والأزهار ظهر بنسب 13,7915% و 13,5645% لكل من الأوراق والأزهار على التوالي، كما أن المركب Methyl linolelaidate

من المركبات الرئيسية في مستخلص خلات الإيتيل للأوراق فظهر بنسبة %(42,4689)، في حين بلغت نسبته في مستخلص الأزهار (5,1209%) فقط، كما اشترك المستخلصان بمركبات ثانوية مثل: (3,5-di-tert-butyl-4-hydroxyphenyl) Propanoate

Methyl docosanoate , Methyl eicosanoate, Icosane , Mehtyl Octacosanoate

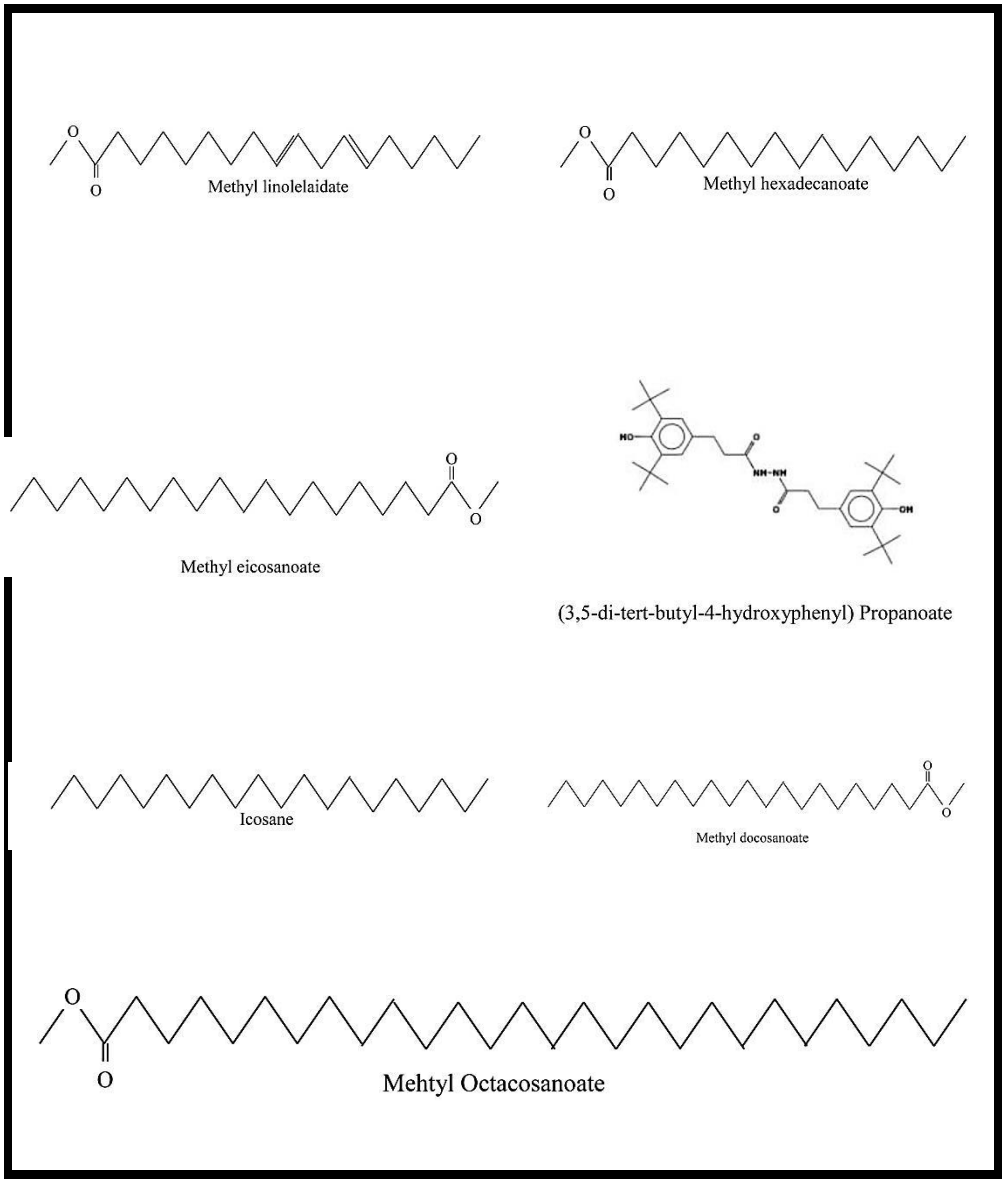
وقد تم توضيح هذه المركبات المشتركة في الجدول (5)

كما بينت هذه الدراسة أن النسبة المئوية الوزنية لمستخلص أوراق نبات لسان الجمل باستعمال مذيب خلات الايتيل بجهاز الأمواج فوق الصوتية هي 7.24% وهي أعلى بالمقارنة مع النسبة المئوية الوزنية لمستخلص الأزهار حيث بلغت النسبة المئوية الوزنية لمستخلص الأزهار 5.33%.

الجدول (5) المركبات المشتركة لمكونات مستخلص خلات الايتيل للأوراق والأزهار:

No	المكونات المشتركة	Area % للأوراق	Area% للأزهار
1	Methyl hexadecanoate	13,7915%	13,5645%
2	Methyl linolelaidate	42,4689%	5,1209%
3	(3,5-di-tert-butyl-4-hydroxyphenyl) Propanoate	0,7006%	1,152%
4	Methyl eicosanoate	0,5806%	2,9537%
5	Methyl docosanoate	0,3837%	1,4367%

6	Icosane	0,1157%	0,1338%
7	Mehtyl Octacosanoate	0,1975%	0,8308%



الشكل (11) يوضح صيغ المركبات المشتركة في مستخلص خلات الايتيل للأوراق والأزهار

الجدول (6): مقارنة بين المكونات الرئيسية لمستخلص خلات الايتيل لأوراق نبات لسان الجمل الموجود في البيئة السورية مع بعض الدراسات المرجعية

No	COMPOUND	سوريا	العراق [16]	مقدونيا [17]
1	Methyl linolelaidate	42,4689%	-	-
2	Methyl Octadec-11-enoate	28,2907%	-	-
3	Methyl hexadecanoate	13,7915%	-	-
4	methyl 16-methyl heptadecanoate	3,9344%	-	-
5	Mehtyl Octacosanoate	0,1975%	-	-

الجدول (7): مقارنة بين المكونات الرئيسية لمستخلص خلات الايتيل لأزهار نبات لسان الجمل الموجود في البيئة السورية مع بعض الدراسات المرجعية

No	COMPOUND	سوريا	العراق [16]	تركيا [18]
1	Lupeol	22,766%	-	-
2	Alpha- Amyrin	14,4443%	-	-
3	Methyl hexadecanoate	13,5645%	-	-
4	Octahydro -1H-Carbazole	10,4866%	-	-
5	Methyl octadecanoate	5,5302%	-	-
6	Methyl linolenate	5,1209%	-	-
7	Nonacosane	1,9775%	-	4,20%

عند مقارنة النتائج الموضحة بالجداول السابقة مع نتائج الدراسات المرجعية [16,17,18] لوحظ وجود مركب مشترك بين أزهار النبات في دراستنا الحالية مع الأبحاث السابقة ،المركب هو Nonacosane الذي ظهر بنسبة 4.20%,1.9775% في سوريا وتركيا على التوالي.

كما لوحظ عدم وجود مركبات مشتركة بين المركبات الرئيسية الموجودة في أوراق النبات مع الدراسات السابقة قد يكون السبب في ذلك إلى اختلاف المناخ، التربة، الارتفاع ،البعد و القرب عن سطح البحر.

الاستنتاجات والتوصيات:

1- بلغ عدد مركبات مستخلص الأوراق بمذيب خلات الايتيل 51 مركباً وفي مستخلص الأزهار 53 مركباً وكانا يشتركان بمركب واحد هو:

Methyl hexadecanoate

الذي يشكل نسبة 13,7915% من مستخلص الأوراق، ونسبة 13,5645% من مستخلص الأزهار.

2 ـــ تمت دراسة المحتوى الكيميائي لمستخلص خلات الايتيل لأوراق وأزهار نبات لسان الجمل حيث لا يوجد دراسة مرجعية أو مقارنة مع أي دراسة أخرى اهتمت بدراسة أوراق و أزهار نبات لسان الجمل باستخدام هذا المذيب.

3-نوصي باستكمال دراسة هذا النبات من خلال استخلاص الأوراق والأزهار بطرق استخلاص مختلفة بهدف التعرف على مركباته الكيميائية وتحديد البنى الكيميائية له بطرائق طيفية مختلفة وإجراء دراسة حيوية على المستخلصات.

المراجع:

[1] PORWAL. O, SHEET. M, BAYRAKDAR . E T, (2019) . Review On Its Chemistry, Morophology, Ethnomedical Uses, Phytochemistry And Pharma ological Activities ،

Cological Subasini Uthirapathy, Vol, 9 (5), P199- 206.

[2] XIEY, ZHANG .D, ZHANG.J, METABOLISM .J (2019).Transport And Drug – Drug Interactions Of Silybum Molecules, Vol, 24(20), P3693

[3] ACHUFUSI TGO, PATEL RK. (2021) Milk Thistle. Treasure Island (FL): Statpearls Publishing

[4] VERDURA S, CUVAS E, RAIS– TORRES V, et al . (2021) Lungcancer Mangement With Silibinin: A Historical And Translational Perspective. *Pharmaceuti Cals Basel*,Vol, 14(6), P559.

[5] ZAKER – ESTEGHAMATI. H, SEIDAVI. AR, BOUYEH. M. (2021)

The Effects Of Cynars Scolymus And Silybum marianum On Growth, Carcass And Organ Characteristics, Immanity, Blood Constitutes, Liver Enzymes, Jejunum Morphology, And Faty Acid Profile Of Breast Meat In Broilers، *Food Sci Nutr* ،Vol, 9 (12), P 6692 – 6706

[6] SOWINSKA. M, SZPUNAR. M, (2022) "Silybum marianum" – Properties And Application In Medicine – Areview,Vol, 20 (3), P266 – 271

[7] ZHU, HJ, BRINDA, B, J, CHAVIN, K. D, BERNSTEIN, H. J., PATRICK, K., MARKOWITZ, J.S. (2013). An Assessment Of Pharmacokinetics And Antioxidant Activity Of Free Silymarin Flavonolignans In Healthy Volunteer: Adose Escalation Study Drug Metabolism And Diposition, Vol,41(9), P1679-1685.

[8] ALHIDARY. IA, REHMAN. Z, KHAN. RU, TAHIR, M. Sci J. (2017) Anti – aflatoxin Activities Of milk Thistle. (Silybum marianum) In Broiler.

Worlds Poult Vol, 73, P559 – 566

[9] RADHIKA, M. I,, EZHILARASAN, D., GOPINATH. P. (2017) Antimicobial Efficacy Of Silymarin And Silibinin Against Oral Microorganisms. *JMID*, Vol,7 (3), P 139 – 143

[10] SUN, Y., GUAN, Z, ZHAO, W., JIANG, Y, XU, Y. (2017). Silibinin Suppresses Bladder Cancer Cell Malignancy And Chemoresistance Inan NF-KB Signal – Dependent And Signal – Independentmanner. *International Journal Of Oncology*,Vol, 51141 P1219 – 1226.

[11] Benslama[1].O, Lekmine[2,*]S, Moussa[3,4]H, Tahraoui[5,56,7]H, Ola[8]MS, Zhang[9]Jand Amrane[7]A, (2025). Silymarin as a Therapeutic Agent for Hepatocellular Carcinoma: A Multi- Approach Computational Study, *Metabolites*, Vol,15 (1), P.53.

[12] Cheng. JT, Konrath. E L, Ritter. M R, (2025).Antidiabetic Potential of Silybum marianum (L.) Gaertn. and Brachylaena discolor DC (Asteraceae) in the Management of Type 2 Diabetes Mellitus, *Academic Editors*, Vol,14 (21),P 3267.

[13]Singh[*]V, Malik.Jk, Bhardwaj.Y, Gupta.V, Singh.G, (2026).Phytochemical Constituents and Therapeutic Applications Of Silybum Marianum: Focus on Antioxidant and Anti – Inflammatory Activities, *International Journal of Research Publication and Reviews*, Vol 7(4), P 2483 – 2493.

[14] Cheema[1*]H S, Singh[2]. M P, (2021).The Use of Medicinal plants in Digestive System Related Disorders : A Systematic Review, *Journal Of Ayurvedic and Herbal Medicine*, Vol,7 (3), P182 – 187.

[15] Mclntgre. C, Johnston. B, (2025)Milk Thistle – Uses, Side Effects, and More, *Drugs &Supplements*.

[16] Eldalawy .R, Abdul .W, widad. Mk, Al- ani. W M,(2020). GC-MS analysis of Iraqi Silybum marianum Flowers, Leaves and seeds Extracts, *Journal of Pharmaceutical Sciences*, Vol,20 (4),P 93 – 112

[17] Iraqi[1,2] O, Aouji[2]M, Oubihi[2]A, Imtara[3*]H, Noman[4]O, A. Mothana[4] R, Tarayrash[5] M, Taboz[2] Y and Habsaoui[1]A, (2025) Exploring the Chemical composition, antioxidant, and antibacterial properties of milk thistle (Silybum marianum L.), *Journal of Frontiers in Sustainable Food Systems*.

[18] BAŞAR[a] Y, ERENLER[b] R, (2024).Phytochemical analysis of Silybum marianum Flowers: Quantitative analysis of natural compounds and molecular docking application, *Journal of Turk J Biod*, Vol,7 (1) ,P20 – 31.

دراسة جبرية حول جبورB

جامعة حمص– كلية العلوم– قسم الرياضيات

طالب الماجستير: محمد محمود الحايك

إشراف:

الدكتورة سوسن السطايحي الدكتورة نور رضوان

ملخص البحث

يتناول هذا البحث دراسة جبر B وبعض أنواعه الأساسية وهي: جبرB الـ 0– تبديلي و جبر B التبديلي، وجبرB التجميعي، والوسطي.إضافةً إلى دراسة علاقته بعدد من الجبور الأخرى مثل جبرQ، وBG، وRG، وTM، وBRK، وBZ، وBCH، حيث بينا أن بعض هذه الجبور تمثل تعميمات لجبرB، في حين يمكن الحصول على بعضها الآخرمن جبرB بإضافة شروط معينة. وقد برز خلال دراستنا الدور الأساسي للعنصر الثابت 0 في تكوين هذه العلاقات والحصول على العديد من النتائج الجبرية. وخلصنا في دراستنا إلى أن جبر Bيمثل إطاراً جبرياً عاماً ترتبط به عدة جبور منطقية، الأمر الذي يجعله محوراً مهماً في دراسة الجبر المنطقي، ويفتح المجال أمام المزيد من الدراسات المتعلقة بتطبيقاته وعلاقاته مع الجبور الأخرى.

الكلمات المفتاحية:

جبرB الـ 0– تبديلي، جبر B التبديلي، جبرB التجميعي، جبرB الوسطي.

Algebraic Study on B-Algebras

Homs University – Faculty of Science – Mathematics Department

Master's Student: Mohamed Mahmoud Al-Hayek

Supervisors by:

Dr. Sawsan Al-Satayhi **Dr. Nour Radwan**

Abstract

This research investigates B-algebras and some of their fundamental classes, namely: 0-commutative B-algebras, commutative B-algebras, associative B-algebras, and medial B-algebras. Furthermore, it examines their relationships with a number of other algebraic structures, including Q-algebras, BG-algebras, RG-algebras, TM-algebras, BRK-algebras, BZ-algebras, and BCH-algebras. We demonstrate that certain of these algebras constitute generalizations of B-algebras, whereas others can be derived from B-algebras by imposing additional specific conditions. Throughout our study, the fundamental role played by the constant element 0 in establishing these interrelations and deriving numerous algebraic results. It is concluded that B-algebras provide a general algebraic framework closely connected with various logical algebras, making them a significant subject in the study of algebraic logic and offering promising directions for further research into their applications and their relationships with other algebraic systems.

Key Words:

B-algebra, 0-commutative B-algebra, commutative B-algebra, associative B-algebra, medial B-algebra.

المقدمة:

إن لجبور المنطق دوراً مهماً في الرياضيات، حيث إن لها تطبيقات هامة في العديد من المجالات التطبيقية مثل علم الحاسوب ونظم المعلومات وغيرها. وقد عرفّ الباحثون العديد من جبور المنطق التي قدمت الحلول لكثير من المسائل التطبيقية في العلوم المختلفة.

يعد جبرB من الجبور المنطقية المهمة التي ظهرت في إطار تعميم بعض مفاهيم الجبر المنطقي، إذ تعتمد على عنصر ثابت و عملية ثنائية واحدة تحقق مجموعة من المبادئ الأساسية التي تمنح هذا الجبر خصائص مميزة وعلاقات وثيقة مع عدد من الجبور الأخرى. وقد حظي هذا الجبر باهتمام الباحثين لما يمتلكه من قدرة على التعميم وإمكانية الربط بينه وبين مختلف الجبور المنطقية.

هدف البحث:

الهدف من هذا البحث دراسة جبر B من حيث تعريفه وخواصه الأساسية، مع توضيح العلاقات المتبادلة بين هذه الخواص من خلال مجموعة من المبرهنات والنتائج الأساسية، إضافةً إلى دراسة العلاقات بين جبر Bو بعض الجبور الأخرى.

1. جبر B وخواصه.

تعريف (1.1). [4]

جبر B (B −algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الآتية:

$(B_1)\ x * x = 0$

$(B_2)\ x * 0 = x$

$(B_3)\ (x * y) * z = x * (z * (0 * y))$

حيث $x, y, z \in X$ ونرمز لهذا الجبر بالرمز $(X, *, 0)$ واختصاراً بالرمز X مالم يكن هناك التباس.

مثال (1.1). [6]

إن $(\mathbb{Z}, -, 0)$ ، مجموعة الأعداد الصحيحة ، هي جبرB.

مبرهنة (1.1). [4,12]

ليكن $(X, *, 0)$ جبرB عندئذ الخواص الآتية محققة:

$(B_4)\quad (x * y) * (0 * y) = x$

$(B_5)\quad if\ x * y = z * y \Rightarrow x = z$

$(B_6)\quad if\ x * y = x * z \Rightarrow y = z$

$(B_7)\ x * (y * z) = (x * (0 * z)) * y$

$(B_8)\ 0 * (0 * x) = x$

$(B_9)\ 0 * (x * y) = y * x$

$(B_{10})\ (x * z) * (y * z) = x * y$

(B_{11}) $if\ x * y = 0 \Rightarrow x = y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة (2.1). [12]

$(X, *,0)$ جبرB إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية:

$(B_1)\ x * x = 0$

$(B_8)\ 0 * (0 * x) = x$

$(B_{10})\ (x * z) * (y * z) = x * y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

تعريف (2.1). [4,11]

ليكن $(X, *,0)$ جبرB عندئذ:

- يقال إن X $0-$ تبديلي (0− commutative) إذا حقق الخاصة الآتية:

$x * (0 * y) = y * (0 * x)$; $\forall x, y \in X$

- يقال إن X تجميعي (associative) إذا حقق الخاصة التجميعية، أي إذا كان:

$x * (y * z) = (x * y) * z$; $\forall x, y, z \in X$

مبرهنة (3.1). [11]

ليكن $(X, *,0)$ جبرB $0-$ تبديلي عندئذ الخواص الآتية محققة:

$(B_{12})\ (x * y) * (z * u) = (u * y) * (z * x)$

$(B_{13})\ (x * y) * (x * z) = z * y$

$(B_{14})\ (0 * x) * (0 * y) = y * x$

$(B_{15})\ (x * y) * z = (0 * y) * (z * x)$

$(B_{16})\ (x * y) * z = (x * z) * y$

$(B_{17})\ \ x * (y * z) = z * (y * x)$

$(B_{18})\ \ x * (x * y) = y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z, u \in X$.

مبرهنة (4.1). [1,4]

ليكن $(X, *,0)$ جبرB. عندئذ $(X, *,0)$ يكون $0-$ تبديلي إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين الآتيين:

$(B_{17})\ \ x * (y * z) = z * (y * x)$

$(B_{18})\ \ x * (x * y) = y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة (5.1). [1]

ليكن X جبرB إذا تحقق الشرط الآتي:

$$0 * x = x \quad ; \forall x \in X$$

عندئذ يكون X $0-$ تبديلي.

ملاحظة (1.1). [1]

إن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح والمثال الآتي يوضح ذلك.

مثال (2.1). [1]

لتكن المجموعة $X = \{0,1,2\}$ مزودة بالعملية $*$ المعرفة وفق جدول كيلي الآتي:

*	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

واضح أن X هو جبر B $0-$ تبديلي لكن $2 * 0 = 1 \neq 2$.

تعريف (3.1).

ليكن $(X, *,0)$ جبرB. يقال عن X إنه تبديلي إذا تحققت الخاصة الآتية:

$$x * y = y * x \qquad ; \forall x, y \in X$$

مثال (3.1).

إن $\mathbb{Z}_2$ مع العملية $*$ المعرفة بالشكل الآتي :

$$x * y = x - y \,(mod\ n) \qquad ; \forall x, y \in X$$

هي جبر B تبديلي حيث إن العنصر الثابت 0.

مبرهنة (6.1).

1. كل جبر B تبديلي هو جبر B 0− تبديلي.

2. كل جبر B 0− تبديلي هو جبر B تبديلي إذا تحقق الشرط الآتي:

$$0 * x = x \qquad ; \forall x \in X$$

البرهان.

1. لنفرض أن X جبر B تبديلي، عندئذ مهما يكن $x, y \in X$ نجد أن:

$$x * (x * y) = x * (y * x)$$

$$= [x * (0 * x)] * y \qquad /B_7/$$

$$= [x * (x * 0)] * y \qquad /X \text{ تبديلي}/$$

$$= (x * x) * y \qquad /B_2/$$

$$= 0 * y \qquad /B_1/$$

$$= y * 0 \qquad /X \text{ تبديلي}/$$

$$= y \qquad /B_2/$$

ومن ثم الخاصة (B_{18}) محققة وحسب المبرهنة (4.1) يتم المطلوب.

2. لنفرض أن X جبر B 0− تبديلي، عندئذ حسب (B_{14}) نجد أن: $(0 * x) * (0 * y) = y * x$

ومن الفرض نجد أن: $x * y = y * x$ وبالتالي X جبر B تبديلي.

مبرهنة (7.1).

ليكن X جبر B تجميعي عندئذ الشرط الآتي محقق:

$$0 * x = x * 0 = x \quad ; \forall x \in X$$

البرهان.

نعوض $x = y = z$ في (B_3) فنجد:

$$(x * x) * x = x * [x * (0 * x)]$$

$$0 * x = x *[(x * 0) * x)] \qquad /B_1 \text{ , تجميعي } X/$$

$$0 * x = x * (x* x) \qquad /B_2/$$

$$0 * x = x * 0 = x \qquad /B_2 , B_1/$$

وهو المطلوب.

مبرهنة (8.1).

إذا كان X جبرB تجميعي، عندئذ يكون X جبرB $0-$ تبديلي.

البرهان.

ينتج مباشرة من المبرهنة (7.1) والمبرهنة (5.1).

مبرهنة (9.1).

إذا كان X جبرB تجميعي، عندئذ يكون X جبر B تبديلي.

البرهان.

لنفرض أن X جبرB تجميعي، عندئذ من المبرهنة (8.1) نجد أن X $0-$ تبديلي ومن (B_{14}) نجد أن:

$$(0 * x) * (0 * y) = y * x$$

$$x * y = y * x \qquad /\text{مبرهنة}(7.1)/$$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y \in X$ وبالتالي X جبر B تبديلي.

نتيجة(1.1).

جبرB الـ 0− تبديلي يكون تبديلاً إذا كان تجميعياً.

البرهان.

ينتج من المبرهنة (7.1) والمبرهنة(6.1) /2/ .

تعريف (4.1). [7]

ليكن $(X, *,0)$ جبرB. يقال عن X إنه وسطي (medial) إذا تحقق الشرط الآتي:

$$(x * n_1) * (y * n_2) = (x * y) * (n_1 * n_2) \quad ; \forall x, y, n_1, n_2 \in X$$

مثال (4.1). [7]

لتكن المجموعة $X = \{0,1,2,3\}$ مزودة بالعملية $*$ المعرفة وفق جدول كيلي الآتي:

*	0	1	2	3
0	0	2	1	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	1	2	0

إن $(X, *,0)$ جبر B وسطي.

مبرهنة (10.1).

إذا كان X جبرB وسطي، عندئذ يكون X جبرB 0− تبديلي.

البرهان.

لنفرض أن X جبر B وسطي، عندئذ نجد أن:

$$(x * 0) * (x * n_2) = (x * x) * (0 * n_2)$$

$$x * (x * n_2) = 0 * (0 * n_2) \qquad /B_2\ , B_1/$$

$$x * (x * n_2) = n_2 \qquad /B_8/$$

وذلك مهما تكن العناصر $x, n_2 \in X$ وحسب المبرهنة (4.1) يتم المطلوب.

مبرهنة (11.1).

ليكن X جبرB 0− تبديلي. إذا تحقق الشرط الآتي:

$$0 * x = x \quad ; \forall x \in X$$

فإن X يكون جبر B وسطي.

البرهان.

لنفرض أن X جبرB 0− تبديلي، عندئذ من الخاصة (B_{12}) نجد أن:

$$(x * n_1) * (y * n_2) = (n_2 * n_1) * (y * x)$$

$$= 0 * [(y * x) * (n_2 * n_1)] \qquad /B_9\ /$$

$$= 0 * [(0 * (x * y)) * (0 * (n_1 * n_2))] \qquad /B_9\ /$$

$$= 0 * [(x * y)) * (n_1 * n_2)] \qquad /\text{من الفرض}/$$

$$= (x * y) * (n_1 * n_2) \qquad /\text{من الفرض}/$$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, n_1, n_2 \in X$ وبالتالي Xجبر B وسطي.

نتيجة(2.1).

جبرB الـ 0− تبديلي يكون وسطياً إذا كان تجميعياً.

البرهان.

ينتج من المبرهنة (7.1) والمبرهنة(11.1) .

مبرهنة(12.1).

إذا كان X جبرB تجميعي، عندئذ يكون X جبر B وسطي.

البرهان.

لنفرض أن X جبرB تجميعي، عندئذ يكون X جبرB 0− تبديلي (المبرهنة8.1) ويحقق الخاصة $0 * x = x$ (المبرهنة7.1) عندئذ حسب المبرهنة (11.1) يكون X جبرB وسطي.

مبرهنة(13.1).

إذا كان X جبرB تبديلي، عندئذ يكون X جبرB وسطي.

البرهان.

لنفرض أن X جبرB تبديلي، عندئذ من المبرهنة(6.1)/1/ نجد أن X 0− تبديلي وبالتالي من (B_{12}) نجد أن:

$$(x * y) * (z * u) = (u * y) * (z * x)$$

$$= (z * x) * (u * y) \qquad /X \text{ تبديلي}/$$

$$= (x * z) * (y * u) \qquad /X \text{ تبديلي}/$$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, u, z \in X$ وهو المطلوب.

نتيجة(3.1).

ليكن X جبرB وسطي. إذا تحقق الشرط الآتي:

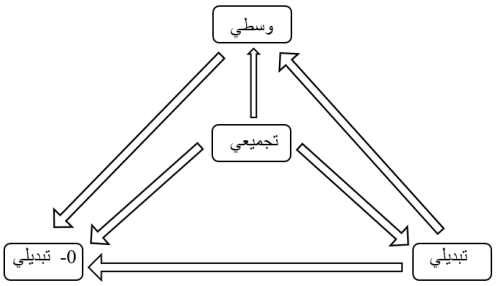
$$0 * x = x \quad ; \forall x \in X$$

فإن X يكون جبر B تبديلي.

البرهان.

ينتج من المبرهنة (10.1) و المبرهنة (6.1) /2/ ./

المخطط الآتي يوضح العلاقة بين جبورB:



2.العلاقة بين جبر B وبعض أنواع الجبور الأخرى.

سندرس في هذه الفقرة العلاقات التي تربط جبرB بأنواع آخرى من الجبور. وسنبدأ أولاً بدراسة العلاقة بين جبرB وجبر Q.

تعريف (1.2). [9]

جبر Q (Q −algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الآتية:

$(Q_1)\ x * x = 0$

$(Q_2)\ x * 0 = x$

$(Q_3)\ (x * y) * z = (x * z) * y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

ملاحظة(1.2). [9]

إذا كان $(X, *,0)$ جبر Q فليس بالضرورة أن يكون جبرB، والمثال الآتي يوضح ذلك:

مثال (1.2). [9]

لتكن المجموعة $X=\{0,1,2,3\}$ مزودة بالعملية $*$ المعرفة وفق جدول كيلي الآتي:

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	0	0	0
3	3	3	3	0

عندئذ نجد أن $(X, *,0)$ جبر Q لكنه ليس جبر B لإن (B_3) غير محققة بالضرورة ، فمثلاً لأجل العناصر 1,2,3 لدينا:

$$(3 * 2) * 1 = 0 \neq 3 * \big(1 * (0 * 2)\big)$$

مبرهنة (1.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبرB تجميعي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبر Q.

البرهان.

لنفرض أن X جبرB تجميعي، عندئذ ينتج أن المبدأين (Q_1) و (Q_2) محققيين، ولنبرهن تحقق (Q_3):

$(x * y) * z = x * (y * z)$ / تجميعي X/

$= (x * (0 * z)) * y$ /B_7/

$= (x * z) * y$ /مبرهنة(7.1)/

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$ وبالتالي (Q_3) محققة و X جبر Q.

تعريف (2.2). [9]

ليكن $(X, *,0)$ جبر Q. يقال عن X إنه تجميعي (associative)، إذاتحققت الخاصة التجميعية بالنسبة للعملية $*$ على عناصر هذا الجبر.

مبرهنة (2.2). [9]

ليكن $(X, *,0)$ جبر Q تجميعي عندئذ كل عنصر $x \in X$ يحقق الشرط: $0 * x = x * 0 = x$

مبرهنة (3.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبر Q تجميعي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبرB 0− تبديلي.

البرهان.

لنفرض أن X جبر Q تجميعي، عندئذ ينتج أن المبدأين (B_1) و (B_2) محققيين، ولنبرهن تحقق(B_3):

$(x * y) * z = (x * z) * y$ / Q_3/

$= x * (z * y)$ /تجميعي X/

$= x * (z * (0 * y))$ / مبرهنة (2.2)/

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$ ومن تحقق المبادئ الثلاثة ينتج أن X هو جبرB، ومن المبرهنة (8.1) نجد أن X 0− تبديلي.

ننتقل فيما يلي لدراسة العلاقة بين جبرB وجبرBG.

تعريف (3.2). [13]

جبرBG (BG −algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الآتية:

$(\mathrm{BG}_1)\ x * x = 0$

$(\mathrm{BG}_2)\ x * 0 = x$

$(\mathrm{BG}_3)\ (x * y) * (0 * y) = x$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة (4.2). [13]

إذا كان $(X, *,0)$ جبرB، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبرBG.

مبرهنة (5.2). [13]

ليكن $(X, *,0)$ جبر BG عندئذ كل عنصر $x \in X$ يحقق الشرط $0 * (0 * x) = x$.

مبرهنة (6.2).

ليكن $(X, *,0)$ جبر BG.إذا تحقق الشرط الآتي:

$$(x * z) * (y * z) = x * y$$

لأجل كل $x, y, z \in X$ فإن $(X, *,0)$ يكون جبرB.

البرهان.

لنفرض أن X جبرBG، عندئذ (B_1) محققة، ومن المبرهنة (5.2) ينتج تحقق (B_8)، ومن الفرض ينتج تحقق (B_{10}) وبالتالي من المبرهنة (2.1) ينتج المطلوب.

ننتقل فيما يلي لدراسة العلاقة بين جبرB وجبرRG.

تعريف (4.2). [10]

جبرRG (RG −algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الآتية :

$(\mathrm{RG}_1)\ \ x * 0 = x$

$(\mathrm{RG}_2)\ (x * z) * (y * z) = x * y$

$(\mathrm{RG}_3)\ x * y = y * x = 0 \Rightarrow x = y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة(7.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبرB، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبرRG.

البرهان.

ينتج مباشرة بالاعتماد على (B_2) و(B_{10}) و(B_{11}).

مبرهنة(8.2). [10]

ليكن $(X, *,0)$ جبر RG عندئذ الخواص الآتية محققة:

$(\mathrm{RG}_4)\ 0 * (0 * x) = x$

$(\mathrm{RG}_5)\ 0 * (x * y) = y * x$

$(\mathrm{RG}_6)\ (x * y) * z = (x * z) * y$

$(\mathrm{RG}_7)\ x * (x * y) = y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة (9.2).

ليكن $(X, *,0)$ جبر RG. إذا تحقق الشرط الآتي:

$$x * x = 0 \quad ; \forall x \in \mathrm{X}$$

فإن $(X, *,0)$ يكون جبرB 0− تبديلي.

البرهان.

من الفرض ينتج تحقق (B_1)، ومن (RG_4) ينتج تحقق (B_8) ومن (RG_2) ينتج تحقق (B_{10}) ومن تحقق (B_1) و(B_8) و(B_{10}) عندئذ حسب المبرهنة (2.1) نجد أن X هو جبرB.

ومن(RG_7) ينتج تحقق (B_{18}) وحسب المبرهنة (4.1) ينتج أن X هو جبرB 0−تبديلي.

ننتقل فيما يلي لدراسة العلاقة بين جبرB وجبرTM.

تعريف (5.2). [8]

جبر TM (TM −algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الآتية:

$(\mathrm{TM}_1)\ \ x * 0 = x$

$(\mathrm{TM}_2)\ \ (x * y) * (x * z) = z * y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة(10.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبر B $0-$ تبديلي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبرTM.

البرهان.

لنفرض أن X جبرB، عندئذ من (B_2) ينتج تحقق(TM_1) وبما أن X $0-$ تبديلي ومن (B_{13}) ينتج تحقق (TM_2).

نتيجة(1.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبرB تجميعي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبرTM.

البرهان.

ينتج من المبرهنة (8.1) والمبرهنة(10.2).

مبرهنة (11.2). [8]

ليكن $(X, *,0)$ جبرTM عندئذ الخواص الآتية محققة:

$(\mathrm{TM}_3)\ x * x = 0$

$(\mathrm{TM}_4)\ (x * y) * z = (x * z) * y$

$(\mathrm{TM}_5)\ x * (x * y) = y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

تعريف (6.2). [8]

ليكن ($X, *,0$) جبرTM.يقال عن X إنه تجميعي(associative)، إذا تحققت الخاصة التجميعية بالنسبة للعملية $*$ على عناصرهذا الجبر.

مبرهنة(12.2).

ليكن($X, *,0$) جبر TM تجميعي عندئذ:

$$0 * x = x * 0 = x \quad ; \ \forall x \in \mathrm{X}$$

البرهان.

لنفرض أن X جبرTM تجميعي، عندئذ من (TM_4) و بأخذ $x = y = z$ نجد:

$(x * x) * x = (x * x) * x$

$0 * x = x * (x* x)$ / X تجميعي , TM_3 /

$0 * x = x * 0$ / TM_3 /

$0 * x = x * 0 = x$ / TM_1 /

وهو المطلوب.

مبرهنة (13.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبر TM تجميعي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبر B $0-$ تبديلي.

البرهان.

لنفرض أن X جبر TM تجميعي، عندئذ من (TM_3) ينتج تحقق (B_1)

ومن (TM_1) ينتج تحقق (B_2) ولنبرهن تحقق (B_3):

$(x * y) * z = (x * z) * y$ / TM_4 /

$= x * (z* y)$ / X تجميعي /

$= x * (z * (0 * y))$ / مبرهنة (12.2) /

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$ وبالتالي X هو جبر B، ومن (TM_5) واستناداً إلى المبرهنة (4.1) نجد أن X $0-$ تبديلي.

ننتقل فيما يلي لدراسة العلاقة بين جبر B وجبر BRK.

تعريف (7.2). [3]

جبر BRK (BRK $-$ algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الآتية:

$(\mathrm{BRK}_1)\ x * 0 = x$

$(\mathrm{BRK}_2)\ (x * y) * x = 0 * y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y \in X$.

ملاحظة(2.2). [3]

إن مفهومي جبرB وجبرBRK غير متكافئين، حيث أنه ليس من الضروري أن يكون كل جبرB هو جبرBRK وكذلك العكس، وسنوضح ذلك من خلال المثاليين الآتيين:

مثال(2.2). [3]

لتكن المجموعة $X=\{0,1,2,3\}$ مزودة بالعملية $*$ المعرفة وفق جدول كيلي الآتي:

*	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0
2	2	1	0	1
3	3	2	3	0

عندئذ نجد أن $(X, *,0)$ جبرBRK لكنه ليس جبرB لأن (B_3) غير محققة بالضرورة، فمثلاً لأجل العنصر 3 لدينا: $(3*3)*3=1\neq 3=3*(3*(0*3))$

مثال(3.2). [3]

لتكن المجموعة $X=\{0,1,2,3,4,5\}$ مزودة بالعملية $*$ المعرفة وفق جدول كيلي الآتي :

*	0	1	2	3	4	5
0	0	2	1	3	4	5
1	1	0	2	4	5	3
2	2	1	0	5	3	4
3	3	4	5	0	2	1
4	4	5	3	1	0	2

5	5	3	4	2	1	0

عندئذ نجد أن $(X, *,0)$ جبر B لكنه ليس جبر BRK لأن الخاصة (BRK_2) غير محققة بالضرورة، فمثلاً لأجل العنصرين 1,3 لدينا:

$$(1*3)*1=5\neq 3 =0*3$$

سنقوم فيما يلي بدراسة العلاقة بين هذين الجبرين.

مبرهنة (14.2). [3]

إذا كان $(X, *,0)$ جبر B $0-$ تبديلي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبر BRK.

تعريف (8.2). [3]

ليكن $(X,*,0)$ جبر BRK عندئذ يقال عن X إنه وسطي (medial) إذا تحقق الشرط الآتي:

$$(\square) \quad (x * y) * (z * u) = (x * z) * (y * u) \qquad ; \forall x, y, z, u \in X$$

مبرهنة (15.2). [3]

ليكن $(X, *,0)$ جبر BRK. عندئذ يكون $(X,*,0)$ وسطياً إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية:

$(\mathrm{BRK}_3)\ x * (y * z) = z * (y* x)$

$(\mathrm{BRK}_4)\ x * 0 = x$

$(\mathrm{BRK}_5)\ x * x = 0$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة (16.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبر BRK وسطي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبر B $0-$ تبديلي.

البرهان.

لنفرض أن X جبر BRK وسطي، عندئذ من الخاصة (BRK_5) ينتج تحقق (B_1)، ومن (BRK_3) وبوضع $x = y = 0$ نجد أن:

$$0 * (0 * z) = z *(0* 0) = z \qquad /(\mathrm{BRK}_5) \text{ و } (\mathrm{BRK}_4) /$$

أي أن الخاصة (B_8) محققة . ومن تعريف جبر BRK الوسطي وبوضع $u = y$ في العلاقة $(\square)$ نجد:

$$(x * y) * (z * y) = (x * z) * (y * y)$$

$$= (x * z) * 0 \qquad /\mathrm{BRK}_5\ /$$
$$= x * z \qquad /\mathrm{BRK}_4\ /$$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$ وبالتالي الخاصة (B_{10}) محققة، ومن تحقق (B_1) و(B_8) و(B_{10}) عندئذ حسب المبرهنة (2.1) نجد أن X هو جبرB.

ومن(BRK_3) ينتج تحقق (B_{17}) وحسب المبرهنة (4.1) ينتج أن X هو جبرB 0− تبديلي.

ننتقل فيما يلي لدراسة العلاقة بين جبرB وجبرBZ.

تعريف (9.2). [2]

جبرBZ (BZ −algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الآتية:

$(\mathrm{BZ}_1)\ (\ (x * z) * (y * z)\ ) *\ (x * y) = 0$

$(\mathrm{BZ}_2)\ x * 0 = x$

$(\mathrm{BZ}_3)\ x * y = y * x = 0 \Rightarrow x = y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة (17.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبرB، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبر BZ.

البرهان.

لنفرض أن X جبرB، عندئذ من الخاصة (B_{10}) نجد أن:

$$(\ (x * z) * (y * z)\ ) * (x * y) = (x * y) * (x * y) = 0$$

وذلك مهما تكن $x, y, z \in X$ وبالتالي (BZ_1) محققة، ومن (B_2) و(B_{11}) ينتج تحقق (BZ_2) و (BZ_3) على الترتيب، وبالتالي X جبرBZ.

مبرهنة(18.2). [2]

ليكن $(X, *,0)$ جبر BZ عندئذ الخاصة الآتية محققة:

$(\mathrm{BZ}_4)\ x * x = 0$

وذلك مهما يكن $x \in$ X.

مبرهنة (19.2). [5]

ليكن $(X, *,0)$ جبر BZ .عندئذ الشرطين الآتيين متكافئين:

$(\mathrm{BZ}_5) \quad 0 * (0 * x) = x$

$(\mathrm{BZ}_6) \ (x * y) * (z * y) = x * z$

وذلك مهما يكن $x, y, z \in X$.

مبرهنة(20.2).

ليكن $(X, *,0)$ جبر BZ ويحقق الشرط (BZ_5) . عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبر B.

البرهان.

من كون X جبر BZ عندئذ من المبرهنة(18.2) ينتج تحقق (B_1).

ومن المبرهنة (19.2) ينتج تحقق (B_8) و (B_{10}).

ومن تحقق الخواص (B_1) و (B_8) و(B_{10}) ينتج أن X هو جبر B.

ننتقل فيما يلي لدراسة العلاقة بين جبر B وجبر BCH.

تعريف (10.2). [13]

جبر BCH (BCH −algebra) هو مجموعة غير خالية X تحوي عنصراً ثابتاً 0 و مزودة بعملية ثنائية $*$ تحقق المبادئ الاتية:

$(\mathrm{BCH}_1) \ x * 0 = x$

$(\mathrm{BCH}_2) \ x * x = 0$

$(\mathrm{BCH}_3) \ x * y = y * x = 0 \Rightarrow x = y$

$(\mathrm{BCH}_4) \ (x * y) * z = (x * z) * y$

وذلك مهما تكن العناصر $x, y, z \in X$.

مبرهنة (21.2).

إذا كان $(X, *,0)$ جبر B 0− تبديلي، عندئذ يكون $(X, *,0)$ جبر BCH.

البرهان.

ينتج من (B_1) و (B_2) و (B_{11}) و (B_{16}).

المراجع:

[1] Abdullah, H. K., & Atshan, A. A. "**Complete ideal and n−ideal of B−algebra**".Applied Mathematical Sciences, 11(35), 1705−1713. HIKARI Ltd. https://doi.org/10.12988/ams.2017.75159. (2017)

[2] Abed, A. H. "**A structure of BZ−algebras and its properties**". International Journal of Engineering and Information Systems (IJEAIS), 4(8), 110−115 . www.ijeais.org. (2020)

[3] Bandaru, R. K. "**On BRK-algebras**". International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2012, Article ID 952654, 12 pages. https://doi.org/10.1155/2012/952654. (2012)

[4] Cho, J. R., & Kim, H. S. "**On B-algebras and quasigroups**". Quasigroups and Related Systems, 8, 1–6. (2001)

[5] Du, Y. D., & Zhang, X. H. " **Hyper BZ-algebras and semihypergroups**". Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras, 2(3), 13–28. https://doi.org/10.52547/HATEF.JAHLA.2.3.2. (2021)

[6] Fitria, E., Gemawati, S., & Kartini. " **Prime ideals in B- algebras**". International Journal of Algebra, 11(7), 301-309. https://doi.org/10.12988/ija.2017.7838. (2017)

[7] Kim, Y. H. "**On medial B-algebras**". J. Appl. Math. & Informatics, 32(5-6), 849–856. https://doi.org/10.14317/jami.2014.849. (2014)

[8] Monisha, B. "**On TM-algebras**" [Master's thesis, Avinashilingam Institute for Home Science and Higher Education for Women] . (2014, March)

[9] Neggers, J., Ahn, S. S., & Kim, H. S. " **On Q- algebras**". International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 27(12), 749–757. https://doi.org/10.1155/S0161171201006627. (2001)

[10] Omar, R. A. K. "**On RG – Algebra**". Pure Mathematical Sciences, 3(2), 59–70. HIKARI Ltd. https://doi.org/10.12988/pms.2014.31119. (2014)

[11] Soleimani, R., & Jahangiri, S. "**A note on t–derivations of B– algebras**". Journal of Mathematics and Computer Science, 10, 138–143. (2014)

[12] Walendziak, A. "**Some axiomatizations of B– algebras**". Mathematica Slovaca, 56(3), 301–306. http://dml.cz/dmlcz/131319. (2006)

[13] Walendziak, A. "**BG/BF1/B/BM–algebras are congruence permutable**". Mathematica Aeterna, 5(2), 351–356. (2015)

دراسة تفصيلية لمتراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم العامة مع معادلات ماكسويل وقوانين الانحفاظ الميكانيكية في الإحداثيات المنحنية ضمن الفضاء ^{3} ،

[+] ط. ولاء عادل العلي [++]أ.د. منتجب الحسن [+++] د. رقية رضوان

ملخص البحث :

يركز هذا البحث على وسط مادي مستمر مرن تقليدي (مهمل البنية الجزيئية) .

في هذا الوسط نقوم بكتابة معادلات ماكسويل الكهرومغناطيسية وقوانين الانحفاظ الميكانيكية المعتمدة من مرجع (Eringen) وتحويلها إلى الإحداثيات المنحنية العامة.

بالإضافة إلى ذلك، نقدم مناقشة تفصيلية لمتراجحة كلاوزيوس ـــــــ دوهيم بشكلين وهما الشكل اللامتغير (invariance) والشكل المركباتي في نظام إحداثي منحني كيفي.

الكلمات المفتاحية : متراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم ، الإحداثيات المنحنية العامة ، معادلات مكسويل ، قوانين الانحفاظ .

[+] طالبة ماجستير في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة حمص.

[++] أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة حمص .

+++ أستاذة في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة حمص ..

دراسة تفصيلية لمتراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم العامة
مع معادلات ماكسويل وقوانين الانحفاظ الميكانيكية
في الإحداثيات المنحنية ضمن الفضاء ^{3} ،

A Detailed Study of the General Clausius-Duhem Inequality with Maxwell's Equations and Mechanical Conservation Laws in Curvilinear Coordinates

Walaa Adel Alali [1] & Dr.Mountajab Al-Hasan [2]

& Dr.Roqia Rdwan [3]

Abstract

This research focuses on a classical elastic continuous material medium (neglecting the molecular structure).
For this medium we write Maxwell's electromagnetic equations and mechanical conservation lows based on Eringen's formulation , and transform them into a general curvilinear coordinate system
In addition , we present a detailed discussion of the Clausius-Duhem inequality in two forms : the invariance form and the composite form in an arbitrary curvilinear coordinate system.

Keywords : Clausius-Duhem Inequality , General curvilinear coordinates , Maxwell's equations , conservation lows.

[1] Master Student At Department of Mathematics–Faculty of Science– Homs University
[2] Professor At Department of Mathematics – Faculty of Science – Homs University.
[3] Professor At Department of Mathematics – Faculty of Science – Homs University.

1 – مقدمة

يعود تاريخ الأوساط المستمرة إلى الباحث هوك(Hooke) وكان ذلك في نهاية القرن السابع عشر وهو الباحث الذي وضع الأسس الرياضية لأبسط الأجسام المرنة المهملة البنية الجزيئية والمعينية بمعاملين مادين. بعدها اتى الباحث فويت(Voight) الذي طور الدراسة إلى جسم صلب مرن معتبراً البنية الجزيئية؛ وهو الباحث الذي أشار إلى الملاحظة التالية : إن القوى الداخلية التي تُؤثر على جزء معزول من الجسم لا تتم فقط من خلال الإجهادات المتعارف عليها بل تتم أيضاً من خلال إجهادات إضافية ناتجة عن البنية الجزئية وتدعى إجهادات العزم . بعدها أتى الأخوان الفرنسيان كوسيرات (Cosserat) ليضعوا النظرية الأساسية في الأوساط المستمرة الدقيقة آخذين بعين الاعتبار البنية الجزيئية لهذه الأوساط ودعيت هذه النظرية فيما بعد بنظرية كوسيرات ولكن لم يدرك الوسط العلمي أهمية هذه النظرية لعقود طويلة . بعدها في بداية خمسينات القرن الماضي استفاق الباحثون والعلماء على أهمية هذه النظرية وتشكلت عدة مدارس علمية تبنت هذه النظرية وعملت على تطويرها ; منها مدرسة الباحث التركي إيرنغن (Eringen) ومدرسة الباحث البولندي نوفاسكي (Nowacki) ومدرسة الباحث الألماني غورتين(Gurtin) ومدرسة الباحث الجورجي كوبرازي(kupradse) ومدرسة الباحث الروماني ياشن(yashan) إلى أخره ...

فعلى سبيل المثال قام الباحث إيرنغن بمناقشة الأسس الرياضية (المعادلات المحلية و اللامحلية) التي تحكم هذه الأوساط ولم يكتفي إيرنغن بذلك بل قام بتعميم النظرية إلى نظرية الوسط المستمر الدقيق ذي الامتطاط المجهري(Microstretch Continuum) ونظرية الوسط المادي المستمر الدقيق التحول(Micromorphic). إلا أنَّ الصعوبة الرياضية تكمن في أنَّ المعادلات التفاضلية الحاكمة لهذه الأوساط المستمرة معقّدة نسبياً من حيث البنية التفاضلية والشروط الحدّية الإبتدائية; وهذا الأمر يقودنا أحياناً إلى الإستعانة بطرائق تحليلية تُسهل حل هذه المعادلات.

إلى ما تقدم ذكره ننوه إلى أن في المرجع [11] تمت مناقشة معادلات وسط مادي مستمر تقليدي في نظام إحداثي كيفي.

وفي المرجع [15] تمت مناقشة المعادلات التفاضلية التي تصف وسط مادي مستمر غير إقليدي أيضاً في نظام إحداثي كيفي.

أما بالنسبة لمناقشة معادلات ماكسويل في نظام إحداثي منحني كيفي فقد تمت في المرجعي[12,13] .

2- هدف البحث

يهدف البحث إلى تحويل وإعادة صياغة معادلات ماكسويل الكهرومغناطيسية وقوانين الانحفاظ الميكانيكية في نظام الإحداثيات المنحنية العامة ، التي صِيغَ جزءٌ منها بالشكل اللامتغير وجزءٌ آخر في نظام الإحداثيات الديكارتية ، وإجراء دراسة تفصيلية لمتراجحة كلاوزيوس – دوهيم العامة (C-D) الترموديناميكية بشكلها المتغير وشكلها المركباتي في نظام إحداثي منحني كيفي، حيث تكمن أهمية البحث بالآتي :

إمكانية دمج معادلات ماكسويل الكهرومغناطيسية وقوانين الانحفاظ الميكانيكية ، مما يسهل دراسة الأوساط المستمرة المرنة عند خضوعها لحقول فيزيائية مشتركة .

بالإضافة إلى ذلك ، مناقشة متراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم (C-D) في نظام إحداثيات منحنٍ كيفي (إذا كان الجسم مكعباً يُفضّل استخدام الإحداثيات الديكارتية ، وإذا إذا كان الجسم كرة يُفضّل استخدام الإحداثيات الكروية، وإذا كان الجسم أسطوانة يُفضّل استخدام الإحداثيات الأسطوانية).

3- مواد وطرائق البحث

في هذا البحث سنستخدم الهندسة التفاضلية (التحليل التنسوري) في كتابة الكميات التنسورية ومن ثم تمثيلها في نظام إحداثي منحنٍ كيفي لنحصل على المطلوب.

4- النتائج ومناقشتها

أولاً : تحويل معادلات ماكسويل الكهرومغناطيسية وقوانين الانحفاظ الميكانيكية إلى نظام الإحداثيات المنحنية العامة :

اعتماداً على مرجعي إرينغن[6] و[3] للأوساط المستمرة المرنة التقليدية سنقوم بعرض المعادلات الأساسية ; التي صِيغَ جزءٌ منها بالشكل اللامتغير وجزءٌ آخر في نظام الإحداثيات الديكارتية ليتم بعد ذلك تحويلها إلى نظام الإحداثيات المنحنية العامة في الفضاء ثلاثي الأبعاد ^{3} ، .

أ- معادلات ماكسويل الكهرومغناطيسية ، مرفقة بمعادلة استمرارية الشحنة (في شكلها اللامتغير):

$$\begin{aligned}
&\nabla . \mathbf{D} = q_e \\
&\nabla . \mathbf{B} = 0 \\
&\frac{\partial q_e}{\partial t} + \nabla . \mathbf{J} = 0 \qquad (4.1)\\
&\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \\
&\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{1}{c}\mathbf{J}
\end{aligned}$$

حيث يُمثّل $\mathbf{D}$ متجه الإزاحة الكهربائية ، q_e كثافة الشحنة الكهربائية ، $\mathbf{J}$ متجه التيار.

$\mathbf{E}$ المتجه الكهربائي ، $\mathbf{H}$ المتجه المغناطيسي ، $\mathbf{B}$ متجه التحريض المغناطيسي.

بينما يشير c إلى سرعة الضوء في الخلاء .

ب- قوانين الانحفاظ الميكانيكية ومتراجحة إنتروبيا(في شكلها اللامتغير و أخرى بدلالة المركبات الديكارتية)

$$\begin{aligned}
&r_0 = rJ \qquad or \qquad r^g + r\nabla \times \mathbf{v} = 0 \\
&t_{kl,k} + r(f_l - \ddot{x}_l) + {}_M f_l = 0 \\
&t_{[kl]} = E_{klm} P_{[lm]} + B_{klm} M_{[lm]} \qquad (4.2)\\
&r\dot{E} - t_{kl} v_{l,k} - \nabla \times q - rh - rE \times \left(\frac{\mathbf{P}}{r}\right)^{\cdot} + {}_M M \times \dot{B} - J \times E = 0 \\
&rh^g - \nabla \times \left(\frac{\mathbf{q}}{q}\right) - \frac{\partial h}{q} \; 0
\end{aligned}$$

معادلة الطاقة موجودة في المرجع[3].

حيثُ إنَّ :

- السطر الأول من (4.2) : يمثل قانون انحفاظ الكتلة.
- السطر الثاني : يمثل قانون انحفاظ كمية الحركة الخطية.
- السطر الثالث : يمثل قانون انحفاظ العزم الحركي.
- السطر الرابع : يمثل قانون انحفاظ الطاقة .
- السطر الأخير: يمثل المبدأ الثاني للديناميكا الحرارية.

كما تشير الأقواس المربعة المحيطة بالأدلة إلى التناظر العكسي ،على سبيل المثال:

$$t_{[kl]} = \frac{1}{2}(t_{kl} - t_{lk})$$

أما الرموز السابقة تُمثل ما يلي:

rكثافة الكتلة الحالية ، r_0 كثافة الكتلة الابتدائية ، $\dot{r}$ المشتق المادي للكثافة ، $\mathbf{v}$متجه السرعة المادية ، t_{kl} تنسور إجهاد كوشي ، h كثافة المصدر الحرارية ، $t_{kl,k}$ تباعد مؤثر الإجهاد ، f_l القوة الميكانيكية الحجمية ، $\boldsymbol{P}$ متجه الاستقطاب ، $\dot{P}_l$ مركبات متجه التسارع المادي ، f_{Ml} القوة الكهرومغناطيسية الحجمية ، q درجة الحرارة المطلقة للوسط (بحيث يتحقق $q > 0 \ , \inf \ q = 0$).

$\mathbf{q}$متجه التدفق الحراري ، h كثافة الإنتروبيا ، $\dot{h}$ تمثل المشتق الجزئي الزمني لكثافة الإنتروبيا، $\mathbf{M}$ متجه المغنطة ، $V_{l,k}$ المركبات الديكارتية لمتجه سرعة نقطة من الوسط والفاصلة الدليلية تعني الاشتقاق الجزئي لـ x_k ، $\dot{\mathbf{B}}$ المشتق الجزئي الزمني لمتجه التحريض المغناطيسي.

و J ، E ، M دوال متجهية كهرومغناطيسية معينة بالعلاقات التالية :

$$J = \mathbf{J} - q_e\mathbf{v}$$

$$E = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$M = \mathbf{M} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \boldsymbol{P}$$

صياغة معادلات ماكسويل الكهرومغناطيسية وقوانين الانحفاظ الميكانيكية في نظام الإحداثيات المنحنية [5] و [2] و[4] :

نعتبر النظام الإحداثي الديكارتي العطالي الأولري (ox_1, x_2, x_3) ذي القاعدة$(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ والقاعدتان الأولريتان التاليتان : موافقة التغير $\mathbf{g}_i$ ومخالفة التغير $\mathbf{g}^i$.

والمصفوفة المترية موافقة التغير $\{g_{ij}\}_{3\times3}$ التي تعطى عناصرها بالعلاقة:

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$$

والمصفوفة المترية مخالفة التغير $\{g^{ij}\}_{3\times3}$ التي تعطى عناصرها بالعلاقة:

$$g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$$

ولنحاول الآن استنتاج معادلات ماكسويل الكهرومغناطيسية الترموديناميكية بشكلها المركباتي في النظام الإحداثي المنحني (h_1, h_2, h_3) الذي مبدأه O وقاعدته موافقة التغير هي $g_i(h_1, h_2, h_3, t)$ وقاعدته مخالفة التغير هي $g^i(h_1, h_2, h_3, t)$.

حيث إنَّ : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(h_1, h_2, h_3, t) = x_i(h_1, h_2, h_3, t)\mathbf{e}_i$.

استناداً إلى ما سبق يمكننا كتابة متجه الإزاحة الكهربائية بدلالة مركباته بالشكل التالي:

$$\mathbf{D} = D^j \mathbf{g}_j = D_j \mathbf{g}^j$$

وبتطبيق مؤثر التباعد في النظام الإحداثي المنحني نحصل على المعادلة التالية:

$$\nabla . \mathbf{D} = \nabla_j D^j = \frac{\partial D^i}{\partial h^i} + \Gamma^i_{ij} D^j = q_e$$

وعلى النحو ذاته، يكتب متجه التحريض المغناطيسي بدلالة مركباته بالشكل التالي:

$$\mathbf{B} = B^j \mathbf{g}_j = B_j \mathbf{g}^j$$

بتطبيق مؤثر التباعد في النظام الإحداثي المنحني نحصل على المعادلة التالية:

$$\nabla . \mathbf{B} = \nabla_j B^j = \nabla^j B_j = 0$$

وبالمثل، يمكننا كتابة متجه التيار بدلالة مركباته بالشكل التالي:

$$\mathbf{J} = J^j \mathbf{g}_j = J_j \mathbf{g}^j$$

ومنه تصبح معادلة استمرار الشحنة بالشكل التالي :

$$\frac{\partial q_e}{\partial t} + \nabla^j J_j = 0$$

كما يُعبر عن متجه التحريض المغناطيسي بدلالة مركباته بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{B} = B^k \mathbf{g}_k \quad \text{ق} \quad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{B}^k}{\partial t} \mathbf{g}_k + \dot{\mathbf{g}}_k B^k$$

لكن $\dot{\mathbf{g}}_k = A^l_k \mathbf{g}_l$ ، وبالتالي :

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{B}^k}{\partial t} \mathbf{g}_k + A^l_k \mathbf{g}_l B^k = \frac{\partial \boldsymbol{B}^l}{\partial t} \mathbf{g}_l + A^l_k \mathbf{g}_l B^k = \frac{\partial \boldsymbol{B}^l}{\partial t} + A^l_k B^k \mathbf{g}_l$$

وعليه فإن :

$$= \boldsymbol{E} \quad \frac{1}{c}\frac{\P \boldsymbol{B}}{\P t} \quad \mathbf{0} \quad +e^{lij} \, {}_i E_j \, \mathbf{g}_l \quad \frac{1}{c}\frac{\P \boldsymbol{B}^l}{\P t} \quad A_k^l B^k \mathbf{g}_l = \mathbf{0}$$

وبتطبيق الخطوات ذاتها على متجه الإزاحة الكهربائية نصل إلى المعادلة التالية مباشرة:

$$= \boldsymbol{H} \quad \frac{1}{c}\frac{\P \boldsymbol{D}}{\P t} \quad \frac{1}{c}\boldsymbol{J} \quad +e^{lij} \quad {}_i H_j \, \mathbf{g}_l \quad \frac{1}{c}\frac{\P \boldsymbol{D}^l}{\P t} \quad A_k^l D^k \mathbf{g}_l = \frac{1}{c} J^l \mathbf{g}_l$$

وبالتالي ، يمكننا كتابة معادلات مكسويل الكهرومغناطيسية بدلالة المركبات في نظام الإحداثيات المنحنية العامة في الفضاء الثلاثي الأبعاد على النحو التالي:

$$\nabla^j D_j = q_e$$

$$\nabla^j B_j = 0$$

$$\frac{\P q_e}{\P t} + \nabla^j J_j = 0$$

$$e^{lij} = {}_i E_j \quad \frac{1}{c}\left(B^{\&t} \quad A_k^l B^k\right) + \theta$$

$$e^{lij} = {}_i H_j \quad \frac{1}{c}\left(D^{\&t} \quad A_k^l D^k\right) + \frac{1}{c} J^l$$

لننتقل الآن إلى تحويل قوانين الانحفاظ الميكانيكية الواردة في (4.2) إلى نظام الإحداثيات المنحنية العامة .

حيث إن هذه القوانين صِيغَ جزءٌ منها بالشكل اللامتغير وجزءٌ آخر في نظام الإحداثيات الديكارتية فإنه لا يمكننا تحويلها مباشرة كما فعلنا في معادلات مكسويل.

بناءً على ذلك ، سنقوم بإعادة كتابة قوانين الانحفاظ الميكانيكية في شكلها اللامتغير ومن ثم تحويلها إلى نظام الإحداثيات المنحنية وذلك باتباع ما يلي:

لدينا بحسب الهندسة التفاضلية [7] و[8] و[14] :

$$= \boldsymbol{t} \quad \text{div} \, \mathbf{t} = t_{kd,k} \boldsymbol{e}_l$$

في هذه العلاقة نشير إلى أنّ تفرق الحقل التنسوري $\boldsymbol{t}$ هو حقل متجهي كون أنّ مؤثر التفرق يخفض من مرتبة التنسور بمقدار واحد.

$$\boldsymbol{f} = f_l \boldsymbol{e}_l$$

$$\boldsymbol{v} = v_l \boldsymbol{e}_l$$

$$_{\mathbf{M}}\boldsymbol{f} = f_l \boldsymbol{e}_l$$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{E} \text{ ؤ } \boldsymbol{P} + \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{M} \quad \text{ ق } \operatorname{skw} \mathbf{t} = \operatorname{skw}\left(\boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{P}\right) + \operatorname{skw}\left(\boldsymbol{B} \quad \text{ؤ} \boldsymbol{M}\right)$$

استناداً إلى ما سبق ، نحصل على القوانين الثلاثة الأولى في شكلها اللامتغير التالي:

$$r_0 = rJ \qquad or \qquad r^{\mathrm{g}} + r\nabla \times \mathbf{v} = 0$$

$$= \boldsymbol{t} \quad r(\boldsymbol{f} \quad \text{&}) \quad _{\mathbf{M}}\boldsymbol{f} + - + 0 \text{ر}$$

$$\operatorname{skw} \mathbf{t} = \operatorname{skw}\left(\boldsymbol{E} \text{ ؤ } \boldsymbol{P}\right) + \operatorname{skw}\left(\boldsymbol{B} \quad \text{M}\right)$$

وتكتب هذه القوانين بدلالة المركبات في نظام الإحداثيات المنحنية العامة في الفضاء الثلاثي الأبعاد [3] ، على النحو التالي:

$$r_0 = rJ \qquad or \qquad r^{\mathrm{g}} + r \text{ر}^{\,j} v_j = 0$$

$$\nabla_k t^{kj} + r\left(f^j - \text{&} - v^l K_l^j\right) + {}_M f^j = 0$$

$$t^{\text{&}\text{ü}} = E^{\text{&}} P^{\text{ü}} + B^{\text{&}} M^{\text{ü}}$$

حيث إنَّ :

$$\nabla \mathrm{t} = \nabla_k \mathrm{t}^{kj} \; g_j \quad , \quad \boldsymbol{f} = f^j \; g_j \quad , \quad _{\mathbf{M}}\boldsymbol{f} = {}_M f^j \; g_j$$

$$v = v^l g_l \text{ ق } \text{&} = \text{&} g_l + v^l \text{&}_l$$

لكن $\text{&}_l = K_l^j g_j$ ، ومنه:

$$\text{&} = \text{&} g_l + v^l K_l^j g_j = \text{&} g_j + v^l K_l^j g_j = \left(\text{&} + v^l K_l^j\right) g_j$$

علماً أن:

$$E^{\text{&}} P^{\text{ü}} = \frac{1}{2}\left(E^k P^l - E^l P^k\right)$$

أما قانون انحفاظ الطاقة (السطر الرابع) والمبدأ الثاني للديناميكا الحرارية (السطر الخامس) فسيتم دمجهما معاً بالشكل اللامتغير، وذلك من أجل التمهيد لإيجاد متراجحة كلاوزيوس – دوهيم العامة في نظام الإحداثيات المنحنية .

ثانياً : دراسة تفصيلية للصيغة العامة لمتراجحة كلاوزيوس–دوهيم

اعتماداً على مبادئ الديناميك الحراري للأوساط المستمرة يتم استنتاج متراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم الترموديناميكية العامة من خلال الدمج الرياضي المباشر بين المبدأ الثاني للديناميك الحراري و قانون انحفاظ الطاقة وفق التالي :

انطلاقاً من المبدأ الثاني للديناميك الحراري

$$\dot{r}h - \rho\left(\frac{\mathbf{q}}{q}\right).\nabla\left(\frac{h}{q}\right) \geq 0 \qquad (4.3)$$

بضرب طرفي العلاقة (4.3) بـ q حيث $(q > 0)$ نجد :

$$q\dot{r}h - q\left[\rho\left(\frac{\mathbf{q}}{q}\right).\nabla h\right] \geq 0 \qquad (4.4)$$

ويُعطى قانون انحفاظ الطاقة بالشكل التالي :

$$\rho\dot{E} - t_{kl}V_{l,k} - \rho\mathbf{q}\times - rh - \rho E\times\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right) + M\times\dot{B} - J\times E = 0 \qquad (4.5)$$

بعزل rh من (4.5) نجد :

$$rh = \rho\dot{E} - t_{kl}V_{l,k} - \rho\mathbf{q}\times - \rho E\times\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right) + M\times\dot{B} - J\times E \qquad (4.6)$$

نعوض في (4.4) نحصل على :

$$q\dot{r}h - q\left[\rho\left(\frac{\mathbf{q}}{q}\right).\nabla\right]\rho E\dot{} + t_{kl}V_{l,k} + \rho\mathbf{q}\times + \rho E\times\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right) - M\times\dot{B} + J\times E \geq 0 \qquad (4.7)$$

نعلم أن :

$$\rho\left(\frac{\mathbf{q}}{q}\right).\nabla\left(\frac{1}{q}\right)\mathbf{q} = \rho\left(\frac{1}{q}\right)\nabla\mathbf{q}\times\rho\mathbf{q} - \rho\left(\frac{1}{q^2}\right)\nabla q\times\rho\mathbf{q} \qquad (4.8)$$

بالتعويض في (4.7) نجد :

$$qr\dot{A} + \left(\frac{1}{q}\mathbf{q}.\nabla q - \nabla^2\mathbf{q}\right)r\dot{E} - t_{kl}V_{l,k} - \nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right)^{g} + \mu_0 M\times\dot{\mathbf{B}} - J = 0$$

$$qrh^{g} + \left(\frac{1}{q}\mathbf{q}.\nabla q - \nabla^2\mathbf{q}\right)re^{g} + t_{kl}V_{l,k} + re\times\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right)^{g} - \mu_0 M\times\mathbf{B}^{g} + J = 0$$

$$r\left(q\dot{A} + \dot{E}\right) + t_{kl}V_{l,k} + re\times\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right)^{g} - \mu_0 M\times\dot{\mathbf{B}} + J = \left(\frac{1}{q}\mathbf{q}.\nabla q - \nabla^2\mathbf{q}\right) \quad (4.9)$$

للتخلص من المشتقات الزمنية $\dot{A}$ و $\dot{E}$ نستبدلها بمشتقة طاقة هيلمهولتز Ψ الحرة المعطاة بالعلاقة التالية :

$$\Psi = e - qh - E_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right)$$

باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن t وفقاً للوصف المادي :

$$\Psi^{g} = \dot{e} - \left(q\dot{h} + \dot{q}h\right) - \left[\dot{E}_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right) + E_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right)^{g}\right]$$

$$\Psi^{g} = \dot{e} - q\dot{h} - h\dot{q} - \dot{E}_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right) - E_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right)^{g} \quad (4.10)$$

نضرب طرفي(4.10) بـ r نحصل على :

$$r\Psi^{g} = re - rq\dot{h} - rh\dot{q} - \dot{E}_k\boldsymbol{P}_k - rE_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right)^{g}$$

$$rq\dot{h} - re - rE_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right)^{g} = -r\Psi^{g} - rh\dot{q} - \dot{E}_k\boldsymbol{P}_k$$

$$r\left(q\dot{h} - \dot{e}\right) + rE_k\left(\frac{\boldsymbol{P}_k}{r}\right)^{g} = -r\Psi^{g} - rh\dot{q} - \dot{E}_k\boldsymbol{P}_k \quad (4.11)$$

بتعويض (4.11) في(4.9) نجد :

$$- r\dot{\Psi} - r\dot{q}\eta - E_k\dot{P}_k + t_{kl}v_{l,k} - M_k\dot{B}_k + J_k E_k + \frac{1}{q}q_{,l}\, q^l \geq 0$$

$$- r(\dot{\Psi} + \dot{q}\eta) + t_{kl}\, v_{l,k} + \frac{1}{q}q_k\, q_{,k} - P_k\dot{E}_k - M_k\dot{B}_k + J_k E_k \geq 0 \qquad (4.12)$$

وبهذا نكون حصلنا على متراجحة Clausius–Duhem (C–D) العامة.

حيث إنّ:

$$\Psi = \frac{S}{r_0} = e - q\eta - \frac{1}{r}E_k P_k = E - q\eta - \frac{1}{r_0}\Pi_K E_K$$

تم الحصول على هذه العلاقة من خلال تعريف طاقة هيلمهولتز الحرة والانتقال إلى الحالة المرجعية للمادة ، حيث يشير الرمز S إلى دالة الطاقة المخزنة للمادة والتي تُعبر عن ارتباط طاقة هيلمهولتز الحرة بمتغيرات الحالة المادية الأساسية وفق العلاقة التأسيسية:

$$r_0\Psi = S = r_0(e - q\eta) - E_K C_{KL} = \Psi(C_{KL}, q, q_K, E_K, B_K, X)$$

ثالثاً : الشكل اللامتغير لمتراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم العامة :

وفقاً للهندسة التفاضلية [5] و[6] :

$$J = E_k \times E_k$$
$$M_k\dot{B}_k = M \times \dot{B}$$
$$P_k\dot{E}_k = P \times \dot{E}$$
$$q_k\, q_{,k} = q \times q$$
$$t_{kl}\, v_{l,k} = t : v$$

فتصبح المتراجحة (4.12) بالشكل التالي:

$$- r(\dot{\Psi} + \dot{q}\eta) + t : v + \frac{1}{q}q \times q - P \times \dot{E} - M \times \dot{B} + J \times E \geq 0 \qquad (4.13)$$

تدعى المتراجحة السابقة متراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم العامة في شكلها اللامتغير (invariance) .

حيث نشير بالرمز : إلى الجداء الداخلي للتنسورين من المرتبة الثانية وما فوق.

رابعاً : متراجحة كلاوزيوس– دوهيم العامة في نظام إحداثيات منحني كيفي

لدينا بحسب خواص الجداء الداخلي لمقطعين متجهين أو تنسورين في النظام الإحداثي السابق

ما يلي [10] :

$$J \times E = J_k E^k = J^k E_k \qquad (4.14)$$

حيث إن : $J = J^i g_i = J_i g^i$

ولدينا $\boldsymbol{B} = B^i g_i$ ق $\dot{\boldsymbol{B}} = \dot{B}^i g_i + B^i \dot{g}_i$

ولكن $\dot{\boldsymbol{g}}_i = A_i^j \boldsymbol{g}_j$ ، بالتالي:

$$M \times \dot{\boldsymbol{B}} = M_k \left(\dot{B}^i + B^i A_i^k \right) \qquad (4.15)$$

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \dot{B}^i g_i + B^i A_i^j \boldsymbol{g}_j = \dot{B}^i g_j + B^i A_i^j \boldsymbol{g}_j = \left(\dot{B}^i + B^i A_i^j \right) \boldsymbol{g}_j$$

وأيضاً :

$$\boldsymbol{E} = E^i g_i \quad \text{ق} \quad \dot{\boldsymbol{E}} = \dot{E}^i g_i + E^i \dot{g}_i$$

ولكن $\dot{g}_i = R_i^j g_j$ ، بالتالي:

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \dot{E}^i g_i + E^i R_i^j g_j = \dot{E}^i g_j + E^i R_i^j g_j = \left(\dot{E}^i + E^i R_i^j \right) g_j$$

$$\boldsymbol{P} \times \dot{E} = \boldsymbol{P}_j \left(\dot{E}^i + E^i R_i^j \right) \qquad (4.16)$$

نعلم أنّ: $\mathbf{q} = q_j g^j$ وبما أن $q = q_j g^j$ $\dfrac{\partial q}{\partial h_j} g^j$

وبالتالي:

$$\mathbf{q} \times \nabla q = q_j \frac{\partial q}{\partial h_j} \qquad (4.17)$$

بما أنّ:

$$\mathbf{t} = t_{kl}\, g^k \otimes g^l = t^l_k\, g^k \otimes g_l = t^k_l\, g_k \otimes g^l = t^{lk}\, g_l \otimes g_k$$

$$\nu \quad {}_kV_l\left(g^k \otimes g^l\right) \qquad {}_kV^l\left(g^k \otimes g_l\right) = \nu = {}^kV_l\left(g_k \otimes g^l\right)$$

فإنّ:

$$t : \nu \quad t_{kl} \quad {}_kV_l \quad t^l_k \quad {}_kV^l = t^k_l = {}^kV_l \qquad (4.18)$$

حيث إنّ:

$$\mathrm{G}_k V^l \qquad {}_kV^l \quad V^j + \Gamma^j_{kj} \quad \text{و} \quad \mathrm{G}_k V_l \qquad {}_kV_l \quad V_j - \Gamma^j_{lk}$$

علماً بأن G^j_{lk} هي رموز كريستوفل من النوع الثاني وتعطى بالعلاقة التالية [1] و[8] :

$$\Gamma^j_{lk} = \Gamma_{lkj}\, g^{ji}$$

نعوض كلاً من (4.14) و (4.15) و(4.16) و(4.17) و(4.18) في (4.13) نجد :

$$- r(\Psi + \dot{q}m) + t^k_l \nu\, {}^kV_l + \frac{1}{q} q_j \frac{\partial q}{\partial h_j} - \boldsymbol{P}_j \left(E + E^i R^j_i\right)$$

$$- M_k \left(B^k + B^i A^k_i\right) + J\, {}^kE_k \geq 0$$

تدعى المتراجحة السابقة متراجحة كلاوزيوس ـ دوهيم بشكلها المركباتي في النظام الإحداثي المنحني في ^{3} ، .

5- الاستنتاجات والتوصيات

الاستنتاجات : في هذا البحث تم يلي :

- استنتاج معادلات ماكسويل وقوانين الانحفاظ الميكانيكية من الشكل اللامتغير إلى نظام الإحداثيات المنحنية العامة في الفضاء ^{3} ، .

- استنتاج متراجحة كلاوزيوس – دوهيم العامة بشكلها المركباتي التفصيلي في نظام إحداثي منحني كيفي .

التوصيات :

- إمكانية تعميم ما تقدم ذكره إلى الوسط المادي المستمر الدقيق الاستقطاب بما يشمل الجسم المرن الدقيق الاستقطاب والجسم اللدن الدقيق الاستقطاب ومائع إيرنغن (المائع الدقيق الاستقطاب).
- إمكانية تعميم ذلك إلى الوسط المادي المستمر الدقيق الامتطاط بما يشمل الجسم المرن الدقيق الامتطاط والجسم اللدن الدقيق الامتطاط ومائع الدقيق الامتطاط .
- إمكانية تعميم ما تقدم ذكره إلى الوسط المادي المستمر الدقيق التحول بما يشمل الجسم المرن الدقيق التحول والجسم اللدن الدقيق التحول ومائع الدقيق التحول .
- إمكانية تعميم ذلك إلى نظرية الكسر بما يشمل الجسم المرن والجسم اللدن فقط .

6- المراجع

1. S , Drobot ," On Cosserat Continua ," Zastosowania .Math ,vol. 12, 323 -346**, 1971 .**

2. M. E. Gurtin, "The Linear Theory of Elasticity," Encyclopedia of Physics, vol. vla / 2, Springer –Verlag, Berlin, **1972**.

3. AC . Eringen , Coostitutive Equatioos of Noolioear Electromagoetic-Elastic Crystals, Springer-Verlag , USA **1990** .

4. A. C. Eringen & G. A. Maugin, *Electrodynamics of Continua I: Foundations and Solid Media*, Springer-Verlag, 1990

5. J.H ,Heinbockel ,"Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics," Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion University,**1996** .

6. Eringen A. C., " Microcontinuum Field Theories: I: Foundations and Solids," Springer Science + Business Media, LLC, **1999** .

7. M. B, Rebecca ," Curvilinear Analysis in a Euclidean Space," Second Edition, University of New Mexico, **2004.**

8. P. G. Ciarlet , "An Introduction To Differential Geometry with Applications to Elasticity ," Liu Bie Ju Centre For mathematical Sciences ,Gty Unversity of Hong Kong , Department of mathematics , **2005.**

9. K. Hackl & M. Goodarzi : An Introduction to Linear Continuum Mechanics, Lecture Notes, Ruhr-University Bochum, Faculty of Civil and Environmental Engineering, **2010 .**

10. H. Nguyen-Schåfer, "Tensor Analysis and Elementary Differential Geometry for Physicists and Engineers," Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg **2017.**

11. Susana , K.S., Classical Continuum Mechanics ,CRC press ,**2022**.

12. Alberta .C.G ., Biro O., liner P., 2D Fourier finite element formulation for magneto statics in Curvilinear Communications ,volume ,article .,2022

13. Hwang J.C., Noh H., Maxwell equations in Curved space time Eur. Phys. J.C ,2023.

14. Itskov M., Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers

Springer , USA **,2025.**

15 . Ottosen ,N.S General Continuum Mechanics and Constitutive Mechanics and Constitutive Modeling ,Elsevier ,**2025**.