

# مجلة جامعة البعث

سلسلة العلوم الأساسية



مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 42 . العدد 21

1442 هـ - 2021 م

الأستاذ الدكتور عبد الباسط الخطيب

رئيس جامعة البعث

المدير المسؤول عن المجلة

رئيس هيئة التحرير	أ. د. ناصر سعد الدين
رئيس التحرير	أ. د. درغام سلوم

مديرة مكتب مجلة جامعة البعث

بشرى مصطفى

عضو هيئة التحرير	د. محمد هلال
عضو هيئة التحرير	د. فهد شريباتي
عضو هيئة التحرير	د. معن سلامة
عضو هيئة التحرير	د. جمال العلي
عضو هيئة التحرير	د. عباد كاسوحة
عضو هيئة التحرير	د. محمود عامر
عضو هيئة التحرير	د. أحمد الحسن
عضو هيئة التحرير	د. سونيا عطية
عضو هيئة التحرير	د. ريم ديب
عضو هيئة التحرير	د. حسن مشرقي
عضو هيئة التحرير	د. هيثم حسن
عضو هيئة التحرير	د. نزار عبشي

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها

الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة البعث

سورية . حمص . جامعة البعث . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : ++ 963 31 2138071

. موقع الإنترنت : [www.albaath-univ.edu.sy](http://www.albaath-univ.edu.sy)

. البريد الإلكتروني : [magazine@ albaath-univ.edu.sy](mailto:magazine@albaath-univ.edu.sy)

**ISSN: 1022-467X**

## شروط النشر في مجلة جامعة البعث

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
  - طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
  - إذا كان الباحث طالب دراسات عليا:  
يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقة على النشر في المجلة.
  - إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:  
يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.
  - إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :  
يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.
  - إذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :  
يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.
  - يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):  
عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي ( كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1- مقدمة
  - 2- هدف البحث
  - 3- مواد وطرق البحث
  - 4- النتائج ومناقشتها .
  - 5- الاستنتاجات والتوصيات .
  - 6- المراجع.

- يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات ( الآداب - الاقتصاد - التربية - الحقوق - السياحة - التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):
- عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي ( كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1. مقدمة.
- 2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
- 3. أهداف البحث و أسئلته.
- 4. فرضيات البحث و حدوده.
- 5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
- 6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
- 7. منهج البحث و إجراءاته.
- 8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
- 9. نتائج البحث.
- 10. مقترحات البحث إن وجدت.
- 11. قائمة المصادر والمراجع.
- 7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:
  - أ- قياس الورق 25×17.5 B5.
  - ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 - يمين 2.5- يسار 2.5 سم
  - ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8
  - ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20
- . كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي . العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.
- ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.
- 8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.
- 9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.
- 10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة . الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة . سنة النشر . وتتبعها معترضة ( - ) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة . دار النشر وتتبعها فاصلة . الطبعة ( ثانية . ثالثة ) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة . وفيما يلي مثال على ذلك:

-MAVRODEANUS, R1986- Flame Spectroscopy. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

. بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة . المجلد والعدد ( كتابة مختزلة ) وبعدها فاصلة . أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة . مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases Clinical Psychiatry News , Vol. 4. 20 – 60

ج . إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد

بالبنود ( أ و ب ) ويكتب في نهاية المراجع العربية: ( المراجع In Arabic )

## رسوم النشر في مجلة جامعة البعث:

1. دفع رسم نشر (20000) ل.س عشرون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.
2. دفع رسم نشر (50000) ل.س خمسون ألف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .
3. دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .
4. دفع مبلغ (3000) ل.س ثلاثة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.

## المحتوى

الصفحة		
38-11	نسرين الأسعد محمد العلي عبد الباسط الخطيب	دراسة استقرار المنظومات الديناميكية المتزاوجة
68- 39	الدكتور محمد شعيب العلي	معاملات ليابونوف الأسيية الموضعية
86-57	الدكتور: مصطفى ديلو	تطبيقات مفعول ميوسبور لدراسة ديناميكية الشبكات الفرعية لخلانط $Si/Fe$
104-87	أ.د. ديب باكير د. ريم ظليمات مروه النَّاصر	دراسة الإرجاع الكهركيميائي للأسبرين على مسرى الكربون الزجاجي
134-101	الدكتورة: ندى محفوظ	الكوليسين المنتج من عزولات سريرية لـ <i>Escherichia coli</i>

155-135	أ. د. منتجب الحسن غيث صالح	توابع الحالة الترموديناميكية والعلاقات التأسيسية الموافقة لجسم هوك الصلب في نظام احداثي منحني كيفي
---------	-------------------------------	--





## دراسة استقرار المنظومات الديناميكية المتزاوجة

\*نسرين الأسعد، \*\* محمد العلي، \*\*\* عبد الباسط الخطيب

### ملخص البحث:

عرفنا في هذا البحث بعض المفاهيم المتعلقة بنظرية البيان والمصفوفات غير السالبة وبيننا العلاقة بين نظرية البيان والمصفوفات غير السالبة وذلك من خلال رسم البيان الموجه المقترن بالمصفوفات غير السالبة. وقد وضعنا بعض المبرهنات التي يمكن من خلالها معرفة بعض خواص المصفوفات غير السالبة (عدم قابلية الاختزال والاولية والاحتمالية ومصفوفات سيا). وقد وضعنا تطبيقاً عملياً يوضح العلاقة بين المصفوفات غير السالبة والبيانات الموجهة، وكذلك عرفنا المنظومات الديناميكية المتزاوجة، وأثبتنا بعض المبرهنات التي تفيدنا في دراسة استقرار المنظومات الديناميكية المتزاوجة بالاعتماد على نظرية البيان والمصفوفات غير السالبة.

الكلمات المفتاحية: المصفوفات غير السالبة، البيانات الموجهة، المصفوفات غير قابلة للاختزال، المصفوفات الأولية، المصفوفات الاحتمالية، المنظومات الديناميكية المتزاوجة.

(\* طالبة ماجستير ميكانيك رياضي في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث - حمص - سوريا.

(\*\* دكتور ميكانيك رياضي في قسم الرياضيات - كمية العلوم - جامعة البعث - حمص - سوريا.

(\*\*\* أستاذ دكتور جبر خطي في قسم الرياضيات - كمية العلوم - جامعة البعث - حمص - سوريا.

# A Study on the Stability of Coupled Dynamical Systems

\*Nsreen Alasaad,\*\* Mouhammad Alali,\*\*\* Abd Albaset Alkhateb

## ABSTRACT

In this paper, we define some concepts related to graph theory and nonnegative matrices, as we illustrate the relationship between graph theory and non-negative matrices by drawing a digraph associated with nonnegative matrices. We state some theorems through which we were able to know some properties of non-negative matrices as, Irreducible matrices, Primitive matrices, Stochastic matrices and SIA matrices . Finally, we deal with a practical application that shows the relationship between non-negative matrices and digraphs. We also define coupled dynamic systems and we have proven some theorems that help us in studying the stability of coupled dynamical systems by relying on the graph theory and non-negative matrices.

**Key words:** Nonnegative Matrices, Digraphs, Irreducible Matrices, Primitive Matrices, Stochastic Matrices, Coupled Dynamical Systems.

---

\*) master student, Department of mathematics–Faculty of science–Albaath university Homs–Syria.

\*\* ) Doctor of mechanics, Department of mathematics–Faculty of science – AlBaath university Homs–Syria.

\*\*\* ) professor of linear algebra, Department of mathematics –Faculty of science– AlBaath university Homs–Syria.

## 1. مقدمة البحث

تعريف البيان: هو عبارة عن بنية بسيطة تتكون من عقد وأوتار، تمثل العقد عناصر المسألة وتكون الأوتار هي العلاقة بين هذه العناصر.

على أرض الواقع قد تكون هذه العقد مدناً، والأوتار هي الطرق بينها أو قد تكون العقد جزيئات كيميائية، والأوتار هي الروابط بينها.

على الرغم من استخدام البيان في الكثير من مجالات الحياة إلا أنه لم يُدرس بحد ذاته حتى العام 1936 حيث ألف العالم كونغ كتاباً اسمه نظرية البيان، أصبحت بعده نظرية البيان فرعاً من فروع الرياضيات نستطيع من خلاله البحث عن حلول في مختلف المجالات.

في هذا البحث قمنا بإيجاد علاقة بين نظرية البيان والمصفوفات غير السالبة وذلك من خلال رسم البيان الموجه المقترن بالمصفوفة غير السالبة، واستطعنا بذلك معرفة العديد من خواص المصفوفات غير السالبة، وقمنا بدراسة خواص المنظومات الديناميكية المتزاوجة بالاعتماد على نظرية البيان والمصفوفات غير السالبة.

## 2. هدف البحث

توفير قاعدة رياضية في نظرية البيان والمصفوفات غير السالبة، ومعرفة بعض خواص المصفوفات غير السالبة، ودراسة استقرار المنظومات الديناميكية المتزاوجة وذلك بالاعتماد على نظرية البيان والمصفوفات غير السالبة.

## 3. طرق أدوات البحث

في هذا البحث تم الاعتماد على نظرية البيان والمصفوفات غير السالبة، لدراسة استقرار وجذب المنظومات الديناميكية المتزاوجة.

#### 4. مشكلة البحث

قد نعلم من خلال دراسات سابقة السلوك الديناميكي لمنظومة ديناميكية معينة عندما تتطور مع الزمن بشكل منفرد، إلا أن معرفتنا بهذه السلوكية المنفردة لن يؤدي إلى معرفة السلوكية الكلية لمجموعة المنظومات السابقة في حال التزاوج فيما بينها الذي ينتج عنه تأثير متبادل فيما بينها. تعتبر مسألة الربط ما بين الديناميكية المنفردة والديناميكية المتزاوجة من المسائل الهامة المفتوحة حالياً والتي لا يزال البحث فيها قائماً. ونعتبر هذا البحث مدخلاً مهماً للتعريف بهذه المسألة ومحاولة حلها والحصول على نتائج جديدة.

#### 5. المناقشة والنتائج

من أجل متطلبات هذا البحث نلزمنا التعاريف التالية:

##### تعريف البيان الموجه:

البيان الموجه (أو الرسم الموجه)  $G$  يتكون من مجموعة غير خالية  $V$  من العناصر تدعى العقد ومجموعة محدودة  $E$  من الأزواج المرتبة من العقد تدعى أوتاراً، حيث نسمي  $V$  مجموعة العقد و  $E$  مجموعة الأوتار من  $G$  و نكتب  $G = (V, E)$  للدلالة على البيان الموجه الموصوف بمجموعة العقد  $V$  و مجموعة الأوتار  $E$ .

##### تعريف الممرات والمسارات والدورات في البيان الموجه:

الممر في البيان الموجه  $G$  هو أي متتالية متناوبة من الشكل:

$$w : v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_{k-1} v_k$$

من العقد  $v_i$  والأوتار  $e_i$  بحيث أن  $e_i = (v_i, v_{i+1})$  لكل  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . نقول عن  $W$  أنه ممر من  $v_1$  إلى  $v_k$  طوله هو عدد الأوتار في هذا الممر و هو  $k-1$ .

شبه الممر في البيان الموجه  $G$  يكون متتالية متناوبة من الشكل:

$$v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_{k-1} v_k$$

من العقد والأوتار بحيث إن:  $e_i = (v_i, v_{i+1})$  أو  $e_i = (v_{i+1}, v_i)$  لكل

$i = 1, 2, \dots, k-1$  عندئذٍ:

- إذا كانت العقد في الممر  $W$  مختلفة، فإن  $W$  يكون مساراً .
- إذا كانت العقد  $v_1, \dots, v_{k-1}$  مختلفة وبحيث  $v_1 = v_k$  ، عندئذٍ  $W$  يكون دورة .
- تمثل المسارات والدورات حالات خاصة من الممرات.
- الدورات التي طولها 1 تكون حلقات، البيانات الموجهة بلا دورات تدعى لا دورية.

### اتصالات البيانات الموجهة:

يُعدّ أحد مفاهيم نظرية البيان المهمة. سنقدم الآن بعض الأفكار المعنية بهذا الجانب من أشكال البيان الموجه نلزمنا التعاريف التالية:

### تعاريف:

**تعريف 1:** إذا وجد ممر في البيان الموجه  $G$  من عقدة أولى  $u$  إلى عقدة أخرى  $v$  قلنا أن  $v$  عقدة يمكن الوصول إليها من  $u$  ونكتب  $u \rightarrow v$ . وفي حال لم يتحقق ذلك نقول أن  $v$  هي عقدة لا يمكن الوصول إليها من  $u$  ونكتب  $u \nrightarrow v$ .

**تعريف 2:** العقدة  $v$  التي يمكن الوصول إليها من كل عقدة في البيان الموجه  $G$  تدعى عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان في البيان الموجه، العقدة التي من خلالها نصل إلى جميع العقد في البيان الموجه تدعى عقدة مركزية في البيان الموجه .

**تعريف 3:** البيان الموجه  $G$  يكون متصل تماماً إذا كان من أجل كل عقدتان  $u, v$  يوجد وتر من  $u$  إلى  $v$  ووتر من  $v$  إلى  $u$ .

**تعريف 4:** البيان الموجه  $G$  يكون قوي الاتصال إذا كان من أجل كل عقدتان  $u, v$  يمكن الوصول من أحدهما إلى الأخرى بشكل متبادل.

**تعريف 5:** البيان الموجه  $G$  متصل بجانب واحد إذا كان من أجل كل عقدتين  $u, v$  توجد واحدة على الأقل يمكن الوصول إليها من الأخرى.

**تعريف 6:** البيان الموجه  $G$  شبه قوي الاتصال (QSC) إذا كان من أجل أي عقدتين  $v, u$  توجد العقدة  $w$  التي من خلالها يمكن الوصول إلى  $u, v$ .

**تعريف 7:** البيان الموجه  $G$  ضعيف الاتصال إذا وجد من أجل أي عقدتين  $u, v$  شبه ممر يحتوي هاتين العقدتين.

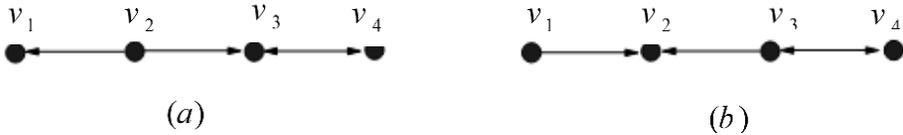
**تعريف 8:** البيان الموجه  $G$  عديم الاتصال إذا لم يكن حتى ضعيف الاتصال.

**نتيجة 1:** يمكن بسهولة ملاحظة أن البيان الموجه قوي الاتصال إذا وفقط إذا كانت كل عقدة في البيان الموجه يمكن الوصول إليها من كل مكان أو بشكل مكافئ كل عقدة في البيان الموجه  $G$  هي عقدة مركزية. من الواضح أن البيان الموجه  $G$  الذي يتكون من عقدة واحدة فقط يكون قوي الاتصال وذلك لأن العقدة يمكن الوصول إليها من نفسها.

### العمليات على البيانات الموجهة :

**تعريف:** ندعو البيان الموجه  $G^*$  الذي نحصل عليه من البيان الموجه  $G$  من خلال

عكس كل اتجاهات البيان الموجه  $G$  بمعكوس البيان الموجه  $G$ .

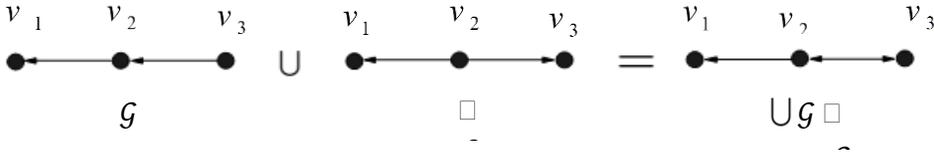


الشكل (1): البيان الموجه و معاكس البيان الموجه .

- إذا كان  $G = (V, E)$  و  $G' = (V, E')$  بيانين موجّهين فإن الاجتماع  $GG'$  هو البيان الموجه الذي يملك مجموعة الأوتار  $E \cup E'$ :

$$GG' = (V, E \cup E')$$

يعطي الشكل (2) مثلاً يبين عملية الاجتماع لبيانين موجّهين  $G \cup G'$  بمجموعة العقد  $\{v_1, v_2, v_3\}$ .



الشكل (2) اجتماع بيانين موجّهين.

- إذا كانت  $U$  مجموعة جزئية غير خالية من  $V$ ، نعرف البيان الموجه  $(U, E \cap (U \times U))$  والذي يسمى بالبيان الموجه الجزئي المُحدّث باستخدام المجموعة  $U$ .

- المركبة القوية من البيان الموجه  $G = (V, E)$  تكون البيان الموجه الجزئي المُحدّث الأعظمي من  $G$  ذي الاتصال القوي.

**ملاحظة:** نلاحظ أن البيان الموجه الجزئي المُحدّث الأعظمي ليس وحيداً في الحالة العامة.

إذا كانت  $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_k = (V_k, E_k)$  مركبات قوية من  $G = (V, E)$ ، من الواضح أن  $V_1 \cup \dots \cup V_k = V$  (نذكر بأن البيان الموجه المكون من عقدة واحدة فقط يكون قوي الاتصال) وأيضاً يجب أن يكون  $V_i \cap V_j = \emptyset$  لكل  $i \neq j$  وإلا جميع العقد في  $V_i \cup V_j$  يمكن الوصول إليها من بعضها البعض، مما يعني أن العقد في  $V_i \cup V_j$  تنتمي إلى نفس المركبة القوية للبيان الموجه  $G$ .

من جهة أخرى من أجل البيان الموجه  $G = (V, E)$  مجموعة العقد غير الخالية

$$U \subseteq V \text{ مغلقة إذا لم يكن ممكناً الوصول من } v \text{ إلى } u \text{ حيث } u \in U \text{ و } v \in V - U.$$

المركبة القوية  $G_1=(V_1, E_1)$  من البيان الموجّه  $G$  تكون مغلقة إذا كانت  $V_1$  مغلقة في  $G$ .

### البيان الموجّه الدوري:

**تعريف:** عندما يملك (أي بيان موجّه) دورات فأننا نعرف الدور  $d$  للبيان الموجّه  $G$  بالقاسم المشترك الأكبر لجميع أطوال دورات البيان الموجّه  $G$ . وندعو البيان الموجّه دورياً عندما يكون  $d > 1$  و يكون غير دوري عندما  $d = 1$ .  
تلزماً أيضاً المبرهنة التالية [5,7]:

**مبرهنة (1):**

من أجل البيان الموجّه  $G=(V, E)$  العبارات التالية تكون متكافئة:

- (a) - البيان الموجّه  $G$  شبه قوي الاتصال.
- (b) - البيان الموجّه  $G$  يملك عقدة مركزية.
- (c) - البيان الموجّه المعاكس  $G^*$  يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان.
- (d) - البيان الموجّه المعاكس  $G^*$  يملك مركب مغلق قوي واحد فقط.

كما يلزمنا في البحث، التمهيدية [7]:

**التمهيدية (1):**

أي بيان موجّه  $G=(V, E)$  يملك مركب مغلق قوي واحد على الأقل، أيضاً إذا كانت المجموعة غير الخالية  $U \subset V$  مغلقة في  $G$  عندئذٍ  $G$  يملك مركب مغلق قوي آخر  $G_c=(V_c, E_c)$  يحقق أن  $V_c \subseteq U$ .

### المصفوفات غير السالبة ونظرية البيان:

**تعريف:** المصفوفة غير السالبة هي مصفوفة جميع المدخلات فيها أكبر أو تساوي الصفر .

وعندما تكون مدخلات مصفوفة أكبر تماماً من الصفر ندعو المصفوفة بالمصفوفة الموجبة.

**مصفوفات الجوار ، البيانات الموجبة المقترنة بالمصفوفة غير السالبة:**

**تعريف:** من أجل المصفوفة غير السالبة  $E$  من المرتبة  $n$  البيان الموجب المقترن  $G(E)$  يتكون من  $n$  عقدة:  $v_1, \dots, v_n$ ، حيث توجد أوتار مؤدية من  $v_i$  إلى  $v_j$  إذا وفقط إذا كان:  $e_{ij} \neq 0$ .

**تعريف:** مصفوفة الجوار  $\bar{E} = (e_{ij}) \in R^{n \times n}$  للبيان الموجب تكون المصفوفة التي من خلالها يكون  $\bar{e}_{ij} = 1$  إذا وجدت أوتار مؤدية من  $v_i$  إلى  $v_j$  في  $G$  و  $\bar{e}_{ij} = 0$  إذا لم توجد أوتار مؤدية من  $v_i$  إلى  $v_j$ .

### المصفوفات غير المختزلة:

**تعريف:** المصفوفة  $E$  تكون مصفوفة مماثلة للمصفوفة  $\tilde{E}$  إذا وجدت مصفوفة تبديل  $P$  بحيث يكون:  $PEP^T = \tilde{E}$  .

**تعريف:** المصفوفة  $E$  من المرتبة  $n$  تسمى مصفوفة مختزلة عندما  $n=1$  وفي حال كانت  $n > 1$  إذا كانت مصفوفة مماثلة للمصفوفة :

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

حيث  $B, D$  مصفوفات مربعة غير خالية. بخلاف ذلك نقول إن المصفوفة  $E$  غير مختزلة.

مبرهنة (2):

المصفوفة غير السالبة  $E$  من المرتبة  $n$  تكون غير مختزلة إذا وفقط إذا كان البيان الموجه المقترن بالمصفوفة الغير السالبة  $E$  قوي الاتصال [1].

مبرهنة (3):

لتكن  $E$  مصفوفة غير سالبة، يكون  $e_{ij}^{(k)} > 0$  إذا وفقط إذا كان البيان الموجه المقترن بالمصفوفة  $E$  يملك ممر من العقدة  $v_i$  إلى العقدة  $v_j$  طوله  $k$  [2].

المصفوفات الأولية:

تعريف: المصفوفة غير السالبة  $E$  تسمى بالمصفوفة الأولية إذا وُجد عدد صحيح موجب  $k$  بحيث أن  $E^k > 0$ .

ونلاحظ الآن إن المصفوفة الأولية تكون غير قابلة للاختزال، لكن العكس غير صحيح عموماً.

التمهيدية (2):

ليكن  $m_2, m_1 > 1$  عدنان صحيحان، إذا كان  $\gcd\{m_1, m_2\} = 1$  عندئذٍ يوجد عدد صحيح  $\bar{k} \geq 0$  بحيث إنه من أجل أي عدد صحيح  $k \geq \bar{k}$  يكون:

$$k = \alpha m_1 + \beta m_2$$

حيث  $\beta, \alpha$  أعداد غير سالبة مناسبة.

**البرهان:**

بما أن  $\gcd\{m_1, m_2\} = 1$ ، فإن 1 يكتب على شكل تركيب خطي لـ  $m_2, m_1$  ومنه يمكن أن نكتب :

$$1 = \alpha_1 m_1 - \beta_1 m_2 \quad (1)$$

حيث  $\beta_1, \alpha_1$  عدadan غير سالبان .

بفرض أن  $\bar{k} = \beta_1 m_2^2$  عندئذ يكون  $\bar{k} \geq 0$ ، ولكل  $k \geq \bar{k}$  يكون لدينا:

$$k = \beta_1 m_2^2 + i.m_2 + j \quad (2)$$

من أجل العدadan الصحيحان  $i, j$  بحيث أن  $0 \leq j < m_2$ ،  $i \geq 0$ . بتعويض (1) في (2) نحصل على:

$$\begin{aligned} k &= \beta_1 m_2^2 + i.m_2 + j(\alpha_1 m_1 - \beta_1 m_2) \\ &= (j.\alpha_1)m_1 + (\beta_1(m_2 - j) + i).m_2 \end{aligned}$$

وبفرض أن:  $\alpha = j\alpha_1$  و  $\beta = \beta_1(m_2 - j) + i$ ، فمن الواضح أن:  $\beta, \alpha$  أعداد صحيحة غير سالبة، وبملاحظة أن  $j < m_2$  نحصل على المطلوب.

**التمهيدية (3):**

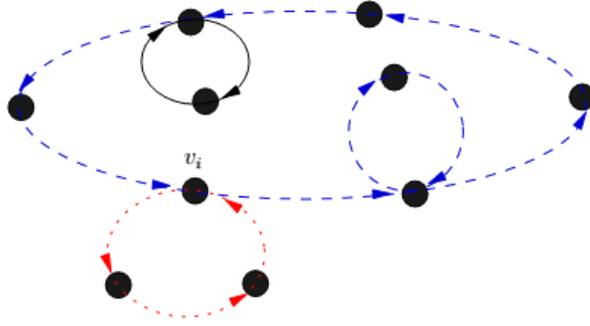
لتكن  $d$  تمثل دورة البيان الموجه  $G$  و  $d_i$  تمثل دورة العقدة  $v_i$  في  $G$ ، بحيث  $i = 1, \dots, n$ . إذا كان البيان الموجه  $G$  قوي الاتصال عندئذ فإن

$$d = d_1 = d_2 = \dots = d_n$$

**البرهان:**

لتكن  $S = \{m_1, \dots, m_p\}$  تمثل مجموعة جميع أطوال الدورات في  $G$ . من الواضح أنها مجموعة منتهية و  $d$  يمثل القاسم المشترك الأكبر لعناصر المجموعة  $S$ . من

أجل أي عقدة  $v_i$  لتكن  $S_i$  مجموعة جميع أطوال الممرات من  $v_i$  إلى  $v_i$  وليكن  $d_i$  القاسم المشترك الأكبر لعناصر المجموعة  $S_i$  ، إن أي ممر من  $v_i$  إلى  $v_i$  يكون إما دورة أو مُولد بعدد من الدورات.



الشكل (3): الممر من  $v_i$  إلى  $v_i$  والذي يكون إما دورة أو مولد بعدد من الدورات.

(انظر الشكل (3)) وبالتالي يكون طول كل ممر ( كل عنصر من  $S_i$ ) تركيباً خطياً لـ  $m_j$  حيث  $j=1, \dots, p$  بمعاملات صحيحة غير سالبة، وبالتالي فهو يقسم  $d$  ، القاسم المشترك الأكبر لـ  $m_j$  ، حيث  $j=1, \dots, p$  ، وهذا يقتضي أن  $d_i$  تقسم  $d$  .

من جهة أخرى، باعتبار أن أي دورة في البيان الموجه طولها  $m_j$  وإذا كانت تمر من خلال العقدة  $v_1$  عندئذٍ  $d_1$  تقسم  $m_j$  ، أما إذا لم يكن ذلك فإنها تمر عبر عقدة أخرى ولتكن  $v_2$ . وبما أن البيان الموجه قوي الاتصال فلا بد من وجود دورة تمر من خلال  $v_1$  و  $v_2$  ولنفرض أن طول هذه الدورة هو:  $m_k$  ، ومن ثم فإن  $d_1$  يقسم  $m_k$  . نلاحظ أن هاتين الدورتين تُولدان ممر طولها  $m_k + m_j$  من  $v_1$  إلى  $v_1$  ومنه فإن  $d_1$  تقسم:  $m_k + m_j$  وأيضاً  $d_1$  يقسم  $m_j$  وبالتالي  $d_1$  يقسم أي عنصر  $m_j$  من  $S$  . هذا يعني أن  $d_1$  يقسم  $d$  ، وبالتالي  $d = d_1$  ، بنفس الطريقة نستطيع إثبات أن  $d = d_i$  لكل:  $i=1, 2, \dots, n$  إذا كان البيان الموجه  $G$  قوي الاتصال.

#### التمهيدية (4):

لتكن  $E$  مصفوفة غير سالبة من المرتبة  $n \times n$  إذا كان البيان الموجه  $G(E)$  قوي الاتصال ودوري، دوره  $d$  عندئذٍ:  $e_{ii}^{(k)} = 0$ ، وذلك أيًا كان  $k$  ليس من مضاعفات العدد  $d$  و  $i=1,2,\dots,n$ .

#### البرهان:

لتكن  $d_i$  تمثل دورات العقد في  $G(E)$  بحيث إن  $i=1,2,\dots,n$  ومنه بحسب التمهيدية (2) يكون  $d = d_1 = \dots = d_n$ .

وبما أن  $G(E)$  قوي الاتصال فإنه من أجل أي عقدة  $v_i$  في  $G(E)$ ، طول أي ممر من  $v_i$  إلى  $v_i$  يكون من مضاعفات العدد  $d$  ولا يوجد ممر من  $v_i$  إلى  $v_i$  طوله  $k$  ليس من مضاعفات العدد  $d$ . بالتالي نجد أن:  $e_{ii}^{(k)} = 0$  من أجل  $i=1,2,\dots,n$  و  $k$  ليس من مضاعفات العدد  $d$ .

#### مبرهنة (4):

المصفوفة غير السالبة  $E$  من المرتبة  $n$  تكون أولية إذا وفقط إذا كان البيان الموجه المقترن بالمصفوفة  $E$  قوي الاتصال وغير دوري.

#### البرهان:

لزوم الشرط: إذا كان البيان الموجه  $G(E)$  قوي الاتصال وغير دوري عندئذٍ الدورة من  $G$  والدورة لأي عقدة  $v_i$  تساوي 1. من أجل أي عقدة  $v_i$  لتكن  $m_i^1, m_i^2$  ( $m_i^1 \neq m_i^2$ ) تمثل أطوال ممرين من  $v_i$  إلى  $v_i$  عندئذٍ يوجد عدد كبير بقدر كافٍ  $\bar{k}_i$  بحيث أنه من أجل أي:  $k, k \geq \bar{k}_i$  تكون تركيب صحيح غير سالب لـ  $m_i^1$  و  $m_i^2$ ، وهذا يعني بدوره وجود ممر طوله:  $k$  من  $v_i$  إلى  $v_i$ .

لتكن  $v_j$  تمثل عقدة أخرى بحيث أنه يوجد مسار من  $v_i$  إلى  $v_j$  وليكن طوله  $L_{ij}$ ، بالتالي من أجل أي:  $k \geq q_{ij} := \bar{k}_i + L_{ij}$ ، يوجد ممر طوله  $k$  من  $v_i$  إلى  $v_j$ ، عندئذٍ ينتج عن المبرهنة (3) أن:  $e_{ij}^{(k)} > 0$  لكل  $k \geq q_{ij}$ .

لتكن:  $q = \max\{q_{ij} : i, j = 1, \dots, n\}$ ، بالتالي:  $e_{ij}^{(k)} > 0$  لكل  $i, j = 1, \dots, n$  و  $k \geq q$ .  
فمن تعريف المصفوفة الأولية  $E$  تكون مصفوفة أولية.

كفاية الشرط:

بفرض أن البيان الموجه  $G(E)$  ليس قوياً بالاتصال أو أنه قوي الاتصال لكنه غير دوري من أجل الحالة الأولى، أي البيان الموجه  $G(E)$  لا يكون قوي الاتصال، يوجد زوج من العقد:  $v_i, v_j$ ، بحيث أن  $v_j$  لا يمكن الوصول إليها من  $v_i$ ، لذلك ينتج عن المبرهنة (3) أن:  $e_{ij}^{(k)} = 0$  لكل  $k > 0$  بالتالي لا يوجد عدد طبيعي  $k$  بحيث أن  $E^k$  تكون موجبة و  $E$  ليست مصفوفة أولية.

من أجل الحالة الثانية التي فيها البيان الموجه  $G(E)$  قوي الاتصال ولكنه غير دوري، لنفرض أن دورته  $d$  حيث  $d > 1$  ومنه حسب التمهيدية (2) نجد أن  $e_{ii}^{(k')} = 0$  لأجل أي عدد صحيح موجب  $k'$  ليس من مضاعفات العدد  $d$ ، بالتالي لا يوجد عدد طبيعي  $k$  بحيث تكون المصفوفة  $E^k$  موجبة وإلا فإنه إذا كان هناك عدد طبيعي  $k^*$  بحيث أن  $E^{k^*}$  موجبة عندئذٍ تكون  $E^k$  موجبة لكل  $k \geq k^*$  مما يناقض كون  $e_{ii}^{(k')} = 0$  لأجل أي عدد صحيح موجب  $k'$  ليس من مضاعفات العدد  $d$ ، وبالتالي  $E$  تكون مصفوفة غير أولية، وهذا تناقض.

مبرهنة (5):

لتكن  $E$  مصفوفة غير سالبة وغير قابلة للاختزال. إن الشرطين الآتيين محققين:

(a) - تكون قيمة ذاتية بسيطة للمصفوفة  $E$  وأي قيمة ذاتية للمصفوفة  $E$  لها نفس الطويلة تكون بسيطة أيضاً.

(b) - المصفوفة  $E$  تملك متجه ذاتي  $x$  يقابل القيمة الذاتية  $\rho(E)$ ، وإذا كانت  $E$  مصفوفة أولية، عندئذٍ جميع القيم الذاتية الأخرى للمصفوفة  $E$  تملك طويلة أقل من  $\rho(E)$  [1].

المصفوفات الاحتمالية:

تعريف: المصفوفة المربعة  $E$  تكون احتمالية إذا كانت المصفوفة  $E$  غير سالبة وكان مجموع كل صف فيها يساوي الواحد.

الآن نقدم بعض خواص المصفوفات الاحتمالية:

- إذا كانت المصفوفة  $E$  احتمالية، عندئذٍ  $\rho(E) = 1$ .
- المصفوفة غير السالبة  $E$  احتمالية إذا وفقط إذا كان 1 متجه ذاتي للمصفوفة  $E$  يقابل القيمة الذاتية  $\lambda = 1$ .
- إذا كانت المصفوفتين  $E_1, E_2$  احتماليتين، عندئذٍ الجداء  $E_1 E_2$  يكون أيضاً مصفوفة احتمالية.

مبرهنة (6):

لتكن  $E$  مصفوفة غير سالبة من المرتبة  $n$ ، إذا كان  $G(E)$  يملك  $k$  مركبات قوية مغلقة، عندئذٍ تكون مصفوفة مشابهة للمصفوفة

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & E_1 & 0 \\ B_k & \cdots & B_1 & E_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

حيث  $E_i$  تكون مصفوفات من المرتبة  $r_i$  و  $r_i$  تكون أعداد صحيحة مناسبة تحقق  $0 \leq r_0 < n$  و  $0 < r_i < n (i=1, \dots, k)$ . علاوةً على ذلك، إذا كانت  $E$  مصفوفة احتمالية، عندئذٍ  $p(E_i) = 1$  تكون قيم ذاتية بسيطة للمصفوفات  $E_i; i=1, \dots, k$  و  $p(E_0) < 1$  عندما  $r_0 \neq 0$ . [7]

مصفوفة سيا (SIA):

تعريف: تسمى المصفوفة المربعة  $E$  احتمالية غير قابلة للتحليل وغير دورية سيا (SIA) إذا كانت  $E$  احتمالية وكذلك  $Q = \lim_{k \rightarrow \infty} E^k$  موجودة وجميع الصفوف في  $Q$  متماثلة.

مبرهنة (7):

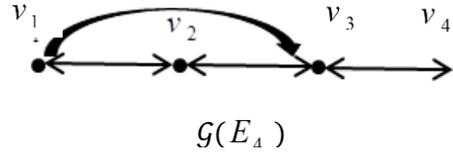
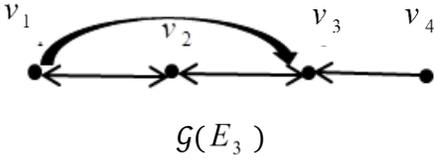
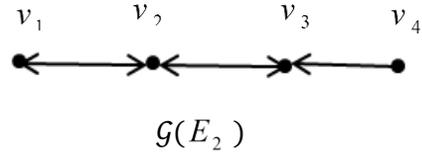
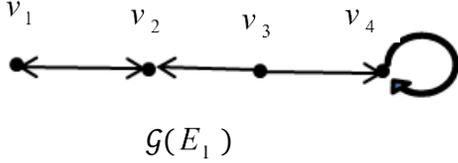
المصفوفة الاحتمالية  $E$  تكون مصفوفة SIA إذا وفقط إذا كان  $G(E)$  يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان و تكون غير دورية [7].

تطبيق:

لتكن المصفوفات الأربعة الغير سالبة مُعطاة كالتالي:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



#### البيانات الموجّهة المقترنة بالمصفوفات الغير السالبة

البيان الموجّه  $G(E_1)$  لا يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان لذلك المصفوفة  $E_1$  لا تكون مصفوفة سيا. البيان الموجّه  $G(E_2)$  يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان (العقد  $v_1, v_2, v_3$  تكون عقد يمكن الوصول إليها من أي مكان)، لكن هذه العقد دورية دورها 2، لذلك المصفوفة  $E_2$  لا تكون مصفوفة سيا. لكن البيان الموجّه  $G(E_3)$  يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان، العقدة  $v_1$  وتكون غير دورية لذلك تكون المصفوفة  $E_3$  مصفوفة سيا. ( $d_1 = gcd\{2,3\} = 1$ )

أيضاً البيان الموجّه  $G(E_4)$  قوي الاتصال وغير دوري ويملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان، التي تكون غير دورية، لذلك المصفوفة  $E_4$  تكون مصفوفة سيا.

### مصفوفة ميتزلر والمصفوفة المولدة:

**تعريف:** ندعو كل مصفوفة حقيقية مربعة بحيث عناصرها الغير قطرية غير سالبة بمصفوفة ميتزلر .

ونقول عن مصفوفة ما أنها مصفوفة مولدة إذا كانت مصفوفة ميتزلر ومجموع كل صف من صفوفها يساوي الصفر .

### مبرهنة (8):

الصفر يكون قيمة ذاتية للمصفوفة  $A$  و  $1$  متجه ذاتي يميني مقترن، بينما جميع القيم الذاتية الأخرى تملك جزء حقيقي سالب [7].

### مبرهنة (9):

إذا كان البيان الموجه  $G_A$  المقترن بالمصفوفة المولدة  $A$  قوي الاتصال، عندئذ القيمة الذاتية الصفرية للمصفوفة  $A$  تكون بسيطة. علاوةً على ذلك يقترن بالقيمة الذاتية الصفرية متجه ذاتي يميني  $1$  ومتجه ذاتي يساري يكون متجه موجب [7].

### تعريف المنظومة الديناميكية المتزاوجة:

هي منظومة مؤلفة من منظومات جزئية (أعضاء) بحيث يؤثر موضع أحد الأعضاء في التطور الزمني للأعضاء الأخرى.

### جداء كرونكر وخواصه:

نرمز لجداء كرونكر للمصفوفتين  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  و  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$  بالرمز  $A \otimes B$  وهو مصفوفة من السعة  $np \times mq$  :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nm}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times mq}$$

يملك جداء كرونكر خواص متعددة نذكر منها:

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C \quad \text{(a)}$$

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T \quad \text{(b)}$$

(c) - إذا كان  $A, C \in \mathbb{R}^{m \times m}$  و  $B, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  عندئذ:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

(d) - إذا كانت  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  قيم ذاتية للمصفوفة  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  و  $\mu_1, \dots, \mu_n$  قيم ذاتية

للمصفوفة  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ، عندئذ القيم الذاتية للمصفوفة  $A \otimes B$  هي الأعداد  $\lambda_r \mu_s$

حيث  $r = 1, \dots, m$  ;  $s = 1, \dots, n$

**البيان الموجه التفاعلي:**

**تعريف:** نرمز له بالرمز  $G_p = (V, E_p)$  ويتكون من:

- مجموعة محدودة  $V$  من العقد، العقدة  $i$  تمثل العضو (الوكيل)  $i$ .

- مجموعة الأوتار  $E_p$  تمثل الروابط بين الأعضاء، حيث يشير الوتر من العقدة  $i$  إلى

العقدة  $j$  إلى أن العضو  $j$  هو مجاور العضو  $i$ ، أي أن  $a_{ij}(p) \neq 0$ . نرمز لمجموعة

مجاورات العضو  $i$  بالرمز  $N_i(p)$ .

**استقرار وجذب المجموعات:**

لنكن لدينا المنظومة التالية المرتبطة ظاهرياً بالزمن

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1)$$

حيث  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  دالة مستمرة بشكل منقطع في  $t$  ومستمرة في  $x$  على

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ، وليكن  $x(t, t_0, x^0)$  حل للمنظومة (1) الموافق للشرط الابتدائي

$$x(t_0, t_0, x^0) = x^0$$

المجموعة  $\Omega \subset R^n$  تدعى مجموعة لا متغيرة (ثابتة) ايجابياً من المنظومة (1) إذا كان من أجل كل  $t_0 \in R$  و  $x^0 \in \Omega$  يكون  $x(t, t_0, x^0) \in \Omega$  من أجل كل  $t \geq t_0$ .

المجموعة  $\Omega \subset R^n$  تدعى مجموعة لا متغيرة من المنظومة (1) إذا كان من أجل كل  $t_0 \in R$  و  $x^0 \in \Omega$  يكون  $x(t, t_0, x^0) \in \Omega$  من أجل كل  $t \in R$ .

ملاحظة: يمكن تمثيل المجموعات اللامتغيرة (الثابتة) بنقاط معزولة (ثابتة) ومنحنيات وسطوح ومجموعات أخرى مغلقة ومفتوحة.

تعريف: المجموعة الثابتة  $\Omega$  أو المنظومة (1) بالنسبة للمجموعة الثابتة  $\Omega$  تدعى:

- مستقرة إذا كان من أجل كل  $t_0$  ومن أجل كل  $\varepsilon > 0$  يوجد  $\delta > 0$  بحيث أن:

$$\|x^0\|_{\Omega} \leq \delta \Rightarrow (\forall t \geq t_0) \|x(t)\|_{\Omega} \leq \varepsilon$$

- مستقرة بشكل منتظم إذا كان من أجل كل  $\varepsilon > 0$  يوجد  $\delta > 0$  بحيث أنه من

أجل كل  $t_0$  يكون

$$\|x^0\|_{\Omega} \leq \delta \Rightarrow (\forall t \geq t_0) \|x(t)\|_{\Omega} \leq \varepsilon$$

نتيجة: وفقاً لهذا التعريف، نلاحظ أن العدد  $\delta$  يعتمد على  $\varepsilon$  و  $t_0$  ليتحقق

الاستقرار ولكن إذا استطعنا العثور على العدد  $\delta$  الذي يعتمد فقط على  $\varepsilon$  ولا

يعتمد على  $t_0$  فإن المنظومة تكون مستقرة بشكل منتظم بالنسبة للمجموعة

الثابتة  $\Omega$ .

ملاحظة: إذا كانت المنظومة (1) مستقلة عن  $t$  فلا يوجد فرق بين الاستقرار

والاستقرار المنتظم.

تعريف: المجموعة الثابتة  $\Omega$  أو المنظومة (1) بالنسبة للمجموعة الثابتة  $\Omega$  تدعى:

- جاذبة في المنطقة  $D$  إذا تحقق:

$$x^0 \in D \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\|_{\Omega} = 0$$

- جاذبة بشكل منتظم في المنطقة  $D$  إذا كان من أجل كل  $c > 0$  يتحقق

$$\left(\|x^0\| \leq c\right) \wedge (x^0 \in D) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\|_{\Omega} = 0$$

- جاذبة في كل مكان إذا كان جاذبة على كل  $R^n$ .
- جاذبة بانتظام في كل مكان إذا كان جاذبة بانتظام على كل  $R^n$ .

### المنظومات الخطية المتزاوجة ذات الطوبولوجيا الثابتة:

في هذا القسم سنتعامل مع المنظومات الخطية المتزاوجة ذات الطوبولوجيا الثابتة، أولاً سوف نركز تحليلنا على حالة بنية التزاوج الدورية، وبعد ذلك سيتم تقديم نتائج معممة من أجل أي اتصال. لنقم أولاً بتعريف الفضاء الجزئي  $\Omega$  بالشكل:

$$\Omega = \{x \in R^m; x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$$

سوف نفرض أن الفضاء الجزئي  $\Omega$  يمثل مجموعة توازن للمنظومة وأن جميع مصفوفات المنظومة تكون مصفوفات مولدة.

### بنية التزاوج الدورية:

تعريف: نقول عن منظومة مؤلفة من  $n$  عضو أنها تملك بنية تزاوج دورية إذا كانت من الشكل:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_3 - x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n - x_{n-1} \\ \dot{x}_n &= x_1 - x_n \end{aligned} \quad (2)$$

حيث  $x_i \in R^m$ . سوف نلاحظ لاحقاً أن الحالة  $m > 1$  هي مجرد حالة تافهة للحالة  $m = 1$  ولذلك للسهولة نفرض أن  $m = 1$ .

بالتالي المنظومة أعلاه تكتب بالشكل المصفوفي بالشكل:

$$\dot{x} = Ax$$

حيث  $A$  تملك الشكل  $A = p - 1$  و  $p$  مصفوفة التبديل التي يتم الحصول عليها من المصفوفة الواحدية  $I$  بوضع صفها الأول في الأسفل:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

مبرهنة (10):

المنظومة (2) جاذبة في كل مكان بالنسبة للفضاء الجزئي  $\Omega$  ويكون:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \left( \frac{x_1^0 + x_2^0 + \dots + x_n^0}{n} \right) \mathbf{1}$$

البرهان:

إن كثير الحدود المميز للمصفوفة  $p$  هو  $s^n - 1$ ، بالتالي المصفوفة  $p$  سوف تملك  $n$  قيمة ذاتية وبالتالي فإن القيم الذاتية للمصفوفة  $A$  تكون جذور العنصر المحايد بانزياح يساوي الواحد، وهذا يعني أن  $A$  تملك قيمة ذاتية في الأصل و  $n - 1$  قيمة مميزة مختلفة تماماً في نصف المستوي الأيسر، وعلاوةً على ذلك يمكن بسهولة ملاحظة أن:  $\ker(A) = \Omega$ ، بالتالي المنظومة (2) تكون جاذبة في كل مكان بالنسبة إلى  $\Omega$ ، بالإضافة لذلك:

$$(\dot{x}_1 + \dots + \dot{x}_n) / n = (I^T Ax) / n = 0$$

لذلك:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \left( \frac{x_1^0 + x_2^0 + \dots + x_n^0}{n} \right) \mathbf{1}$$

تعميم: للانتقال إلى الحالة العامة من أجل  $n$  منظومة جزئية بأي نوع من أنواع بنية التزاوج، يمكن تمثيلها بمعادلات نموذجية من الشكل:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sum_{j=1}^n a_{1j} (x_j - x_1) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \sum_{j=1}^n a_{nj} (x_j - x_n) \end{aligned} \quad (3)$$

سوف نرض  $a_{ij} \geq 0$  و  $x_i \in R^m$ ، حيث تكتب العلاقات السابقة بالشكل المصفوفي

$$\dot{x} = Ax \quad (4)$$

حيث  $A$  مصفوفة مولدة.

مبرهنة (11):

المنظومة (4) مستقرة بالنسبة لكل توازن  $\bar{x} \in \Omega$ .

البرهان:

الأثبات يتم بشكل مشابه لإثبات المبرهنة السابقة.

مبرهنة (12):

المنظومة (4) جاذبة في كل مكان بالنسبة للفضاء الجزئي  $\Omega$  إذا وفقط إذا كان البيان

الموجه التفاعلي  $\mathcal{G}$  شبه قوي الاتصال وعلاوةً على ذلك:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \left( \frac{c^T x^0}{c^T \mathbf{1}} \right) \mathbf{1}$$

حيث  $c^T$  متجه ذاتي يساري للمصفوفة  $A$  مقابل للقيمة الذاتية الصفرية.

**البرهان:**

لزوم الشرط: إذا كان البيان الموجه  $G$  شبه قوي الاتصال عندئذٍ يتحقق أن  $A$  تملك قيمة ذاتية صفرية واحدة وأن جميع القيم الذاتية الأخرى تملك جزء حقيقي سالب. بالتخمين فإن المتجه الذاتي المقترن يكون 1، لذلك  $\ker(A) = \Omega$ ، هذا يعني أن المنظومة (4) تكون جاذبة في كل مكان بالنسبة للفضاء الجزئي  $\Omega$ .

ليكن  $c^T$  متجه ذاتي يساري للمصفوفة  $A$  يقابل القيمة الذاتية الصفرية، ولنُعرف متغير جديد  $y = c^T x$ ، ولدينا  $\dot{y} = c^T \dot{x} = c^T Ax = 0$ ، هذا يعني أن:  $y(t) = y(0)$  لكل  $t \geq 0$  و:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y(0) = c^T x^0$$

ومن جهة أخرى:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c^T x(t) = c^T (a1) = a(c^T 1)$$

وبالتالي نحصل على:

$$a(c^T 1) = c^T x^0$$

ولذلك:

$$a = \frac{c^T x^0}{c^T 1}$$

وبالتالي:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \left( \frac{c^T x^0}{c^T 1} \right) 1$$

كفاية الشرط: بفرض أن البيان الموجه التفاعلي  $G$  لا يكون شبه قوي الاتصال، عندئذٍ يتحقق إن البيان الموجه  $G_A$  يملك  $k \geq 2$  مركبات قوية مغلقة، وبالتالي  $A$  تملك قيمة ذاتية صفرية للتركيب الجبري والهندسي  $k \geq 2$ ، ولذلك نستطيع إيجاد حالة أولية  $x^0$  في  $\ker(A)$ ، ولكنها ليست موجودة في الفضاء الجزئي  $\Omega$ . ويمكن العثور على  $x^0$  طالما أن بعد  $\ker(A)$  أكبر من الواحد، علاوةً على ذلك بالنسبة للحالة الأولية  $x^0$  الحل يبقى في  $x^0$  من أجل كل  $t$ . أي أن  $x(t) = x(0)$  بالتالي المنظومة (4) لا تكون جاذبة في كل مكان بالنسبة إلى  $\Omega$  وهذا يناقض الفرض.

تعميم: في حال كانت  $m > 1$  يمكن وضع المنظومة (3) بالشكل المصفوفي التالي:

$$\dot{x}(t) = (A \otimes I_m)x(t) \quad (5)$$

**نتيجة :**

تكون المنظومة (5) جاذبة في كل مكان بالنسبة إلى  $\Omega$  إذا فقط إذا كان البيان الموجه التفاعلي  $G$  شبه قوي الاتصال، علاوةً على ذلك:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1 \otimes \left( \frac{(c^T \otimes I_2)x^0}{c^T 1} \right)$$

حيث  $c^T$  متجه ذاتي يساري للمصفوفة  $A$  يقابل القيمة الذاتية الصفرية.

البرهان:

باعتبار لدينا المصفوفة القطرية من المرتبة  $mn$  معطاة بالشكل:

$$I_{mn} = \begin{pmatrix} I_m & & \\ & \ddots & \\ & & I_m \end{pmatrix}$$

يتم بناء مصفوفة التبديل  $p$  باختيار الصفوف من  $I_{mn}$  بالترتيب التالي:

$$1, 1+m, 1+2m, \dots$$

$$2, 2+m, 2+2m, \dots$$

$\vdots$

$$m, 2m, 3m, \dots$$

على سبيل المثال من أجل  $m = 2$  و  $n = 3$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

وبملاحظة أن المصفوفة  $P$  تقوم بالتحويل التالي:

$$P(A \otimes I_m)P^T = I_m \otimes A = \begin{pmatrix} A & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A \end{pmatrix}$$

و بتطبيق التحويل الإحداثي  $y = px$ ، نحصل على المنظومة التالية

$$\dot{y}(t) = (I_m \otimes A)y(t)$$

بملاحظة شكل المصفوفة  $I_m \otimes A$ ، نجد أن

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = a \otimes 1$$

من أجل  $a \in R^m$  يكون:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P^T y(t) = P^T (a \otimes 1) = 1 \otimes a$$

وبالتالي المنظومة (5) جاذبة في كل مكان بالنسبة للفضاء الجزئي  $\Omega$  إذا فقط إذا كان البيان الموجه التفاعلي  $\mathcal{G}$  شبه قوي الاتصال وأيضاً:

$$a = \frac{(c^T \otimes I_2)x^0}{c^T 1}$$

## المراجع:

- [1] Berman, A and Plemmons, R. J 1994. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Classics in Appl. Math. 9, SIA M, 8990p.
- [2] Beineke, L. W and Wilson, R. J 1997. Graph Connections: Relationships Between Graph Theory and Other Areas of Mathematics. Clarendon Press, 306p
- [3]. Aeyel , D and Leenheer, P.D-2002, “Extension of the Perron-Frobenius theorem to homogeneous systems.” SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 41, no. 2 pp. 563-582
- [4] Wolfowitz, J 1963. “Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices.” proceedings of the American Mathematical Society, vol. 14, no. 5, pp. 733–737.
- [5] Berge, C and Ghouila-Houri, A 1965. Programming, Games and Transportation Networks. John Wiley and Sons
- [6] Moreau, L 2005. Stability of multiagent systems with time-dependent communication linksIEEE. Transactions on Automatic Control, vol. 50, no. 2, pp. 169–182.
- [7] Lin, Z 2006. Coupled Dynamical Systems. pp.20-82.

## معاملات ليابونوف الأسية الموضعية

إسم الباحث: الدكتور محمد شعيب العلي

العنوان: قسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة البعث

البريد الإلكتروني: [mali@albaath-univ.edu.sy](mailto:mali@albaath-univ.edu.sy)

### ملخص البحث

نقدم في هذا البحث تعريفاً موضعياً لمعاملات ليابونوف الأسية في فضاء الموضع لأي منظومة ديناميكية سواء كانت متقطعة أو مستمرة. كما نقوم بربط قيم هذه المعاملات الموضعية بقيمة معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي للمنظومة الذي تعتبر قيمته مؤشراً على وجود سلوكية فوضوية في ديناميكية المنظومة المدروسة. نعتمد خلال هذا البحث الطرائق الرياضية لإثبات صحة النتائج والنظريات التي يتم تقديمها في هذا البحث. كما نقدم في نهاية هذا البحث بعض الأمثلة العملية والتطبيقات التي تدعم صحة هذه النتائج والمبرهنات.

**كلمات مفتاحية:** منظومة ديناميكية، تصوير، تدفق، فوضى، جاذب، معاملات ليابونوف الأسية، معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي.

# Local Lyapunov Exponents

**Researcher's Name:** Dr. Mohamad Alali

**Address:** Mathematics Dept. / Science Fac. / Albaath Univ.

**Email Address:** [mali@albaath-univ.edu.sy](mailto:mali@albaath-univ.edu.sy)

## Abstract

We present in this paper, a local definition of Lyapunov Exponents of a dynamical system for both Maps and Flows cases. We also, find a formula to connect values of these exponents with the value of maximum Lyapunov exponent, which is used universally to predict existence of chaotic behavior of a dynamical system.

We use a systematic mathematical methods to prove results and theorems throughout this paper.

Finally, we use some well-known dynamical systems to verify our results and theorems.

**Keywords:** Dynamical System, Map, Flow, Chaos, Attractor, Lyapunov Exponents, Maximum Lyapunov Exponent.

## 1. مقدمة:

انقضت أكثر من أربعة قرون على اكتشاف نظرية الفوضى وقامت العديد من الأبحاث في هذا المجال، إلا أنه ما يزال هناك العديد من المعضلات والعوائق التي تقف أمام العلماء والرياضيين الباحثين فيها وهم يحاولون الكشف عن خفايا هذه النظرية. مع ذلك حدث الكثير من التطورات في هذه النظرية وكانت معاملات ليابونوف الأسية إحدى هذه التطورات [1]، وهي من أكثر الطرائق دقةً في توصيف وتحليل الفوضى في المنظومات الديناميكية. وقد قام أوسيلديك [2] لاحقاً بإدخال هذا المفهوم في النظرية الإرجودية (Ergodic Theory) حيث تم تطوير طريقة جديدة لحساب معاملات ليابونوف الأسية.

تعرف معاملات ليابونوف الأسية  $\lambda_i$  بأنها قياسات لمتوسط معدلات تباعد مسارات المنظومة مقاسةً على جاذب هذه المنظومة. وتعطي هذه المعاملات معلومات حول معدل تباعد المسارات على الجاذب الفوضوي، كما وتعطي معلومات حول إستقرار المدارات الدورية. و يعتبر العمل الذي قام به هينون وهيلز [3] واحداً من أوائل الأبحاث المتعلقة بالسلوك الفوضوي لمسارات المنظومات الديناميكية في فضاء الموضع وتباعدها، والتي أثارت الكثير من الأبحاث و الدراسات فيما بعد [4-7].

تعرف معاملات ليابونوف الأسية الموضعية  $\lambda_i(x_0, n)$  من المرتبة  $n$  عند النقطة  $x_0$  في فضاء موضع تصوير ما  $P$  على أنها المعدلات الأسية لتباعد مسارات هذا

التصوير، الناتجة عن اضطراب صغير في الشروط الابتدائية  $x_0$ ، بعد تكرار تطبيق هذا التصوير  $n$  مرة (خطوة) على تلك الشروط [8]. إلا أننا سنقتصر هذا التعريف من خلال هذه المدارس على خطوة واحدة فقط (أي تطبيق التصوير مرة واحدة فقط) و سنرمز لهذا المعامل بالرمز  $\lambda_p^E(x_0)$  و الذي سندعوه معامل ليابونوف الأسى الموضعي، حيث أن  $E$  هو متجه واحدة في فضاء موضع المنظومة الديناميكية الذي يحدد متجه الاضطراب الصغير الطارئ المفروض على الشروط الابتدائية للمسارات المتجاورة.

## 2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى ابتكار آلية جديدة تساعد في حساب معامل ليابونوف الأسى الأعظمي لمنظومة ديناميكية ما، لأهمية هذا المعامل في تحديد سلوكية المنظومة الديناميكية المدروسة. لذلك يمكن اعتبار هذا البحث من الأبحاث الهامة التي تحظى باهتمام و متابعة الكثير من الباحثين في معظم المجالات العلمية. أما الجديد في هذا البحث فهو تقديمه لتعريف جديد لمعاملات ليابونوف الأسية ولكن بشكل موضعي، و ربط هذه القيم مع قيمة معامل ليابونوف الأسى الأعظمي للمنظومة المدروسة.

## 3. أدوات و طرق البحث:

سنستخدم خلال هذا البحث الشكل العام لمنظومة ديناميكية منقطعة (تصوير) و كذلك الشكل العام لمنظومة ديناميكية مستمرة (تدفق). و بعد تعريف المصطلحات كالمعاملات

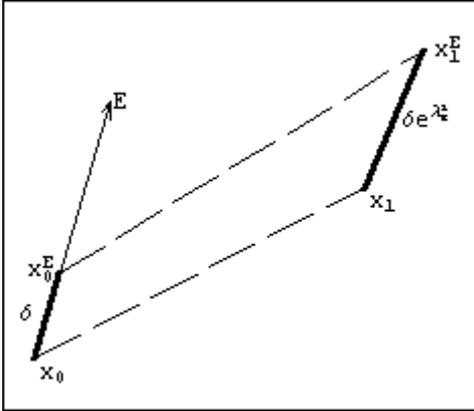
الموضعية لهذه المنظومات، سنقدم بعض المبرهنات و النتائج التي تمكننا من الربط بين قيم هذه المعاملات الموضعية و معامل ليايرونوف الأسي الأعظمي.

**4. النتائج و المناقشة:** سنقوم فيما يلي بعرض بعض التعاريف و النتائج و المبرهنات.

**تعريف (1)** ( معاملات ليايرونوف الأسية الموضعية لتصوير ) : لنأخذ تصويراً ما  $P: \square^N \rightarrow \square^N$  ذي بعد  $N$ ، حيث  $N$  هو عدد صحيح موجب، و الذي يعرف

بمعادلة فروق متجهية ذات  $N$  بعد تمثل جملة  $N$  معادلة فروق سلمية من الشكل

$$x_{i+1} = P(x_i) \quad ; \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$



ليكن  $E \in \square^N$  متجه واحدة ما في فضاء موضع المنظومة الديناميكية، و لنأخذ اضطراب صغير في الشروط الابتدائية  $x_0$  بحيث تصبح الشروط الابتدائية

الشكل (1): تطور متجه الواحدة في فضاء الموضع بعد

الجديدة بالشكل:

تطبيق التصوير خطوة واحدة

$$x_0^E = x_0 + \delta E$$

حيث أن  $\delta \in \square$  و  $0 < \delta \ll 1$ . وبتطبيق التصوير (1) على هاتين النقطتين، نحصل على النقطتين التاليتين  $x_1 = P(x_0)$  و  $x_1^E = P(x_0^E)$  المبيتين في الشكل (1). باستخدام منشور تايلور للتابع  $P$  في جوار النقطة  $x_0$ ، نجد أن:

$$x_1^E - x_1 = \delta \mathfrak{J}(x_0) \cdot E$$

حيث أن  $\mathfrak{J}(x_0)$  هي المصفوفة اليعقوبية للتصوير  $P$  في النقطة  $x_0$ .

و بالتالي يمكن تعريف معامل ليابونوف الأسي الموضعي في النقطة  $x_0$  وفق اتجاه متجه الوحدة  $E$  في فضاء الموضع بالشكل:

$$\lambda_P^E(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{Log} \left( \|x_1^E - x_1\| / \delta \right)$$

حيث أن النظم  $\|\cdot\|$  هو النظم الإقليدي المعروف على  $\square^N$ . بالتالي فإن:

$$\lambda_P^E(x) = \text{Log} \|\mathfrak{J}(x) \cdot E\| \quad (2)$$

تبين لنا هذه العلاقة أن المعامل الأسي المحلي  $\lambda_P^E(x)$  موجود وهو عدد حقيقي من أجل أي نقطة  $x$  في فضاء موضع المنظومة ومن أجل أي متجه وحدة  $E$ .

**تعريف (2)** (معاملات ليابونوف الأسية الموضعية لتدفق):

لنأخذ منظومة ديناميكية مستمرة ذات  $N$  بعداً، من الشكل:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (3)$$

حيث أن  $x \in \mathbb{R}^N$  و  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ . فإذا انطلقنا من الشرط الابتدائي

$x = x_0$  في اللحظة الزمنية  $t = 0$ ، سنحصل على التدفق  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  الموافق

للمنظومة (3) و الذي يحقق الشروط

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = F(\varphi(t)) \quad \& \quad \varphi(0) = x_0$$

وباعتبار تغير لا متناهي في الصغر في الزمن  $0 < dt \ll 1$ ، يمكننا بناء المدار

$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$  للمنظومة، حيث أن  $x_i = \varphi(i dt)$  و المدار الأخير هو مدار لتصوير

$G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  مرتبط بمنظومة التدفق المعطاة ومعرف بالشكل:

$$x_{i+1} = G(x_i) = x_i + F(x_i)dt$$

أما المصفوفة اليعقوبية لهذا التصوير، فنكتب بالشكل:

$$\mathfrak{T}_G(x) = I + \mathfrak{T}(x)dt$$

حيث أن  $\mathfrak{T}(x)$  هي المصفوفة اليعقوبية للتابع  $F$ ، الذي يعرف التدفق المعطى في

النقطة  $x$  و  $I$  هي المصفوفة الواحدية من المرتبة  $N$ .

لنفرض الآن أن:  $dt = \frac{1}{m}$  حيث أن  $m$  هو عدد صحيح موجب كبير بقدر كافٍ،

ولنعرف التصوير الهدف  $P: \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}^N$  بالشكل التالي:

$$x_{i+1} = P(x_i) = G^m(x_i) = \underbrace{(G \circ G \circ \dots \circ G)}_{m \text{ times}}(x_i)$$

إن المصفوفة العيوقبية للتصوير الهدف  $P$  في نقطة  $x_0$  تعطى بالعلاقة:

$$\mathfrak{S}_P(x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( I + \frac{1}{m} \mathfrak{S}(x_{m-1}) \right) \left( I + \frac{1}{m} \mathfrak{S}(x_{m-2}) \right) \dots \left( I + \frac{1}{m} \mathfrak{S}(x_0) \right)$$

حيث أن:

$$x_i = x_{i-1} + \frac{1}{m} F(x_{i-1}) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

و بالتالي يمكن أن نعرف معامل ليابونوف الأسى الموضوعي للتدفق المعطى في النقطة

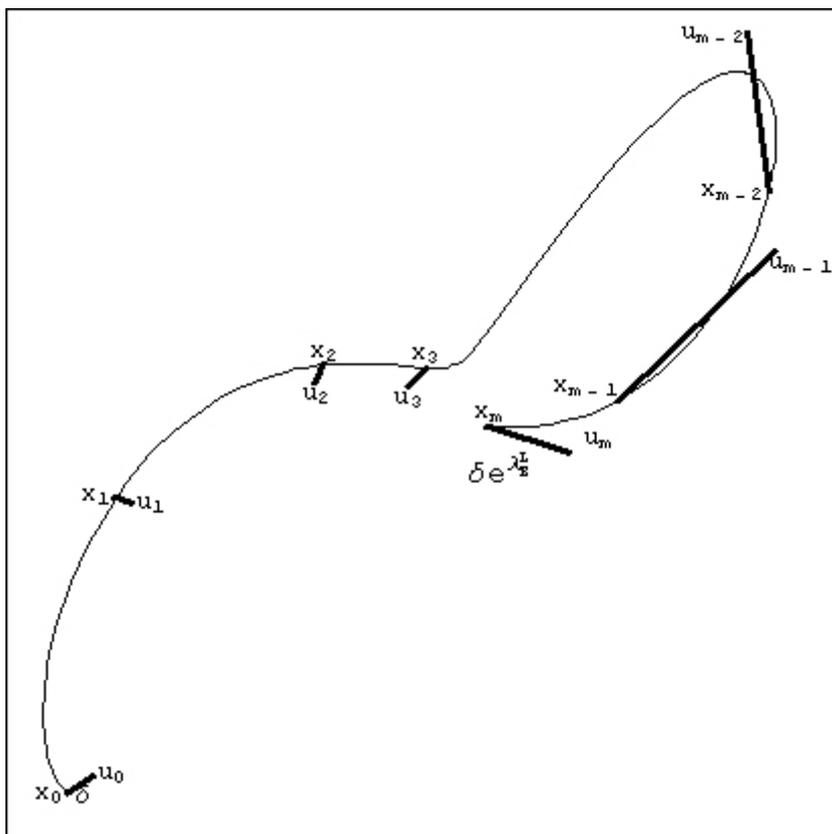
$x_0$  وفق اتجاه متجه الواحد  $E$  في فضاء الموضع بنفس الأسلوب الذي عرفنا به

معامل ليابونوف الأسى المحلي للتصوير  $P$ ، أي أن:

$$\lambda_P^E(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \log \left\| \left( I + \frac{1}{m} \mathfrak{S}(x_{m-1}) \right) \left( I + \frac{1}{m} \mathfrak{S}(x_{m-2}) \right) \dots \left( I + \frac{1}{m} \mathfrak{S}(x_0) \right) \cdot E \right\| \quad (4)$$

يبين الشكل (2) تطور متجه الاضطراب  $\delta \cdot E$  في فضاء الموضع و بخطوات زمنية

تساوي الواحد.



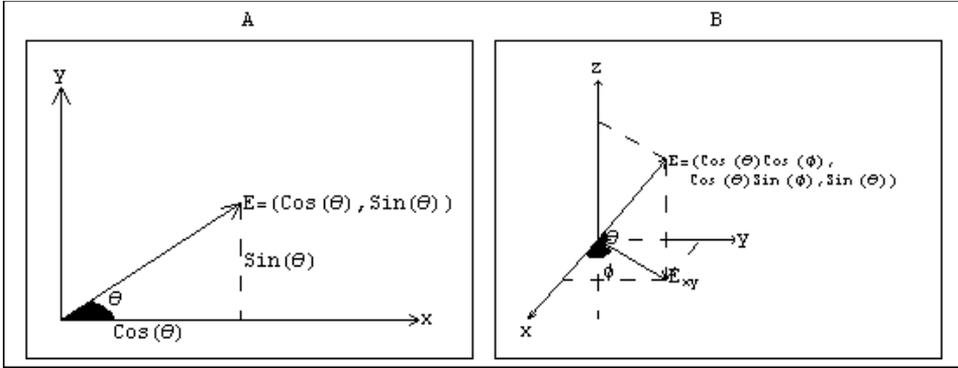
الشكل (2): تطور متجه الواحدة في فضاء موضع التدفق و بخطوة زمنية تساوي الواحد.

تبين العلاقتان (2) و (4) أن معامل ليابونوف الأسّي المحلي في أي نقطة  $x$  من فضاء الموضع هو تابع لمتجه الواحدة  $E$ . إضافةً إلى ذلك، إذا كان لفضاء الموضع  $N$  بعداً، حيث أن  $N \geq 2$ ، فإن متجه الواحدة  $E$  يتبع لمجموعة وسطاء عددها  $N - 1$  (كالزوايا  $\theta_i$  التي يصنعها هذا المتجه مع المحاور الإحداثية) و التي تعين هذا المتجه في فضاء الموضع.

وبالتالي بحل مجموعة المعادلات التالية والتي عددها  $N - 1$

$$\frac{\partial \lambda_p^E(x)}{\partial \theta_i} = 0 \quad (5)$$

سنحصل على الاتجاهات المميزة في كل نقطة من فضاء الموضع و التي تقابلها قيم حدية لمعامل ليابونوف الأسى الموضعي والتي يمكن من خلالها تحديد قيمة معامل ليابونوف الأسى المحلي الأعظمي  $\lambda_p^{Max}(x)$  في تلك النقطة  $x$ .



الشكل (3): طريقة اختيار متجه الوحدة عندما يكون فضاء الموضع

(A) ثنائي البعد (B) ثلاثي البعد.

يبين الشكل (3) طريقة تحديد متجه الوحدة  $E$  في فضاء الموضع وذلك عندما يكون الفضاء ثنائي أو ثلاثي الأبعاد. تجدر الإشارة هنا إلى أنه في حال كان  $\lambda_1$  هو معامل ليابونوف الأسى الأعظمي لتصوير  $P$  تم حسابه على جاذب ما  $A$  لهذا التصوير، فإن

$n\lambda_1$  هو معامل ليابونوف الأسي للتصوير  $P^n = \underbrace{P \circ P \circ \dots \circ P}_{n \text{ times}}$  على

هذا الجاذب (أو جزء منه).

سنقدم فيما يلي بعض الملاحظات الهامة:

1. من أجل أي تصوير أحادي البعد، يكون متجه الواحدة هو متجه أحادي البعد (أي أنه عدد ثابت قيمته تساوي الواحد)، و بالتالي يوجد اتجاه مميز محلي وحيد يقابل معامل أسي محلي حدي واحد فقط و هو المعامل الأسي الموضعي الأعظمي في هذه الحالة. بالتالي من أجل التصوير أحادي البعد التالي

$$x_{i+1} = f(x_i) ; i = 0, 1, 2, \dots$$

يكون

$$\lambda_f^{Max}(x_0) = \text{Log} \left| \frac{df}{dx}(x_0) \right| ; \forall x_0 \in \bar{B}$$

2. من أجل تصوير ثنائي البعد، يكون فضاء الموضع ثنائي البعد أيضاً وبالتالي يمكن اختيار متجه الواحدة بالشكل  $E = (\text{Cos}\theta, \text{Sin}\theta)$  و بالتالي من أجل التصوير

ثنائي البعد التالي

$$\begin{cases} x_{i+1} = f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = g(x_i, y_i) \end{cases} ; i = 0, 1, 2, \dots$$

ويعد حل المعادلة (5)، نجد أن

$$\lambda_P^{Max}(x, y) = \text{Log} \sqrt{\frac{1}{2}(A + \sqrt{4C^2 + B^2})}$$

حيث أن

$$\begin{cases} A = f_x^2 + f_y^2 + g_x^2 + g_y^2 \\ B = f_x^2 - f_y^2 + g_x^2 - g_y^2 \\ C = f_x f_y + g_x g_y \end{cases}$$

مميزات معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية:

**تعريف (3):** ليكن  $A$  جاذب محدود لتصوير  $P$  قابل للمفاضلة و لتكن  $B$  مجموعة

جزئية محدودة من مجال جذب هذا الجاذب و تحقق أن  $B \supseteq A$  و  $B \supseteq P(B)$ .

يمكننا تعريف المقدار

$$\chi_P(B) = \text{Sup}\{\lambda_P^{Max}(x); x \in \overline{B}\}$$

حيث أن  $\overline{B}$  هي غلافة المجموعة  $B$ .

بما أن  $P$  قابل للمفاضلة، فإن

$$\lambda_{P^n}^{Max}(x) < \infty ; \quad \forall x \in \overline{B} \quad \& \quad \forall n \geq 1$$

و بالتالي فإن

$$\chi_{P^n}(B) < \infty ; \forall n \geq 1$$

ملاحظة: إن الشرط اللازم و الكافي لكي يكون

$$\lambda_{P^n}^{Max}(x) > -\infty ; \forall x \in \bar{B} \text{ \& } \forall n \geq 1$$

هو أن يكون  $\det(\mathfrak{T}(x)) \neq 0 ; \forall x \in \bar{B}$  و بالتالي من الآن فصاعداً سنفرض تحقق هذا الشرط باستثناء الحالات التي يذكر فيها غير ذلك.

لتكن  $x_0$  نقطة من مجال جذب جاذب ديناميكي  $A$  للتصوير  $P$ ، يعرف تشن و دونغ [9] معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي لهذا التصوير على الجاذب المعطى بالعلاقة

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} |\mu_1(\mathfrak{T}_n(x_0))|$$

حيث أن  $\mathfrak{T}_n$  هي المصفوفة اليعقوبية للتصوير المركب  $P^n$  و  $\mu_1(\cdot)$  يرمز لأكبر قيمة مميزة (كقيمة عددية) للمصفوفة المعطاة. و يمثل هذا المعامل المعدل الأسّي للمط في الاتجاه الذي يحدث فيه أعظم قيمة للمط. و بالتالي يمكننا أن نكتب

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lambda_{P^n}^{Max}(x_0)$$

**نتيجة (1):** يمكننا بسهولة استنتاج أن  $\forall n \geq 1$  ;  $\chi_{P^n}(B) \leq n\lambda_1$  و بالتالي إذا وجد عدد صحيح  $n_1$  بحيث أن  $\chi_{P^{n_1}}(B) < 0$ ، عندئذٍ يكون الجاذب  $A$  غير فوضوي. علاوةً على ذلك، إذا كان الجاذب  $A$  فوضوياً فإن

$$\chi_{P^n}(B) > 0 ; \forall n \geq 1$$

**توطئة (1):** من أجل أي نقطة  $x_0$  من مجال جذب الجاذب الديناميكي  $A$  لتصوير  $P$  و من أجل أي عدد صحيح موجب  $n$  (كبير بقدر كافٍ)، تتوزع قيم معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتصاوير المركبة  $P^n$  على جانبي مستقيم في المستوي  $(n - \lambda)$  ميله يساوي  $\lambda_1$  (معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي للتصوير  $P$  على الجاذب الديناميكي  $A$ ).

**الإثبات:** من أجل أي عدد حقيقي  $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد صحيح  $n_1 \geq 1$  بحيث أن

$$\left| \frac{1}{n} \lambda_{P^n}^{Max}(x_0) - \lambda_1 \right| < \varepsilon ; \forall n \geq n_1 \quad (6)$$

و بالتالي فإن

$$\left| \frac{1}{m} (\lambda_{P^{n+m}}^{Max}(x_0) - \lambda_{P^n}^{Max}(x_0)) - \lambda_1 \right| < (2 \frac{n}{m} + 1) \varepsilon ; \forall n \geq n_1 \ \& \ \forall m \geq 1 \quad (7)$$

فإذا وضعنا  $n = n_1$  و  $m \geq n_1$ ، يمكن عندئذٍ جعل الطرف الأيمن من المتراجحة (7) صغير بشكل كفي، و هذا يعني أن ميل المستقيم الذي يصل بين النقطتين  $(n_1, \lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0))$  و  $(n_1 + m, \lambda_{P^{n_1+m}}^{Max}(x_0))$  ينتهي إلى القيمة  $\lambda_1$  عندما تسعى  $m$  إلى اللانهاية. أي أن النقاط  $(n, \lambda_{P^n}^{Max}(x_0))$  تتوزع على جانبي المستقيم الذي يصل بين النقطتين السابقتين و ذلك أيّاً كانت  $\forall n \geq 2n_1$ .

**توطئة (2):** يكون الجاذب الديناميكي  $A$  الذي مجال جذبته  $B$  لتصوير  $P$  فوضوياً (غير فوضوي) إذا و فقط إذا كان من أجل أي نقطة  $x_0 \in B$  يوجد عدد صحيح  $k$  بحيث أن  $\lambda_{P^n}^{Max}(x_0) > 0$  و  $\lambda_{P^n}^{Max}(x_0) < 0$  و ذلك أيّاً كانت  $\forall n \geq k$ .

### الإثبات: لزوم الشرط

باستخدام المتراجحة (7-4) و بفرض أن  $|\lambda_1| < \varepsilon$  و  $n = n_1$  و  $m \geq n_1$ ، نجد

**الحالة الأولى:** إذا كان الجاذب فوضوياً، أي أن  $\lambda_1 > 0$  و باستخدام المتراجحة (7)

فإننا نميز الحالات التالية

• إما أن

$$\lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m\lambda_1 \leq \lambda_{P^{n_1+m}}^{Max}(x_0) < \lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m(\lambda_1 + \varepsilon) + 2n_1\varepsilon \quad (8)$$

و يثبت الطرف الأيسر من هذه المتراجحة صحة المبرهنة في هذه الحالة و ذلك بعد وضع  $k = n_1 + m_1$ ، حيث أن  $m_1$  كبير بقدر كافٍ بحيث يكون

$$\lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m_1 \lambda_1 > 0$$

• أو أن

$$\lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m \lambda_1 \geq \lambda_{P^{n_1+m}}^{Max}(x_0) > \lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m(\lambda_1 - \varepsilon) - 2n_1 \varepsilon \quad (9)$$

و يثبت الطرف الأيمن من هذه المتراجحة صحة المبرهنة في هذه الحالة و ذلك بعد وضع  $k = n_1 + m_1$ ، حيث أن  $m_1$  كبير بقدر كافٍ بحيث يكون

$$\lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m_1(\lambda_1 - \varepsilon) - 2n_1 \varepsilon > 0$$

الحالة الثانية: إذا كان الجاذب غير فوضوي، أي أن  $\lambda_1 < 0$ ، عندئذٍ نميز الحالات

التالية

• من أجل الحالة الجزئية الأولى، يثبت الطرف الأيمن من المتراجحة (8) صحة

المبرهنة في هذه الحالة و ذلك بعد وضع  $k = n_1 + m_1$ ، حيث أن  $m_1$  كبير

$$\lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m_1(\lambda_1 - \varepsilon) - 2n_1 \varepsilon < 0$$

• من أجل الحالة الجزئية الثانية، يثبت الطرف الأيسر من المتراجحة (9) صحة

المبرهنة في هذه الحالة و ذلك بعد وضع  $k = n_1 + m_1$ ، حيث أن  $m_1$  كبير

$$\lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m_1 \lambda_1 < 0$$

أما إثبات كفاية الشرط فهو بديهي و بسيط لكون  $\lambda_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lambda_{P^n}^{Max}(x_0)$ ، و

بالتالي فإن إشارة  $\lambda_1$  هي إشارة المقدار  $\lambda_{P^n}^{Max}(x_0)$  و ذلك عندما  $n \rightarrow \infty$ .

**ملاحظة:** إذا كان  $\det(\mathfrak{J}(x_0)) = 0$  من أجل نقطة ما  $x_0 \in \bar{B}$ ، تبقى التوطنتان

(1) و (2) صحيحتان طالما أن  $x_0$  ليست نقطة ابتدائية لمسار المنظومة المدروس.

إضافةً إلى أن  $\det(\mathfrak{J}_{P^n}(x_0)) = 0 ; \forall n \geq 1$ ، أي أن

$$\lambda_{P^n}^{Max}(x_0) = -\infty ; \forall n \geq 1$$

**بعض الأمثلة التطبيقية:**

**1. التصوير اللوجستي:** لقد درس كابلان و غلاس العديد من خصائص و ميزات هذا

التصوير [10]. و يعرف هذا التصوير بمعادلة الفروق

$$x_{i+1} = \alpha x_i (1 - x_i) ; \forall x_i \in [0,1]$$

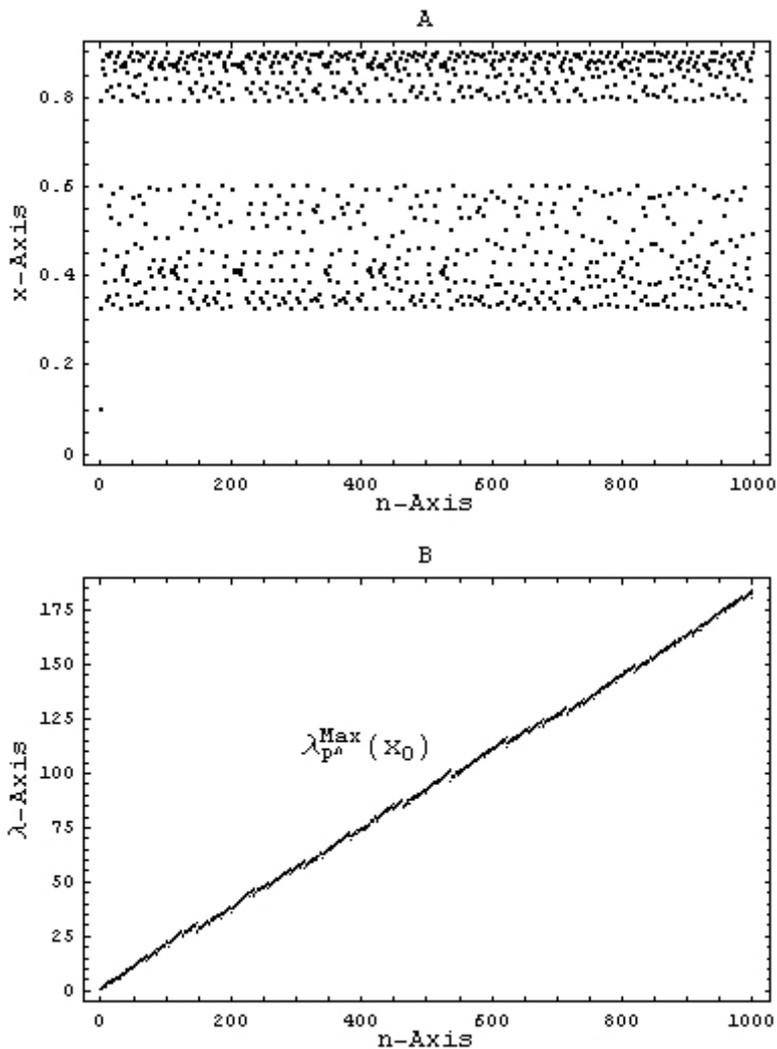
حيث أن  $\alpha \in [0,4]$ .

يبين الشكل (4) الجاذب الفوضوي لهذا التصوير من أجل قيمة الوسيط  $\alpha = 3.6$

إضافةً إلى معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية المقابلة للتساوير المركبة

$P^n$  و ذلك من أجل  $n = 1, 2, \dots, 1000$ ، حيث أننا اخترنا النقطة  $x_0 = 0.2$

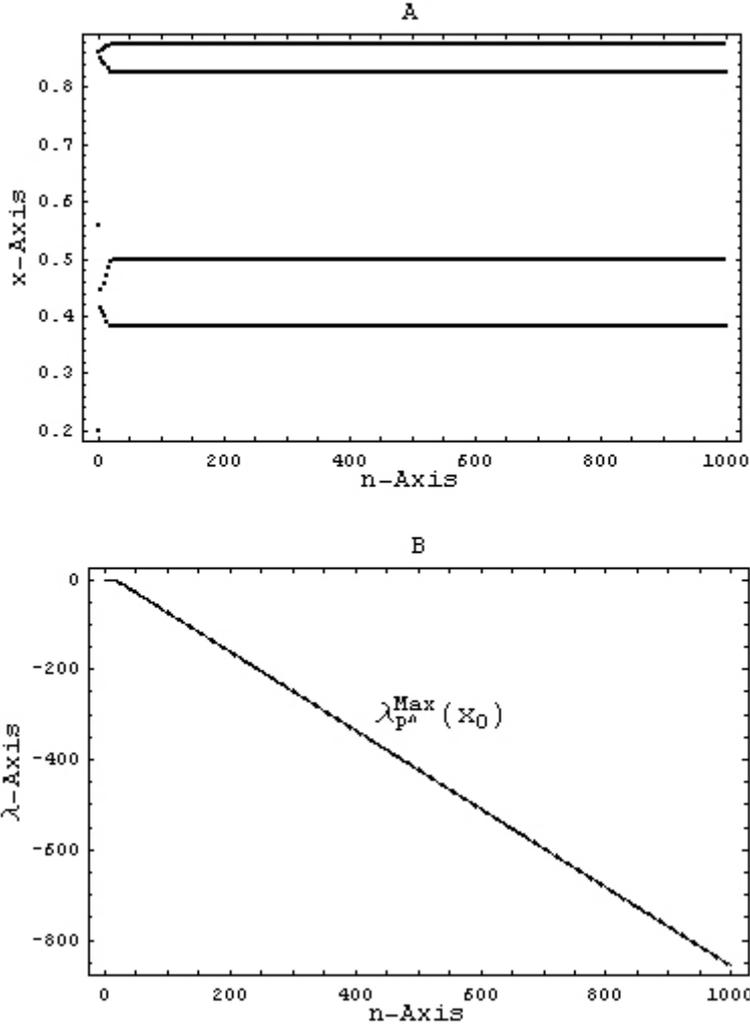
كنقطة ابتدائية. و يتضح من هذا الشكل أن المنحني الناتج يتقارب من كونه خطأً مستقيماً. و لإيجاد قيمة تقريبية لمعامل ليابونوف الأسّي الأعظمي  $\lambda_1$  للتصوير من أجل قيمة الوسيط المعطاة نقوم بحساب ميل هذا المستقيم من خلال حساب ميل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين  $(600, \lambda_{p600}^{Max}(x_0))$  و  $(1000, \lambda_{p1000}^{Max}(x_0))$ . و قد وجدنا أن هذه القيمة (القيمة التقريبية لميل المستقيم) تساوي قيمة معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي للتصوير  $\lambda_1 = 0.1768$  و التي تم حسابها بالطريقة الاعتيادية المعروفة.



الشكل (4): (A) الجاذب الفوضوي للتصوير اللوجستي من أجل  $\alpha = 3.6$

(B) معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتصاوير المركبة  $P^n$  من أجل

$$.n = 1, 2, \dots, 1000$$



الشكل (5): (A) الجاذب الدوري للتصوير اللوجستي من أجل  $\alpha = 3.5$

(B) معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة  $P^n$  من أجل

$$.n = 1, 2, \dots, 1000$$

كما يبين الشكل (5) جاذب هذا التصوير و قيم معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية المقابلة للتصاوير المركبة  $P^n$  من أجل قيمة الوسيط  $\alpha = 3.5$  و من أجل  $x_0 = 0.2$ . و يتضح من هذا الشكل أن المنحني الناتج يتقارب من كونه خطأً مستقيماً. و بحساب القيمة التقريبية لميل المستقيم الناتج في هذه الحالة و جدنا أنها تساوي قيمة معامل ليابونوف الأسية الأعظمي للتصوير  $\lambda_1 = -0.8725$  و التي تم حسابها بالطريقة الاعتيادية المعروفة.

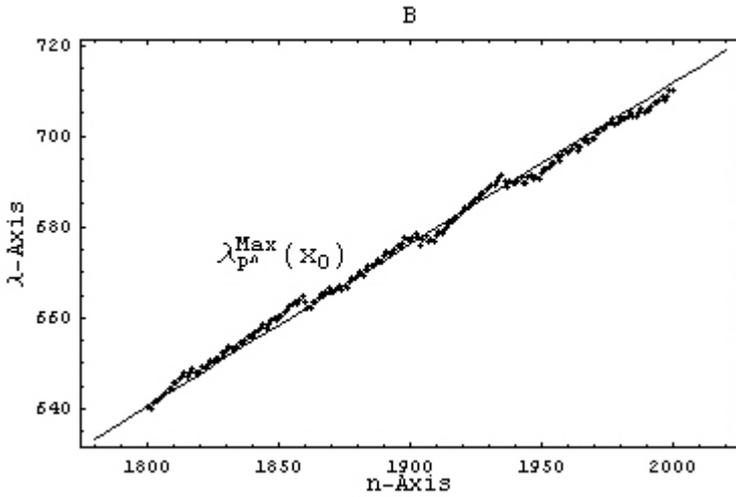
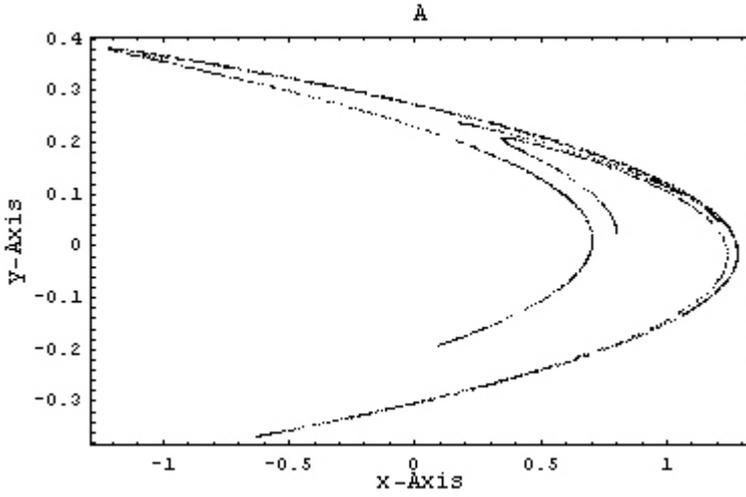
2. تصوير هينون: وضع النموذج الرياضي لهذا التصوير عالم الفلك الفرنسي [11]،

حيث يعطى هذا التصوير بمعادلتى الفروق التاليتين

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= 1 - \alpha x_i^2 + y_i \\y_{i+1} &= \beta x_i\end{aligned}$$

عندما تكون  $|\beta| < 1$  فإن التصوير يقلص و يمتد و يطوي الساحات في فضاء الموضع، حيث نسمي هذا النوع من الديناميكيات بديناميكية حدوة الحصان.

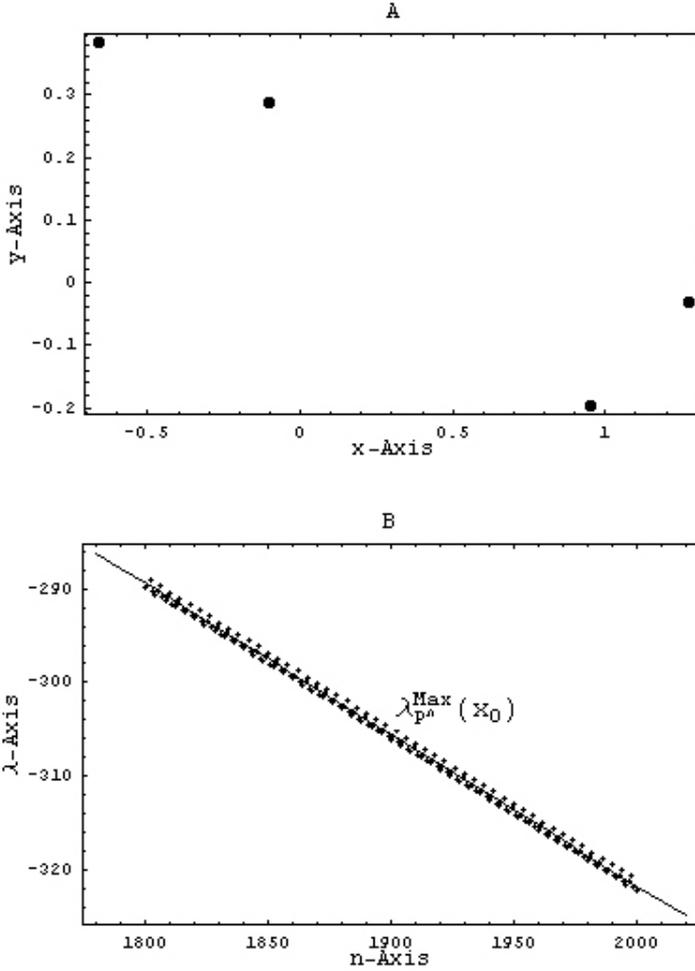
يبين الشكل (6) جاذب فوضوي نموذجي للتصوير من أجل قيم الوسيط  $\alpha = 1.4$  و  $\beta = 0.3$  إضافةً إلى معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية المقابلة للتصاوير المركبة  $P^n$  من أجل النقطة  $x_0 = (-0.348, 0.311)$  من فضاء الحالة و من أجل  $n = 1, 2, \dots, 1000$ .



الشكل (6): (A) الجاذب الفوضوي لتصوير هينون من أجل  $\alpha = 1.4$  و  $\beta = 0.3$

(B) معاملات ليايونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتصاوير المركبة  $P^n$  من أجل

$$.n = 1, 2, \dots, 350$$



الشكل (7): (A) الجاذب الدوري لتصوير هينون من أجل  $\alpha = 1$  و  $\beta = 0.3$

(B) معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة  $P^n$  من أجل

$$.n = 1, 2, \dots, 350$$

لقد قمنا برسم مستقيم إضافي في المستوي  $(n, \lambda_{P^n}^{Max})$  ميله  $\lambda_1 = 0.35569$

يساوي قيمة معامل ليابونوف الأسى الأعظمي للتصوير في هذه الحالة و الذي تم حسابه

بالطريقة الاعتيادية، لكي نبين أن هذه النقاط تتوزع على جانبي هذا المستقيم. كما أننا قد قمنا بالشيء ذاته من أجل قيم الوسطاء  $\alpha = 1$  و  $\beta = 0.3$  لإظهار جاذب التصوير غير الفوضوي المستنتج في هذه الحالة، كما هو مبين في الشكل (7). و قد أظهرت الحسابات أن  $\lambda_1 = -0.161132$  هي قيمة معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي للتصوير، و قد اعتمدنا في حساباتنا هذه النقطة الابتدائية  $x_0 = (0.9517, -0.1969)$ .

3. منظومة لورنز: يمكن الحصول على دراسة موسعة لهذه المنظومة في كتاب درازن [12]. هذه المنظومة هي منظومة مستمرة (تدفق) ثلاثية الأبعاد و تتعين بالمعادلات

التفاضلية الثلاثة التالية

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - qz \end{cases}$$

حيث أن  $p, q, r$  هي وسطاء حقيقية للمنظومة.

و بما أن تدفق يملك معامل ليابونوف واحد صفري و هو المعامل الموافق لاتجاه تدفق

المنظومة (أي الاتجاه المماسي  $\vec{\tau}$ ) فإنه و بدون المساس بعمومية المسألة يمكن أن

نفرض أن متجه واحدة المنحى المأخوذ موجود في المستوي الناظمي لهذا التدفق في

النقطة المعطاة، و بالتالي فإن  $\vec{E} = \cos(\theta) \vec{n} + \sin(\theta) \vec{b}$  حيث أن  $\vec{n}$  و  $\vec{b}$

هما متجهي واحدة الناظم الأساسي و ثنائي الناظم في النقطة المعطاة. و بالتالي بعد

تعيين متجه واحدة المنحى  $E$  نقوم و بالطريقة المحددة سابقاً بحساب معاملات

ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة  $P^n$  في النقطة المعطاة في

فضاء الحالة.

إن سبب اختيار المتجه  $E$  بهذا الشكل هو لتخفيض عدد المعادلات المثلثية التي

سنحصل عليها بتطبيق العلاقة (5) و التي يطلب حلها للحصول على قيم معاملات

ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة  $P^n$  في النقطة المعطاة.

كما يبين الشكل (8) الجاذب الفوضوي لمنظومة لورنز من أجل قيم الوسطاء  $p = 10$

و  $q = 8/3$  و  $r = 27$ ، إضافةً إلى معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية

للتساوير المركبة  $P^n$ ، حيث أن  $P$  هو التصوير المرتبط بهذا التدفق. و يتضح من

الشكل أن المنحني الناتج يتناهي إلى خطٍ مستقيم القيمة التقريبية لميل هذا المستقيم

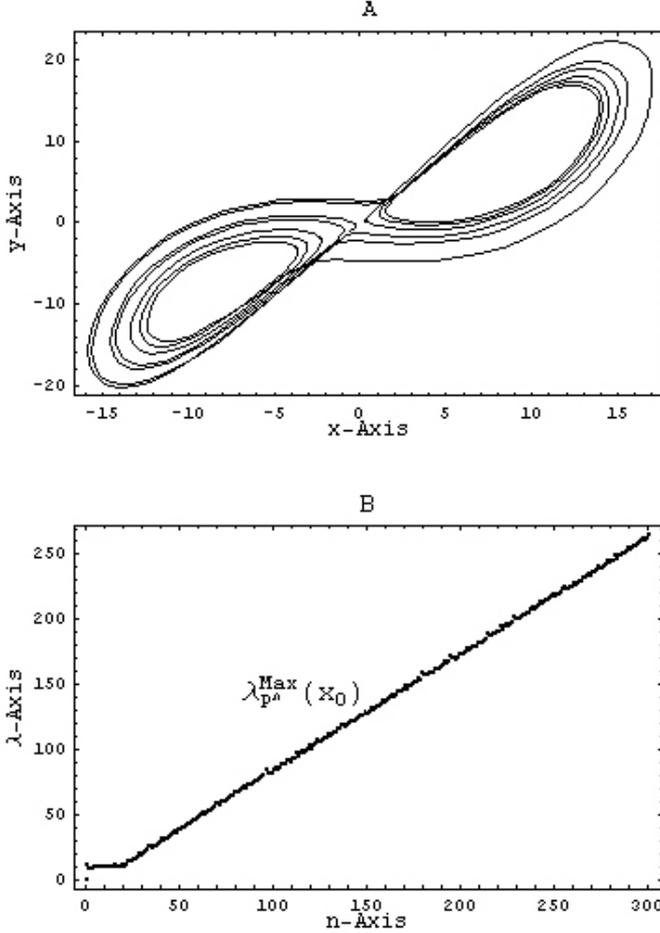
باستخدام النقطتين  $(150, \lambda_{P^{150}}^{Max}(x_0))$  و  $(300, \lambda_{P^{300}}^{Max}(x_0))$  لنجد أن هذه

القيمة هي  $m = 0.895116$  و هي تساوي قيمة معامل ليابونوف الأسية الأعظمي

$\lambda_1$  للتصوير من أجل قيم الوسطاء المعطاة و الذي تم حسابه باستخدام ملحقات برنامج

ماثيماتكا [Sandri (1996)] حيث أننا اعتبرنا أن النقطة الابتدائية هي

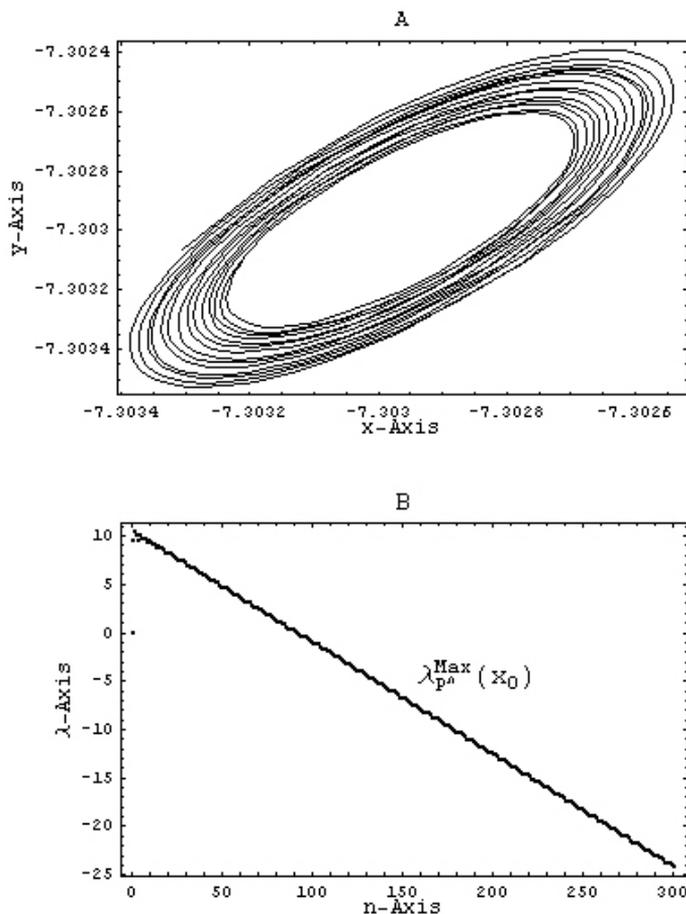
$$.x_0 = (0.0001, 0.0001, 0.0001)$$



الشكل (8): (A) الجاذب الفوضوي لمنظومة لورنز من أجل  $r = 27$

(B) معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة  $P^n$  من أجل

$n = 1, 2, \dots, 300$ ، حيث أن  $P$  هو التصوير المرتبط بهذا التدفق.



الشكل (9): (A) الجاذب غير الفوضوي لمنظومة لورنز من أجل  $r = 21$

(B) معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة  $P^n$  من أجل

$n = 1, 2, \dots, 300$ ، حيث أن  $P$  هو التصوير المرتبط بهذا التدفق.

كما قمنا برسم الجاذب غير الفوضوي للتصوير في الشكل (9) من أجل قيم الوسطاء

$p = 10$  و  $q = 8/3$  و  $r = 21$  إضافةً إلى قيم معاملات ليابونوف الأسية

الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة  $P^n$ ، حيث أن  $P$  هو التصوير المرتبط بهذا التدفق. و قد وجدنا في هذه الحالة و بنفس الأسلوب أن  $\lambda_1 = -0.114787$ .

لقد اعتمدنا في كلتا الحالتين السابقتين خطوة التكامل  $dt = 0.0001$ ، و بالتالي قمنا بتقطيع الزمن و استنتجنا العلاقة التالية

$$\lambda_p^{Max}(x, y) = \text{Log} \sqrt{A + \sqrt{C^2 + B^2}}$$

حيث أن  $(\mathfrak{I}(x_0) \cdot E)^2 = B \text{Cos}(2\theta) + C \text{Sin}(2\theta) + A$ ، و ذلك لحساب معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة  $P^n$ .

## 5. الاستنتاجات و التوصيات:

لقد بينت النتائج التي حصلنا عليها من خلال هذا البحث، خاصةً التوطئتين (1) و (2)، أنه يمكن استخدام التعريف الموضعي لمعاملات ليابونوف الأسية لإيجاد قيمة معامل ليابونوف الأسى الأعظمي للمنظومة، و بالتالي لتوقع وجود أو عدم وجود السلوكية الفوضوية في ديناميكية المنظومة المدروسة. لذلك نوصي باستخدام الطريقة المقترحة في هذا البحث لحساب قيمة معامل ليابونوف الأسى الأعظمي لأي منظومة ديناميكية، لسهولة حساب المعاملات الموضعية في أي مكان من فضاء موضع المنظومة. كما نتمنى أن يكون هذا البحث لبنة أساسية للأبحاث العلمية المستقبلية.

### المراجع:

1. Cesari L., 1971 - Asymptotic Behaviour and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag, 3<sup>rd</sup> Edition, New York, Heidelberg, Berlin, 274.
2. Oseledec V. L., 1968 - A Multiplicative Ergodic Theorem: Lyapunov Characteristic Numbers for Dynamical Systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, **19** : 197-231.
3. Henon, M., and Heiles, C., 1964 - The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments. *Astron. J.*, **69** (1) : 73-79.
4. Chirikov, B. V., 1979 - A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems. *Phys. Reports*, **52** (5) : 263-379.
5. Shimada, I. and Nagashima, T., 1979 - A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems. *Prog. Theor. Phys.*, **61** (6) : 1605-1616.
6. Froeschle, C., J., 1984 - The Lyapunov Characteristic Exponents and Applications. *Mecanique Theorique et Applique*, Supplement (ISSN 0750-7240): 101-132.

7. Wolf, A., 1986 - Quantifying Chaos with Lyapunov Exponents, *In*: Holden, A. V. (Ed.), *Chaos*. Princeton University Press, Princeton, pp. 273-290.
8. Galias, Z., 1999 – Local Transversal Lyapunov Exponents for Analysis of Synchronization of Chaotic Systems. *Int. J. Circuit Theory and Applications*, **27** (6) : 589–604.
9. Chen, G. and Dong, X., 1998 – From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications. World Scientific Pub., Singapore, 776.
10. Kaplan, D. and Glass, L., 1995 – Understanding Non Linear Dynamics. Springer–Verlag, New York, 420.
11. Henon, M., 1976 – A Two–Dimensional Mapping with Strange Attractor. *Commun. Math. Phys.*, **50** (1) : 69–77.
12. Drazin, P.G., 1992 – Nonlinear Systems. Cambridge Univ. Press, Glasgow, 317.

# تطبيقات مفعول ميوسباور لدراسة ديناميكية الشبكات الفرعية لخلائط Si/Fe

الدكتور: مصطفى ديلو

جامعة البعث - كلية العلوم - قسم الفيزياء

## الملخص

نظرياً تم إجراء محاولة لدراسة التغيرات التي تحدث في ديناميكيات الاهتزازات الذرية المحلية في الشبكات الفرعية لخلائط Si/Fe بواسطة تكاثف Bose الأزواج المحلية من الثقوب التي تكونت في مناطق التكافؤ لذرات الحديد . من أجل ذلك درست ديناميكية الشبكات الفرعية لخلائط Si/Fe و من خلالها درست نظرية لتغيرات الاحتمالية النسبية لمفعول ميوسباور كتابع للتغيرات النسبية لدرجة الحرارة و أن هذه التابعة تسلك سلوك شاذ . حيث تم الحصول على معلومات عن التغيرات في ديناميكية الاهتزازات الموضعية للأيونات بالاعتماد على مطيافية ميوسباور وقد تبين أيضاً إلى أنه يمكن الإشارة إلى الانخفاض في الاحتمالية النسبية  $(W/W_0)$  بالقرب من  $T_c$  في مرحلة الناقلية الموجودة في هذه العلاقات. ظهر في هذه الدراسة النظرية أنه يجب الأخذ بعين الاعتبار تأثير كل من أزواج الثقوب المحلية و الحزمة الإلكترونية على ديناميكية المنظومة الأيونية الفرعية .

**الكلمات المفتاحية:** مطيافية ميوسباور - اهتزازات الشبكة البلورية- احتمالية مفعول ميوسباور- متوسط الانحرافات المربعة لذرات ميوسباور

## University of Al-Baath –Faculty of Science –Department of Physics

### ABSTRACT

Theoretically, an attempt was made to study the changes that occur in the dynamics of local atomic vibrations in the sub-lattices of Si/Fe alloys by a Bose condensation the local pairs of holes formed in the valence shells of iron atoms. For that, the dynamics of the sub-lattices of Si/Fe mixtures were studied, and through it a theoretical study was studied of the relative probability changes of the Mossbauer effect as a function of the relative changes of temperature, and that this dependence has an anomalous behavior. Where information on changes in the dynamics of the local vibrations of ions was obtained by relying on Mossbauer spectroscopy and it was also found that the decrease in the relative potential can be indicated near the conductivity phase in these relationships. It seemed that the local hole pairs and the electrons band have a significant effect on the dynamics of the ion sub-system.

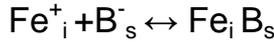
## 1- المقدمة

إن طبيعة الحديد الواسعة الانتشار في كتلة معينة من أو في بلورات Si

متنامية و متحدة مع انتشارها العالي و إعادة اتحاد حوامل الشحنة القوي (لاسيما في Si من النوع-p) جعلت Fe أكثر عنصر يخالط السيليكون الالكتروني Si و سيليكون القاعدة الشمسية . إن تركيز الحديد المتشنت ذرياً في قاعدة السيليكون الشمسية يجب أن يبقى تحت العتبة المسموح بها  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$  لضمان عمر ناقلية أقلية أكبر أو يساوي 1 ميكروثانية. يتحقق ذلك عن طريق تخزين شوائب الحديد بعيداً عن المناطق [1] .

المنشطة حيث تتشكل رواسب أقل تضرراً ، و الذي بدوره يشكل تهديداً لذوبان الجسيمات [2]. عند انتشار ذرات الحديد في بلورة السيليكون Si غالباً تتواجد في هذه الحالة ذرات الحديد في السيليكون كشوائب خلالية (مقحمة) تحتل مواقع رباعي وجوه خلالي [2.3] . هذه الشوائب (العيوب) نسبياً مفهومة جيداً و الإشارات الطيفية التي يتم الحصول عليها من خلال التجاوب البارامغناطيسي الالكتروني و التجاوب المزدوج الالكتروني – نووي و مطيافية ميوسباور حيث من خلالهم تم الإبلاغ عن هذه الشوائب على نطاق واسع . وهذه الشوائب بدورها متنقلة عند درجة حرارة T أكبر أو تساوي درجة حرارة الغرفة متنقلة في Si . حيث تنتشر كأيونات موجبة الشحنة كونها محاصرة بأخذات مشحونة محاصرة سلباً لتشكل أزواج أخذة Fe [4].

تم تسجيل نوعين أو نموذجين لأزواج الحديد الآخذة أحدهما بتناظر مثلي و الآخر بتناظر معيني مستقيم يتوافق مع التراكيب المستقرة و شبه المستقرة على التوالي اعتماداً على التفاعل المعكوس التالي



السيليكون س ي بحساسية  $10^{11} \text{ cm}^{-3}$  ، التي تمنح أهمية تكنولوجية كبيرة لأزواج الحديد الآخذة . في حين من المتفق عليه أن الشوائب تحتل مواقع خلالية في ظل ظروف التوازن و هناك براهين على وجود ذلك من خلال مطيافية ميوسباور  $\text{Fe}_s$  تراكيز كبيرة للحديد المستبدل أخذة بارامغناطيسية  $\text{Fe}_s$ . وقد تبين أن النظريات تتوقع أن تكون [5.6] عميقة في حالة شحنة سالبة لكن توجيه القياسات ينطوي دائماً على زرع أيونات السبر المشعة (يليه التلدين الحراري) . و أثبتت مطيافية التجاوب الالكتروبارامغناطيسي EPR- [7] إن الشوائب  $\text{Fe}_s$  تنجم عن تفاعل الشوائب الخلالية  $\text{Fe}_i$  مع الشواغر في Si الناتجة عن فعل حراري أو ديناميكي [8] . لقد أشارت الأبحاث إلى أن  $\text{Fe}_s$  مشحونة بشحنة موجبة أو معتدلة لدى تجاوبات في مادة Si من أنماط p أو n [9.10] . في حالة

التوازن الحراري إن الغالبية العظمى لشوائب الحديد هي المواقع الخلالية. و يمكن تطبيق نفس المناقشة على تجارب ميوسباور حيث شواغر السيليكون إما عن طريق ارتفاع درجة حرارة التلدين، أو التسقية (تبريد سريع) أو عن طريق زرع نظائر (مثل  $^{57}\text{Mn}^+$ ) [11]، ويمكن أن تتفاعل مع  $\text{Fe}_i$  منتهية بشوائب  $\text{Fe}_s$  و مع ذلك فإن تجارب ميوسباور تعطي دراسة مبسطة عن تواجد  $\text{Fe}$  عن طريق الترسيب الفراغي لطبقة الحديد على سطح السليكون التي لم تكن معالجة حرارياً، حيث يظهر بوضوح إشارة قوية منسوبة لـ  $\text{Fe}_s$  في درجة حرارة الغرفة و من المفروض دون مقدمة متعمدة للشواغر [11]. و يعتمد تحليل طيوف ميوسباور على الانبعاث و الامتصاص المتكررين للإشعاع من وإلى نواة الذرات الملزمة (الحديد). في غياب الحقل المغناطيسي حول النواة المتبادلة التأثير مع الذرات الأخرى، إن التأثيرات التبادلية المناسبة هي أحادي القطب الكهربائي و رباعي القطب الكهربائي اللذان يتم تحديدهما بواسطة الانزياح الإيزوميري و الانشطار رباعي القطب الكهربائي على التوالي [10]. في الحقيقة إن هذين المتحوليين حساسان لمقدار كثافة التماس الإلكترونية و عدم كروية الكثافة المحيطة في نواة ميوسباور ( $^{57}\text{Fe}$  في هذه الحالة) بدافع من خلال تأثير الحديد و مركباته على Si المؤسس تقنياً، تم استخدام مطيافية ميوسباور لـ  $^{57}\text{Fe}$  لدراسة مواضع و انتشار شوائب الحديد العنصري و الفعالية الالكترونية لها [8.9]. و تكون مجمل القيم التجريبية و الحسابية لشوائب  $\text{Fe}_i$  و  $\text{Fe}_s$  في السيليكون Si و في أنصاف نواقل المجموعة الرابعة الأخرى معروضة في أعمال لباحثين آخرين [8-11]. إن الشوائب  $\text{Fe}_s$  مشحونة إيجاباً أو معتدلة في التجاوبات الموافقة لمطيافية ميوسباور في الأونة الأخيرة و لأجل نفس الشوائب أبلغ يوشيد و زملائه عن قيم المتحولات الميوسباورية لهذه الشوائب المتمثلة بالخلانط Fe/Si [8.6]. إن الشوائب  $\text{Fe}_i$  و  $\text{Fe}_s$  يمكن أن تكون لدى السيليكون أو المجاورات لـ SiFe. في حين أن الحديد المستبدل يمكن أن يحل محل ذرات السيليكون Si أو  $\text{Fe}_i$  Si. تبين أن التوافق بين المعطيات النظرية و التجريبية معقول، حيث تم الإبلاغ عن تجاوب واحد لأجل الحديد المستبدل Fe على الرغم من توقع قمتين نظرياً. و من المثير للاهتمام أن الاتجاه العام لقمم أطياف ميوسباور للحديد في خلانط السيليكون يكون متميزاً من خلال

التزايد الخطي للانزياح الإيزوميري لـ  $\text{Fe}_s$  و  $\text{Fe}_i$  مع المسافة بين Fe و أول المجاورات. و قد تمت دراسة الفعالية الالكترونية لشوائب  $\text{Fe}_i$  و  $\text{Fe}_s$  في السيليكون باستخدام مطيافية ميوسباور من خلال نماذج متعددة و تراكيز مختلفة أيضاً و عملية الخلط مختلفة من حيث درجات الحرارة و الشروط الترموديناميكية المحيطة [6.11]

يظهر أن إزاحات ذرات Fe يلعب دور هام في الناقلية و في اللا توافقية لاهتزازات Fe [12]. وقد ظهرت مفارقات بالاهتزازات في وحدة الخلية الأساسية لعدة خلائط مع Fe بالقرب من درجة حرارة كيوري  $T_c$  على تحولات الأيونات و ذلك في أبحاث سابقة [13]. و قد لوحظ وجود علاقة بين ديناميكية أيونات المنظومة الفرعية Fe-Si و ارتباطات الناقلية التي ينتج عنها تناقص في احتمالية مفعول ميوسباور  $f'$  بالقرب من درجة حرارة كيوري  $T_c$ . وقد تم أيضاً ملاحظة تناقص الناقلية الفائقة في أكاسيد معادن عديدة مطلية [14-16]. و هذا ينتج من تزايد متوسط مربع سعة اهتزاز ذرات ميوسباور التي تشغل مواقع Si عند تراكيز منخفضة. نظراً للاهتمام بهذه العلاقة لقد تمت دراستها من خلال أبحاث عديدة على أساس المرجع [17]. تنطوي الفكرة على رفع انحلال الطيف الإلكتروني بواسطة التأثير المتبادل بالأيونات المنزاحة (مفعول عصابة Jahn-Teller). حيث تدعم هذه الفكرة العبارة التي تشكلها في ناقل و المرتبطة بصورة وثيقة بالناقلية عند درجة حرارة كيوري  $T_c$  [18]، وستجعل من الممكن دراسة نعومة (Softening-) اهتزازات أيونات الحديد في درجات حرارة منخفضة (متضمناً تشكيل بئري كمون أيونيين) [19]. بالاعتماد على نتائج المراجع [17,19] يمكن إجراء محاولة في الدراسة الحالية لمعرفة التغيرات المتسببة في ديناميكية الاهتزازات الذرية الموضوعية في التراكيب البلورية الخلالية لخلائط Fe/Si من خلال تكاثف بوزه – Bose لأزواج الثقوب الموضوعية التي تشكلت في طبقات التكافؤ لذرات Fe. إن ترابطات الناقلية تم وصفها على أساس آلية أكستون(إلكترون و ثقب) متطورة في المرجع [20]. تعود هذه الآلية إلى جذب إلكترونات أيونات الحديد في التراكيب الخلالية. تم إجراء الدراسة هنا على أساس الناقلية لأزواج موضعية التي يمكن استخدامها بتعميمات مناسبة لدراسة مفعول ترابطات Correlations الناقلية و ترابطات أنماط أخرى بديناميكيات الأيونات في التراكيب الخلالية Fe/Si. لقد تبين أن في التراكيز المنخفضة لذرات Fe المستبدلة بـ Si بداية في Si لا يوجد تغيرات جوهرية في  $T_c$  [16]. و هذا لا يعني أن ذرات Fe المحيطة الفعالة لحالات التكافؤ، و الثوابت النزواج المرنة لذرات موزعة لا تختلف عن خصائص ذرات Si متماثلة في الكتلة السيليكونية.

لاشك أن خصائص الناقلية في نصف الناقل في أو اثنتين من الحالات التناسقية الأقرب حول الذرات البديلة تتعطل إلى حد كبير و لم تعد هذه المناطق تشارك في الناقلية الكلية للبلورة. بما أن أيونات الحديد جزء من الشبكة الفرعية الموافقة لـ Si فإن ديناميكية الذرات الشائبة يجب أن تعكس التغيرات في ديناميكية هذه الشبكة الفرعية [21].

## 2- الدراسة النظرية

تعتبر مطيافية التجاوب غاما (مطيافية ميوسباور) هي تقنية مناسبة لدراسة اهتزازات الشبكة البلورية. إن المتحول الأكثر ارتباطاً للاهتزاز الشبكي هو معامل عدم ارتداد نواة ميوسباور (احتمالية مفعول ميوسباور) عند امتصاصها كوانت غاما  $f_a$  أو عندما تصدره  $f_s$ . ترتبط قيمة هذا المعامل بمتوسط مربع انزياح نواة ميوسباور في اتجاه اصدار كوانت  $\gamma$  أي ترتبط بـ  $\langle x^2 \rangle$  من خلال المعادلة (1) (في حالة الامتصاص).

$$\langle x^2 \rangle = -\frac{\lambda}{4\pi^2} \ln f_a$$

حيث  $\lambda$  طول موجة كوانت التجاوب  $\gamma$ . تبين أن تابعة احتمالية مفعول ميوسباور لدرجة الحرارة  $f_a(T)$  توافق سلوك شاذ [22, 23].

من بين الأنماط العادية لذرات Fe للشبكة الفرعية ذات الرتبة  $n$  (عدد طبيعي) الخالية لخلائط Fe/Si التي تعتبر هامة لدراسة ديناميكيات ذرات ميوسباور Fe التي تشغل مواقع Si هي تلك أنماط اهتزازات لا تناظرية  $\nu(a, \tau)$  و اهتزازات تشوه  $\nu(1, \sigma)$ . بالنسبة لهذه الأنماط تبقى العلاقات التالية بين إزاحات الذرات على طول المحاور الإحداثية بالشكل:

$$(x_{Fe_i}^n + x_{Fe_s}^n)m + M x_{Si}^n = 0$$

$$(y_{Fe_i}^n + y_{Fe_s}^n)m + M y_{Si}^n = 0 \quad (1)$$

$$(z_{Fe_i}^n + z_{Fe_s}^n)m + M z_{Si}^n = 0$$

حيث  $m$  - كتلة ذرة Fe ،  $M$  - كتلة ذرة Si و  $x$  و  $y$  و  $z$  إزاحات الذرات إن

الحسابات تقتصر على اهتزازات  $\nu(a, \tau)$  و  $\nu(1, \sigma)$  التي تعالج من المعادلات (1) بافتراض الآتي

$$\left( x_{Fe_i}^n = x_{Fe_s}^n \right) \Rightarrow x_{Si}^n = -\frac{2m}{M} x_{Fe_i}^n$$

$$\left( y_{Fe_i}^n = y_{Fe_s}^n \right) \Rightarrow y_{Si}^n = -\frac{2m}{M} y_{Fe_i}^n \quad (1a)$$

$$\left( z_{Fe_i}^n = z_{Fe_s}^n \right) \Rightarrow z_{Si}^n = -\frac{2m}{M} z_{Fe_i}^n$$

يمكن أن نكتب الهملتونيان بالشكل

$$\hat{H} = \hat{H}_{Lp} + \hat{H}_e + \hat{H}_{e-i} + \hat{H}_i$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{Lp} = & -W_1 \sum_{m,n,\sigma \neq \sigma} a_{m1\sigma}^+ \cdot a_{m2\sigma}^+ \cdot a_{n1\sigma} \cdot a_{n2\sigma} + \\ & + W_2 \sum_{m,n,l,\sigma} a_{ml\sigma}^+ \cdot a_{m1\sigma} \cdot a_{nl\sigma}^+ \cdot a_{nl\sigma} + M \sum_{m,l,\sigma} a_{ml\sigma}^+ \cdot a_{m1\sigma} \end{aligned}$$

$$\hat{H}_e = \sum_{m,n,l,\sigma} \epsilon_k c_{k\sigma}^+ \cdot c_{k\sigma} \quad (2)$$

$$\hat{H}_{e-i} = \sum_{k,m,l,\sigma} \lambda \cdot y_{m,l} \cdot \left( a_{ml\sigma}^+ \cdot c_{k\sigma} \cdot e^{ikR_{ml}} + a_{ml\sigma}^+ \cdot c_{k\sigma} \cdot e^{-ikR_{ml}} \right),$$

$$\hat{H}_i = \sum_n \left( \frac{p_{Fe_i}^n}{2m} + \frac{p_{Fe_s}^n}{2m} + \frac{p_{Si}^n}{2M} + \frac{k_1}{2M} \mu_0 Q_a^{n^2} + \frac{k_1}{4} Q_s^{n^2} + \frac{k_2}{2} \delta_n^2 \right).$$

$$Q_a^n = x_{Fe_i}^n - x_{Fe_s}^n \quad \text{حيث}$$

$$Q_s^n = x_{Fe_i}^n + x_{Fe_s}^n$$

$$\delta_n = y_{Fe_i}^n + y_{Fe_s}^n - 2 y_{Si}^n + z_{Fe_i}^n + z_{Fe_s}^n - 2 z_{Si}^n$$

$$\mu_0 = 2m + M$$

حيث  $m, l, \sigma$  أعداد كمومية

أيضاً  $k_1$  و  $k_2$  و  $k_3$  هم ثوابت المرنة لحالات الإزاحات الموافقة . إن المقدار  $\hat{H}_{Lp}$  يصف حركة الأزواج المحلية في التراكيب الخلالية Si-Fe في الناقلية من أجل  $T_c$  [19] ، و يمثل المؤثر  $\hat{H}_e$  حزمة الإلكترونات و  $\hat{H}_i$  يحدد الاهتزازات المحلية للأيونات في التراكيب الخلالية لخلائط Fe/Si، و يصف المؤثر  $\hat{H}_{e-i}$  التأثير المتبادل إلكترون-أيون. يشير الدليلان  $n$  و  $m$  في المؤثر  $\hat{H}_{Lp}$  إلى الحديد و السليكون المتجاورين في التركيب الخلالى Si-Fe في الخليطة Fe/Si. يحدد الدليل  $l$ ، الذي يأخذ القيم 1 و 2 ذرات الحديد ضمن التركيب الخلالى الواحد. و يمثل المؤثران  $a_{ml\sigma}^+$  و  $a_{ml\sigma}$  مؤثرا الحقل لثقوب pz في ذرة حديد ذي الرتبة  $l$  من التركيب الخلالى ذي الرتبة  $m$ . و المقداران  $c_{k\sigma}^+$  و  $c_{k\sigma}$  هما مؤثرا الحقل لحزمة إلكترونات بطاقة  $\epsilon_k$ . و  $2\mu$  هي طاقة الزوج الموضعي ، المحسوبة من سوية فرمي. المقدار  $\lambda$  هو متحول اقتران إلكترون-فونون و  $R_{m,l}$  متجه نصف قطر ذرة Fe ذي الرتبة  $l$  من التركيب الخلالى ذي الرتبة  $m$  و المقداران  $p_{Si}^n$  و  $p_{Fe}^n$  هما اندفاعا أيونات Si و Fe على التوالي. أيضاً لدينا  $W_1$  و  $W_2$  عناصر المصفوفة التي تحدد الناقلية و التأثير المتبادل الكولوني لتركيب خلالى على التوالي.

بعد إدخال قيم التوقعات لأرقام الإسكان  $n(il\sigma)$  لحالات الثقب الموضوعي و متحول ترتيب الناقلية  $W_1 \sum_m a_{ml\sigma}$  ، عندها يمكن كتابة مجموعة المعادلات بالنسبة لتتابع غرين Green' s functions في فضاء الاندفاع:

$$\left( \omega + \mu + W_2 \sum_s n_{sl\sigma} \right) \cdot P_{ilk\sigma}(\omega) = \lambda(y_{il} + z_{il}) \sum e^{ik'R_{il}} c_{k'k\sigma}(\omega) + W_1 \sum_s a_{n p\sigma} L_{ilk\sigma}(\omega) \quad ,$$

$$\left( \omega - \mu - W_2 \sum_s n_{sl\sigma} \right) L_{ilk\sigma}(\omega) = -W_1 \sum_s a_{n p\sigma}^* \cdot P_{ilk\sigma}(\omega) \quad ,$$

$$(\omega - \epsilon_{k'}) c_{k'k\sigma}(\omega) = -\delta_{kk'} + \sum_{ml} \lambda(y_{ml} + z_{ml}) e^{-ik'R_{ml}} \cdot P_{mlk\sigma}(\omega) \quad ,$$

$$\left( \omega - \mu - W_2 \sum_s n_{sl\sigma} \right) \cdot G_{il\sigma}(\omega) = 1 + W_1 \sum_s a_{nl\sigma} F_{nl\sigma}^+(\omega) - \lambda(y_{il} + z_{il}) \sum e^{ik'R_{il}} P_{ilk\sigma}(\omega) \quad ,$$

(3)

$$\left( \omega + \mu + W_2 \sum_s n_{sl\sigma} \right) \cdot F_{lk\sigma}^+(\omega) = W_1 \sum_s a_{nl\sigma}^* G_{il\sigma}(\omega) + \lambda(y_{ip} + z_{ip}) \sum_k e^{ik'R_{ip}} L_{ikl\sigma}(\omega) \quad ,$$

بحل المعادلات (3) ، نجد معادلات مقترنة لأجل قيم التوقعات  $n_{il\sigma} = n$  و  $a_{il\sigma} = a$  و  $E = E(\lambda^2(y_{il}^2 + z_{il}^2) = \lambda^2(y^2 + z^2))$  . وينتج من هذه القيم أن تحول الناقلية (أو حل المعادلات (3) في الحالة  $a \neq 0$ ) ممكناً فقط إذا:

$$-(W_1 + W_2)q < \mu < W_1q \quad (4)$$

حيث  $q$  هو عدد التراكيب الخلالية المجاورة الأقرب. بإدخال الشرط و عندما  $T = 0$  يمكن الحصول على  $T_c$  و متحول الترتيب  $\Delta = W_1q a$  بالعلاقتين الآتيتين :

$$T_c = \frac{W_1|W_2q + 2\mu|}{(2W_1 + W_2) \ln \frac{(2W_1 + W_2)q + |W_2q + 2\mu|}{(2W_1 + W_2)q - |W_2q - 2\mu|}}$$

$$\Delta(T = 0) = \Delta_0 = W_1q \left( 1 - \left( \frac{W_2q + 2\mu}{(2W_1 + W_2)q} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (5)$$

عموماً إن الكمية  $2\Delta_0 / T_c$  ليست معياراً لتحديد ما إذا كانت الناقلية عند درجة حرارة كيوري  $T_c$  عالية هي تقريباً نفس الآلية الكلاسيكية. لإيجاد متوسط الانحرافات المربعة لذرات ميوسباور عند درجات حرارة قريبة من درجة حرارة التحول كيوري  $T_c$  ، نستخدم تقريب درجة الحرارة المرتفعة :

$$\langle y_{M_0^*}^2 \rangle = \frac{k_b T}{k_2 (1 + M^* / 2m)}$$

$$\frac{\langle y_{M^*}^2 \rangle}{\langle y_{M_0}^2 \rangle} = \frac{V(1)}{V_{eff}(1)} \quad (6)$$

حيث  $V_{eff}$  هي الطاقة الكامنة الفعالة و  $V$  - الطاقة الكامنة الكلاسيكية . يمكن إيجاد القيم المتوقعة  $\langle y_{M^*}^2 \rangle$  و  $\langle y_{M_0}^2 \rangle$  مع و بدون السماح لتبادل التأثير إلكترون - أيون على التوالي .  $M^*$  هي كتلة ذرة ميوسباور Fe- . باستخدام التقريب (6) نحصل على الاحتمال النسبي لمفعول ميوسباور وفق العلاقة التالية  $W/W_0 = f/f_0$  ومنه نجد:

$$\ln \frac{W}{W_0} = A \frac{T}{T_c} \left( 1 - \frac{V(1)}{V_{eff}(1)} \right) \quad (7)$$

$$A = \frac{k_b T_c}{k_2 (1 + M^*/2m)^2 \lambda^2}$$

حيث  $\lambda$  هي طول الموجة المنخفضة لإشعاع  $\gamma$  .

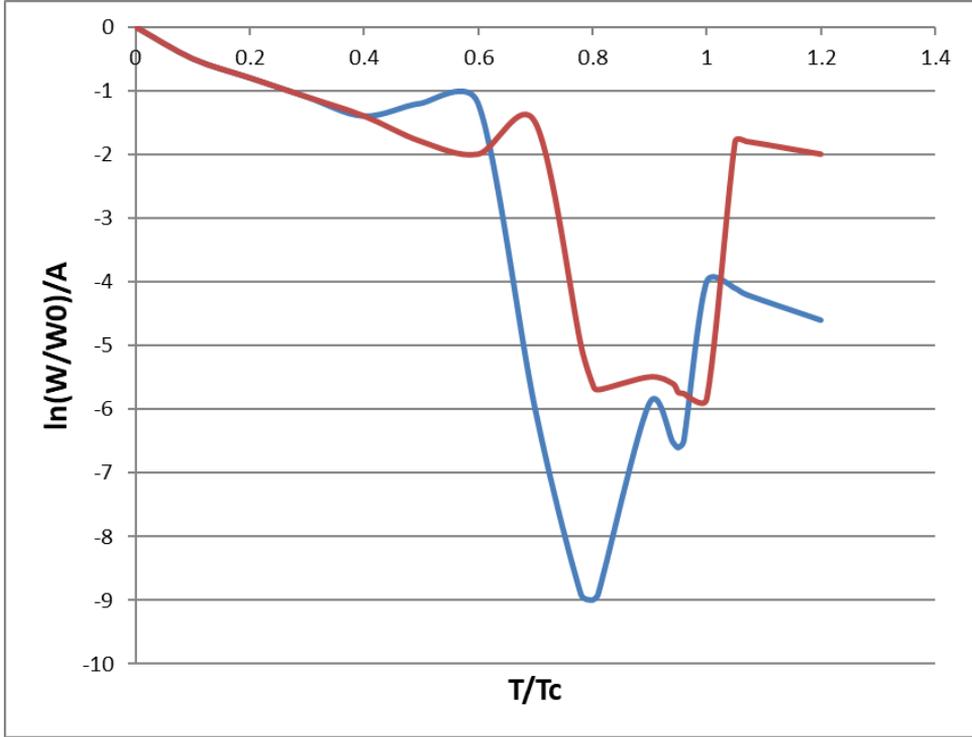
### التمثيل البياني

يوضح الشكل (1) التمثيل البياني للاحتمالية النسبية لمفعول ميوسباور  $\ln(W/W_0)$  كتابع للتحويل النسبي لدرجة الحرارة  $(T/T_c)$  لهذه الحالة حالة منظومة ثلاثية الأبعاد لإلكترونات s ، لأجل قيم المتحولات التالية  $C=10$  ،  $g=0.5$  ،  $d=3$  ،  $h=-1.4$  ،

تطبيقات مفعول ميوسباور لدراسة ديناميكية الشبكات الفرعية لخلانط Si/Fe

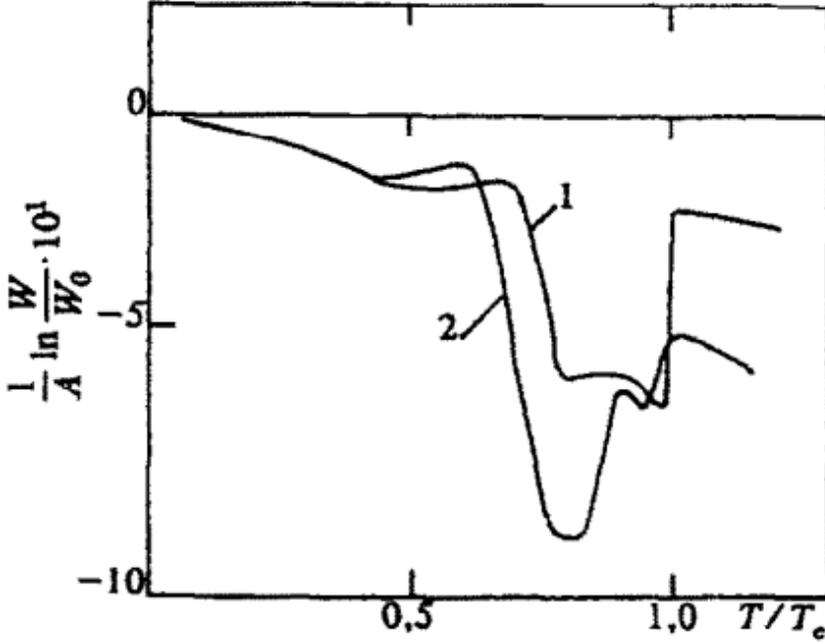
الجدول (1). ،  $f = 0.1$  (1)  $p = \pi/2$  و (2)  $p = \pi/4$  و ذلك وفق البيانات الممثلة في

	$\ln(W/W_0)/A$	$\ln(W/W_0)/A$	$T/T_c2$
	0	0	0
	-0.5	-0.5	0.1
	-0.8	-0.8	0.2
	-1.1	-1.1	0.3
	-1.4	-1.4	0.4
	-1.8	-1.2	0.5
	-2	-1.2	0.6
	-1.5	-6	0.7
	-5	-8.9	0.78
	-5.6	-8.99	0.8
	-5.7	-8.9	0.81
	-5.5	-5.9	0.9
	-5.6	-6.5	0.94
	-5.74	-6.6	0.95
	-5.76	-6.5	0.96
	-5.85	-4	1
	-1.8	-4.1	1.05
	-1.8	-4.2	1.07
	-2	-4.6	1.2



الشكل (1) التمثيل البياني للاحتمالية النسبية لمفعول ميوسباور  $\ln(W/W_0)$  كتابع للتحويل النسبي لدرجة الحرارة  $(T/T_c)$  لهذه الحالة حالة منظومة ثلاثية الأبعاد لإلكترونات  $s$  ، لأجل قيم المتحولات التالية  $C = 10$  ،  $g = 0.5$  ،  $d = 3$  ،  $h = -1.4$  ،  $f = 0.1$  ،  
 (1)  $p = \pi/2$  و (2)  $p = \pi/4$

يظهر أن التمثيل البياني في الشكل (1) للعلاقة (7) التي توافق النتيجة النظرية لحل المعادلات و ذلك اعتماداً على البيانات المبينة في الجدول (1). يظهر أن التمثيل البياني في الشكل (1) يتوافق مع التمثيل البياني التجريبي في الشكل (2) [14,15].



شكل (2) : تبعية الاحتمالية النسبية لمفعول ميوسباور  $\ln(W/W_0)$  للتحويل النسبي لدرجة الحرارة  $(T/T_c)$  لحالة منظومة ثلاثية الأبعاد لإلكترونات s ، لأجل قيم المتحولات التالية  
 $p = \pi/2$  (1) ،  $f = 0.1$  ،  $h = -1.4$  ،  $d = 3$  ،  $g = 0.5$  ،  $C = 10$   
 $p = \pi/4$  (2)

### الاستنتاجات

1- تشير تقديرات التحويل في احتمالية مفعول ميوسباور المبينة بالمعادلة (7) إلى أنه

a - من الممكن من حيث المبدأ الحصول على معلومات عن التغيرات في ديناميكية الاهتزازات الموضوعية للأيونات من أطيف ميوسباور b - و تشير أيضاً إلى الانخفاض في  $(W/W_0)$  بالقرب من  $T_c$  في مرحلة الناقلية الموجودة في هذه العلاقات و هذا يتفق مع النتائج التجريبية [14-16].

2- ليس فقط لأزواج الثقوب المحلية و لكن أيضاً للحزمة الإلكترونية تأثير كبير على ديناميكية المنظومة الأيونية الفرعية .

3- في الشكل 1 تم العثور لهذه المنظومة الفرعية الثلاثية الأبعاد من أجل قيم مختلفة للمتحول  $p = p_F R_{12}$  و أيضاً من أجل القيم التي تعتمد على d.

**Mossbauer effect Applications to the investigation of sub -  
lattice dynamics of Si/Fe . alloys**

**Dr.. Mustafa Dilo**

## References

- 1-A. Istratov , T. Buonessisi, M. Piokett, M. Hene, and E. Weber, Materials Science and Engineering ; B134, 252 (2006)
- 2-H. Gunnlaugsson, G. Weyer, N. Christensen, M. Dietrich, M. Fanciulli , K. Bharuth –Ram , R. Sielemann ,A. Svane, and ISOLDE Collaboration , Physica B; Condensed Matter 340-342 , 532 (2008)
- 3-Y. Yoshida, Y. Kobayashi , K. Yukihiro, A. Yoshida, H. Uene , F. Shimura, and F. Ambe , Physica B; Condensed Matter 376-377 , 69 (2006) .
- 4-D. Macdonald , T. Roth , P.N.K .Deenapanary , K. Bothe , P. Pohl, and J. Schmidt , Journal of applied Physics 98 083509 (2005)
- 5-D. Gilles , W. Schroder , and W. Bergholz , Phys. Rev.B 41, 5770 (1990)
- 6- Y. Yoshida, S. Ogawa, and K. Arikawa , Physica B ; Condensed Matter 340-342 , 605 (2008)
- 7-S. K. Esteicher ,M. Sanati , and N. Gonzalez Sewacki, Phys. Rev.B 77, 125214 (2008)
- 8- Y. Yoshida ,Y. Suzuki, A. Matsushita , K. . Suzuki , and K . Sakata , Physica B ; Condensed Matter 401-402 , 167 (2007)
- 9-D. J. Silva, U. Wahl, J. G. Correia, and J . P. Aranjó; Journal of applied Physics114 , 103503 (2013)
- 10-H. P. Gunnlaugsson, G. Weyer, M. Dietrich , ISOLDE collaboration , M . Fanciulh, K. Bharuth-Ram, and R. Sielemann, applied Physics Letter 80, 2677(2002).

- 11-E. Weberand H. G. Riotte ; Journal of applied Physics 51, 1484 (1980)
- 12 - J. Mustre de Leon et al., Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 1675
- 13 - R.P. Sharma et al., Phys. Rev. Lett. 62 (1989) 2869.
- 14 - A.V. Dubovitskii et al., Superconductivity 3(6), Part 1 (1990) p. 1030.
- 15 - V.A. Andrianov et al., JETP Lett. 49 (1989) 95.
- 16 - T. Nishida et al., Physica B165&166 (1991) 1327
- 17 - C.C. Yu and P.W. Anderson, Phys. Rev. B29 (1984) 6165.
- 18 - V.Yu. Irkhin, M.I. Katsnel'son, and A.V. Trefilov, JETP Lett. 53 (1991) 255.
- 19 - Yu.A. Izyumov and M.I. Katsnet'son, Fiz. Met. Metalloved. 66 (1988) 1083.
- 20- A.G. Pedan and I.O. Kulik, Fiz. Nizk. Temp. 15 (1989) 367.
- 21 -Yu. Kagan, in: The Mossbauer Effect (Introductory Article) (MOSCOW, 1962)
- 22 - A.B. Dubovitzky, N.V. Kireev, N.D. Kush, E.F. Makarov, A.T. Mailibaev, R.A. Stukan, I.D. Datt, R.P. Ozerov, Supercond. Phys. Chem. Technol. 3 1990 1092. Ž .
- 23 - V.M. Cherepanov, M.A. Chuev, S.S. Yakimov, V.Y. Goncharov, Physica B 163 1990 441. Ž .



# دراسة الإرجاع الكهركيميائي للأسبرين على مسرى الكربون الزجاجي

طالبة ماجستير :مروه النَّاصر قسم الكيمياء- كلية العلوم -جامعة البعث

إشراف الأستاذ الدكتور: ديب باكير ومشاركة الدكتورة: ريم ظليمات

## ملخص البحث

تمّ في هذا العمل دراسة الإرجاع الكهركيميائي للأسبرين في الأوساط المعتدلة والحمضية والقلوية حيث استُعملت محاليل من كلوريد البوتاسيوم بتركيز (0.1M)، حمض كلور الماء بتركيز (0.1M)، وأيضاً ماءات الصوديوم بتركيز (0.1M)، ككهليليات داعمة على مسرى الكربون الزجاجي معتمدين الطريقة الفولتومترية الحلقية وقد أظهرت الدراسة وجود قمة كاتودية وحيدة عند الإرجاع في الوسط المعتدل متضمنة نقل إلكترونين، ناتجة عن إرجاع زمرة الحمض الكربوكسيلي إلى زمرة ألدهيد. وقد تم تحديد الحركية التي يخضع لها تفاعل الإرجاع كما درس تأثير تغير التركيز على عملية الإرجاع .

الكلمات المفتاحية: أسبرين، مسرى الكربون الزجاجي، الطريقة الفولتومترية الحلقية.

## **A study of the electrochemical reduction of Aspirin at glassy carbon Electrode**

### **Abstract:**

In this work, the electrochemical reduction of Aspirin was studied in moderate, acid and alkaline media, where solutions of potassium chloride, hydrochloric acid and sodium hydroxide with a concentration of (0.1 M) were used as supporting electrolytes at the glassy carbon electrode by using the cyclic voltammetry method ,where the study showed a single cathodic wave at reduction in the moderate medium including two electrons resulting from the reduction of the carboxylic acid group to the aldehyde group, The kinetics to which the reduction reaction is subject are determined, The effect of changing Concentration on the reduction process was studied.

### **Key Words:**

## Aspirin, Glassy carbon electrode, Cyclic voltammetry method.

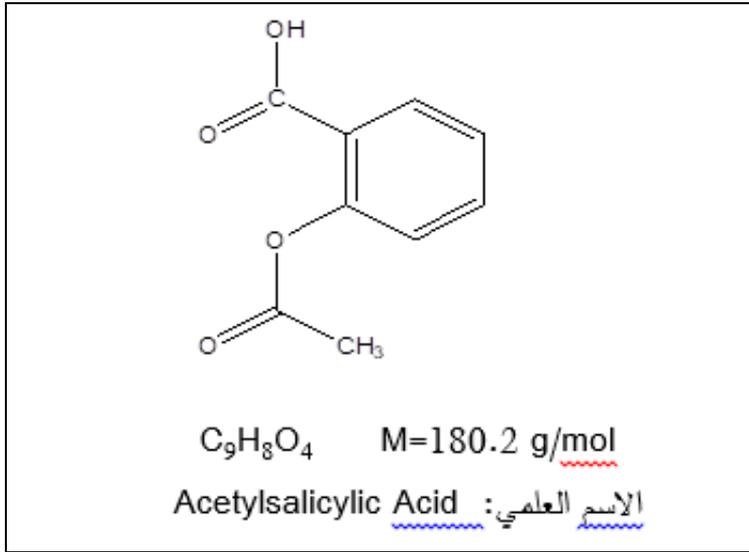
### مقدمة:

اكتسب التحليل الكهروكيميائي في الآونة الأخيرة أهمية كبيرة في مجال التحليل الدوائي، وهناك العديد من الأسباب التي جعلته يحتل المركز الأول، فهو يجمع حساسية كبيرة وحد كشف ممتاز، وتعتبر طرائق التحليل الكهروكيميائي نموذجية وسهلة كما أن إمكانية التحليل الدوائي بها أصبحت مطروقة بشكل واسع، كما أنها بسيطة التطبيق وذات انتقائية عالية حيث تهتم التقنيات الكهروكيميائية بالتفاعل الحاصل نتيجة لشروط كهربائية وكيميائية محددة، وعلى وجه التحديد، فهي تهتم بقياس مقادير كهربائية مثل التيار أو الكمون وعلاقتها بمقادير كيميائية، واستخدمت هذه القياسات في المجالات التحليلية ولاقت العديد من التطبيقات مثل التطبيقات البيئية والصناعية والدوائية. ومن أهم هذه الطرائق طريقة التحليل الفولتومتريّة الحلقية [1][2].

يعتبر التحليل الفولتومتري الحلقي من أكثر التقنيات المستخدمة في التحليل النوعي والتي تعطي معلومات عن التفاعلات الكهروكيميائية الحاصلة في الخلية، تعود أهمية هذا التحليل إلى قدرته على إعطاء معلومات هامة حول الحركات الحرارية للعملية المسروبة والحركات المختلفة للانتقالات الالكترونية أثناء التفاعل، وفي دراسة تفاعلات الأكسدة والإرجاع والكشف عن التفاعلات البيئية كما تعتبر مفيدة في دراسة مدى عكوسية التفاعلات الحاصلة عند سطح المسرى، حيث يسمح الكمون في هذه التقنية باتجاه واحد بعدها يسمح بالاتجاه الآخر ويمكن أن تستخدم حلقة كاملة أو جزئية أو عدة حلقات [3][4]. وبما أن الطرائق الفولتومتريّة تعتمد على إرجاع أو أكسدة المجموعات الفعالة كهروكيميائياً، فقد لاقت المركبات العضوية الدوائية الحاوية على زمر كربوكسيلية اهتماماً كبيراً لدراستها بهذه الطرائق ومن هذه المركبات حمض أسيتيل الساليسيليك

(ASA) المعروف باسم الأسبرين والذي يستخدم عادة كمسكن للألم، وخافض حرارة، مضاد التهاب غير ستيرويدي وعامل مضاد للصفائح، وعلاوة على ذلك يستخدم في نطاق واسع للوقاية من سرطان الكولون[5]، أمراض القلب والأوعية الدموية والنوبات القلبية والسكتة الدماغية [6]، ومرض الزهايمر[7].

وفي ما يلي الاسم العلمي والصيغة المنشورة:



ونظراً لأهمية هذا الدواء وفعاليته ظهرت العديد من الأعمال المكرسة لتحديده في العديد من المستحضرات الصيدلانية عن طريق دراسة سلوكه الكهركيميائي :

- ❖ تم دراسة السلوك الكهروكيميائي للأسبرين باستخدام قطب الكربون الزجاجي المعدل الجرافين باستخدام تقنيات الفولتومتريّة النبضية الدورية والتفاضلية في أوساط كهليليتية مختلفة (10-3) حيث ظهرت ثلاث قمم أنودية وقمتان كاتوديتان [8].
- ❖ حدد الأسبرين بطريقة التحليل الفولتومتريّة على مسرى من أوكسيد الرصاص المعدل بالنيكل Ni-PbO<sub>2</sub> بنسبة 1% بمعدل سرعة مسح 10 mv/s حيث تم الحصول

على موجة أنودية عند كمون  $v$  1.34 وأخرى كاتودية عند كمون  $v$  0.93 في محلول 0.1M من كبريتات الصوديوم.[9].

❖ تم اصطناع مسرى من bAuNPs/GCE ودراسة السلوك الكهركيميائي للأسبرين باستخدام الطريقة الفولتومتريّة الحلقية (CV) في محلول موقى فوسفاتي حيث ظهرت قمة كاتودية عند كمون  $V$  1.05 [10].

❖ كما دُرست الاستجابة الكهروكيميائية للأسبرين على مسرى من الكربون الزجاجي المعدل بأوكسيد النحاس CuO بمعدل مسح  $50\text{mv/s}$  وذلك باستخدام الطريقة الفولتومتريّة الحلقية (CV) في وسط من ماءات الصوديوم المشبع بالنيكل حيث ظهرت موجة كاتودية [11].

#### الهدف من البحث:

1. دراسة الإرجاع الكهركيميائي للأسبرين في الوسط المعتدل باستخدام الطرائق الكهركيميائية والتي تعتبر من أهم الطرائق التحليلية وذلك بسبب كلفتها لمنخفضة وسهولة استخدامها إضافةً إلى بساطتها.
2. تحديد الحركية التي يخضع لها التفاعل الكهركيميائي.
3. تعيين أحد البارامترات الحركية (معامل النقل).
4. دراسة تأثير تغير التركيز على عملية الإرجاع الكهركيميائي.
5. التأكد من صحة الطريقة على المستحضرات الدوائية الحاوية على مادة الأسبرين.

#### مواد وطرائق البحث:

1. الأسبرين بنقاوة 99%.
2. ميثانول كمحل بدرجة تحليلية عالية النقاوة.
3. الكهروليونات المستخدمة:

- (HCl) تركيزه الوزني 37% (Merck)
- (NaOH) 99% (Merck)
- (KCl) 99% (Merck)

استخدم في هذا العمل جهاز (433) AMEL من إنتاج شركة AMEL Instruments الإيطالية يعمل على مسرى الزئبق، بالإضافة إلى مجموعة من المساري الخارجية الصلبة مثل الذهب والبلاتين والكربون الزجاجي ومسرى فضة / كلوريد الفضة كمسرى مقارن، ويمكن استخدام العديد من التطبيقات (Voltammetry, Polarography, Stripping) حيث يمكننا من رسم العديد من المنحنيات البولاروغرافية أهمها: النبضية العادية (NPP)، والنبضية التفاضلية (DPP) والمنحنيات الفولتومتريّة الحلقية (Cyclic voltammetry)، كما يمكن إجراء التحليل عند كمون ثابت أو تيار ثابت، أو تغير الكمون بالسرعة المطلوبة وتسجيل التيار المقابل بجملة احداثيات (تيار- كمون)، ومن خلال نظام العمل يمكن تحديد البارامترات المختلفة مثل كمون بداية ونهاية المنحني الفولتومتري ومعدل المسح وزمن القرقرة.

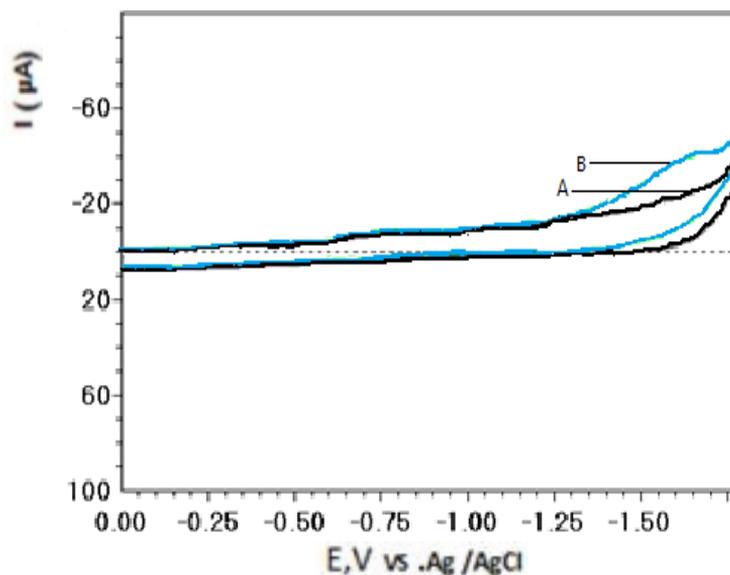
### النتائج والمناقشة:

#### أولاً: دراسة الإرجاع الكهروكيميائي للأسبرين في الوسط المعتدل:

#### طريقة العمل:

1- تمّ تحضير محلول بحجم (25 ml) من من كلوريد البوتاسيوم بتركيز (0.1M) ككهليلت داعم حيث تمّ الحجم باستخدام ماء ثنائي التقطير وبعد التخلص من الأوكسجين المنحل بقرقرة المحلول بغاز الأزوت النقي لمدة 20 دقيقة، أُجريت عملية المسح الكهروكيميائي بالطريقة الفولتومتريّة الحلقية وذلك على مسرى الكربون الزجاجي فحصلنا على المنحني (A) الموضح في الشكل (1).

2- قمنا بتحضير محلول بحجم 25ml من كلوريد البوتاسيوم بتركيز (0.1M) ككهرليت داعم ويحتوي على الأسبرين بتركيز (0.0011)، حيث تُمَّ الحجم باستخدام ماء ثنائي التقطير وبعد التخلص من الأوكسجين المنحل بقرقرة المحلول بغاز الأزوت النقي لمدة 20 دقيقة، أُجريت عملية المسح الكهركيميائي وذلك على مسرى الكربون الزجاجي بوجود (Ag /AgCl) كمسرى مقارن، بالاعتماد على الطريقة الفولتومترية الحلقية حيث تم تحديد البارامترات التالية: كمون بداية الإرجاع (0.0 mv)، كمون نهاية الإرجاع (-1800 mv)، بمعدل مسح (50 mV/s) كما مبين في المنحني (A) الموضح في الشكل (1):



الشكل 1: المنحنيات الفولتومترية الحلقية على مسرى الكربون الزجاجي (معدل مسح 50mv/s)

(A): المنحني البياني للكهرليت KCl بتركيز (0.1M)

(B): المنحني البياني لمادة الأسبرين بتركيز ( $1.1 \cdot 10^{-3}$  M) بوجود KCl بتركيز (0.1M)

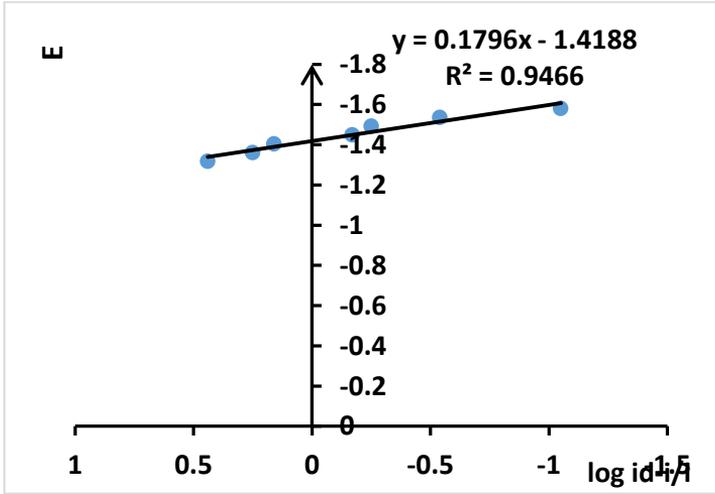
يبين المنحني (B) في الشكل (1) ظهور موجة كاتودية واضحة غير عكوسة عند المسح باتجاه الكمونات الأكثر سلبية حيث بدأ تيار هذه الموجة بالارتفاع تدريجياً حتى ظهر التيار الحدي بينما لم يُلاحظ ظهور أي عملية أكسدة معاكسة. وقد تم حساب عدد الإلكترونات المشاركة في هذا التفاعل من خلال استخدام معادلة الموجة الفولتومترية لتحديد العدد الإجمالي للإلكترونات المنتقلة خلال العملية المسروية قمنا بنفس الطريقة الموصوفة في العمل [12].

وذلك باستخدام العلاقة التالية:

$$E = E_{1/2} + \frac{0.059}{\alpha n} \log \frac{id-i}{i}$$

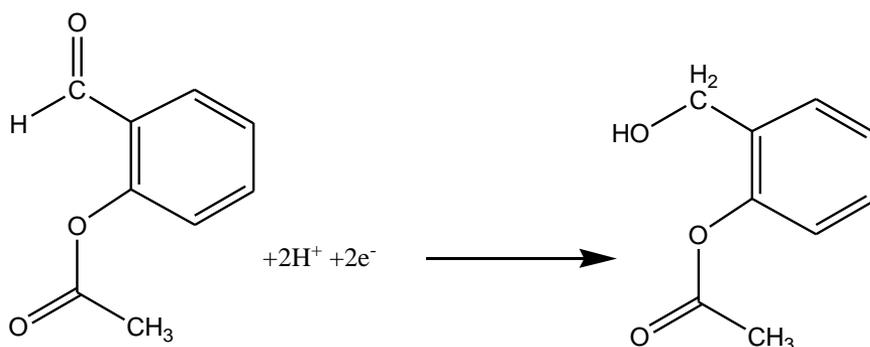
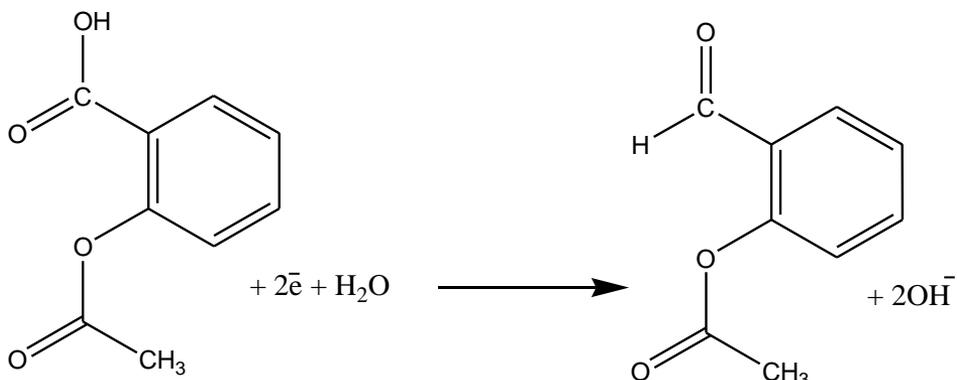
حيث تمثل E قيم الكمونات المطبقة،  $E_{1/2}$  كمون نصف الموجة، i قيم التيار المقابلة لكل قيمة من قيم الكمون المطبقة، id يمثل التيار الحدي، n عدد الإلكترونات المتبادلة أثناء جريان العملية المسروية المولدة للموجة البولاروغرافية،  $\alpha$  معامل النقل.

عند رسم تغير الكمون (E) بدلالة  $(\log \frac{id-i}{i})$  تم الحصول على خط مستقيم كما هو موضح في الشكل (2) ميله  $(\frac{0.059}{\alpha n})$ ، حيث تم إيجاد قيمة معامل النقل  $(\alpha=0.07)$  ومنه عدد الإلكترونات  $n=4$ .



الشكل 2: يمثل تغير الكمون E(v) بدلالة  $\log(id - i/i)$

وبذلك يكون المشتق الغولي النهائي لعملية ارجاع الزمرة الكربوكسيلية وفق المعادلة:



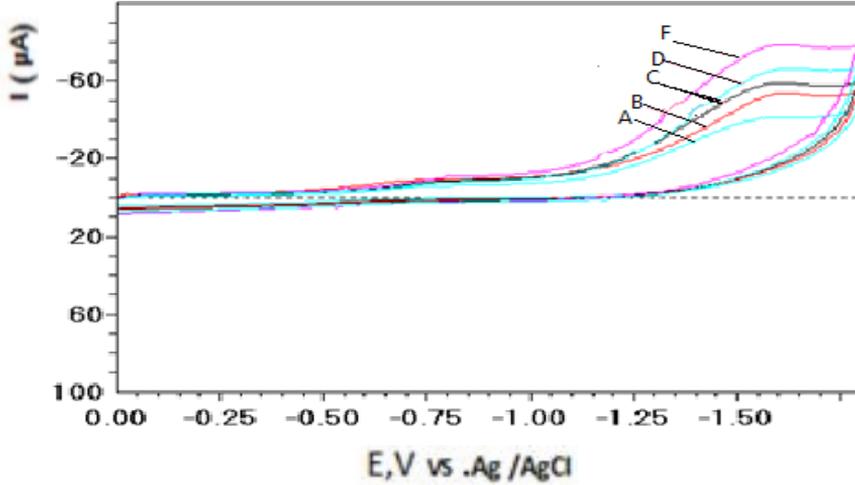
### 1-1- تأثير معدل المسح على الإرجاع الكهروكيميائي للأسبرين في الوسط المعتدل:

لتحديد الحركة التي يخضع لها تفاعل الارجاع الكهروكيميائي تتم دراسة تأثير معدل سرعة المسح على عملية الارجاع الكهروكيميائي للأسبرين بوجود كلوريد البوتاسيوم (0.1M) باستخدام الطريقة الفولتومترية الحلقية وطُبقت من أجل ذلك معدلات مسح مختلفة:

(30 mv/s, 40 mv/s, 50mv/s, 70 mv/s, 80 mv/s, 100 mv/s) حيث تم

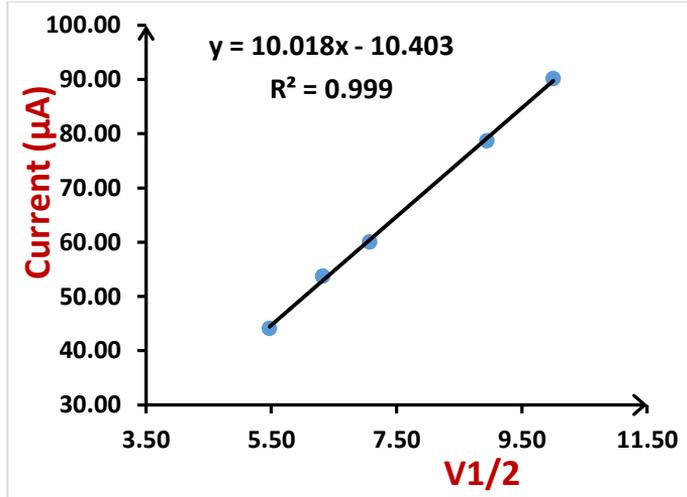
تحديد المتغيرات التالية: كمون بداية الارجاع (0.0mv)، كمون نهاية الارجاع

(-1800 mv)، وقد تم التخلص من الأوكسجين المنحل بقرقرة المحلول بغاز الأزوت النقي لمدة 20 دقيقة، وتم الحصول على المنحنيات الفولتومترية الموضحة في الشكل (3):



الشكل 3: المنحنيات الفولتومترية الحلقية لتأثير معدلات مسح مختلفة على الإرجاع الكهروكيميائي للأسبرين ( $5.3 \times 10^{-3}$  M) في وسط معتدل KCl (0.1M) على مسرى الكربون الزجاجي (A)30, (B)40, (C)50, (D)70, (F)80 mv/s

يبين الشكل ظهور موجة كاثودية واضحة غير عكوسة عند جميع معدلات المسح المطبقة، وقد لوحظ ارتفاع القيم للتيار مع زيادة معدلات المسح المطبقة، ولتوضيح طبيعة العلاقة بين تغير القيم الحدية للتيار مع معدلات المسح تم رسم منحنى بين  $I_p$  والجذر التربيعي لمعدلات المسح المختارة كما هو مبين في الشكل (4) :

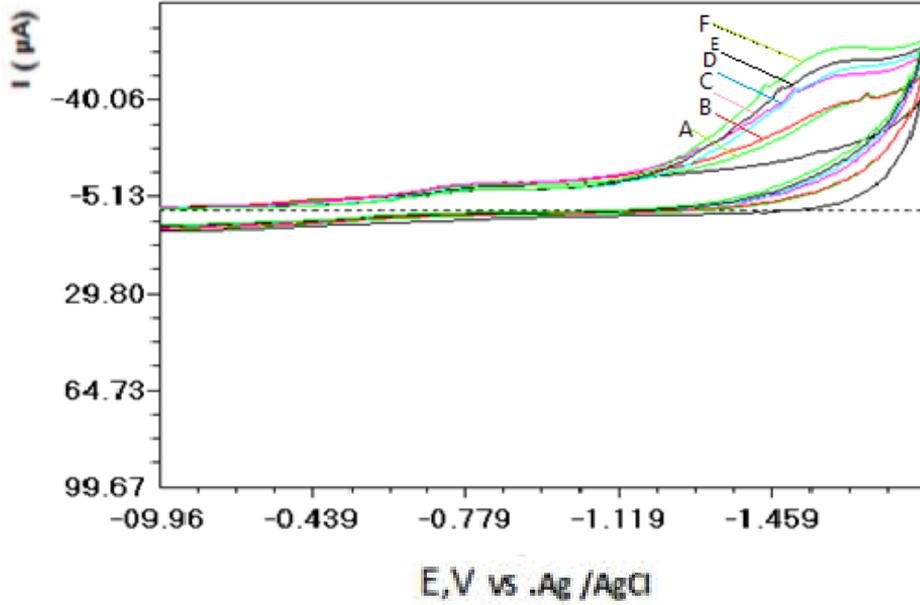


الشكل 4 : تابعة القيم الحديدية للتيار إلى الجذر التربيعي لمعدلات المسح المطبقة عند ارجاع الأسبرين بتركيز  $(53 \times 10^{-3} \text{ M})$  في وسط معتدل  $\text{KCl}$   $(0.1\text{M})$  باستخدام الطريقة الفولتومترية الحلقية على مسرى الكربون الزجاجي

يبين الشكل(4) أن تغيرات القيم الحديدية للتيار بدلالة الجذر التربيعي لمعدلات المسح هي علاقة خطية، مما يعني أن عملية ارجاع الزمرة الكربوكسيلية في مركب الأسبرين تخضع للحركية الانتشارية.

2-1- دراسة تأثير تغير التركيز على الإرجاع الكهروكيميائي للأسبرين في الوسط المعتدل:

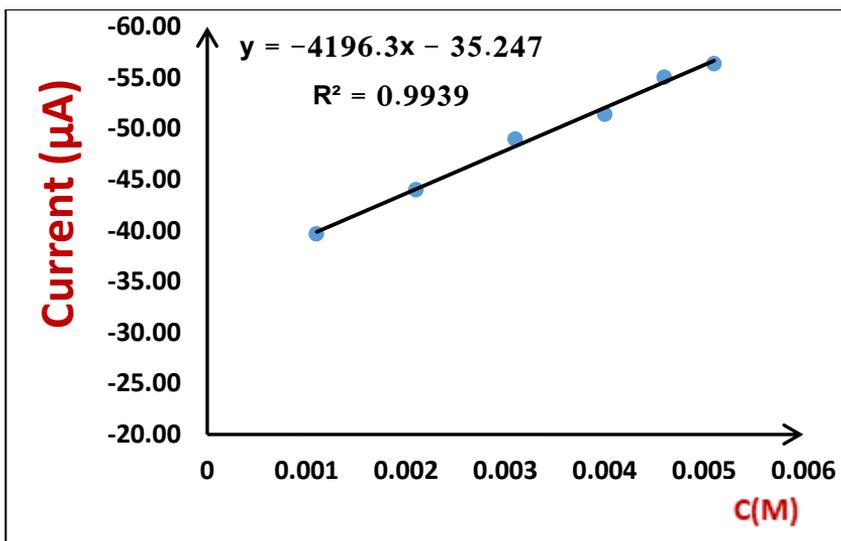
كما تم دراسة تأثير تغير التركيز على عملية الارجاع في الوسط المعتدل وذلك على مسرى الغرافيت الزجاجي بالطريقة الفولتومترية الحلقية، حيث تم تحضير سلسلة عيارية من تراكيز مختلفة للأسبرين تتراوح بين:  $(5.3 \times 10^{-3} \text{ M}$   $1.1 \times 10^{-3} \text{ M})$  وقد تم الحصول على المنحنيات الموضحة في الشكل (5):



الشكل 5 : المنحنيات الفولتومترية الحلقية لتركيزات مختلفة

(A=1.1\*10<sup>-3</sup>, B=4.1\*10<sup>-3</sup>, C=3.3\*10<sup>-3</sup>, D=4.1\*10<sup>-3</sup>, E=4.8\*10<sup>-3</sup>, F=5.3\*10<sup>-3</sup>) من الأسبرين في وسط معتدل KCl (0.1 M) على مسرى الكربون الزجاجي بمعدل سرعة مسح (50 mv/s)

نلاحظ من الشكل (5) زيادة القيم الحدية للتيار مع زيادة التركيز، ولتحديد تابعة القيم الحدية للتيار إلى التركيز، قمنا برسم العلاقة بين تغير التركيز وقيم التيار الموافقة كما هو مبين في المخطط الشكل (6):



الشكل 6: تابعة القيم الحديدية لتيار إلى تراكيز مختلفة من الأسبرين في وسط معتدل من KCl (0.1 M) بالطريقة الفولتومترية الحلقية على مسرى الكربون الزجاجي

يوضح الشكل السابق أن تابعة القيم الحديدية للتيار والتركيز خطية ضمن المجال المذكور، وبمعامل ارتباط ( $R^2=9939$ ).

### 3-1- دراسة محتوى مادة الأسبرين في المستحضرات الصيدلانية:

تم وزن عشر مضغوطات من مستحضر aspirin 81 ثم قمنا بطحن هذه المضغوطات وأخذ وزنة لا على التعيين في محلول من KCl(0.1M) فكانت النسبة 92%.

كما تم تحديد نسبة محتوى مادة الأسبرين في المضغوطة بطريقة أخرى اعتمدنا فيها على القانون التالي:

$$\frac{I_p(\text{sample})}{I_p(\text{st})} \times \frac{C(\text{sample})}{C(\text{st})} \times 100$$

حيث :

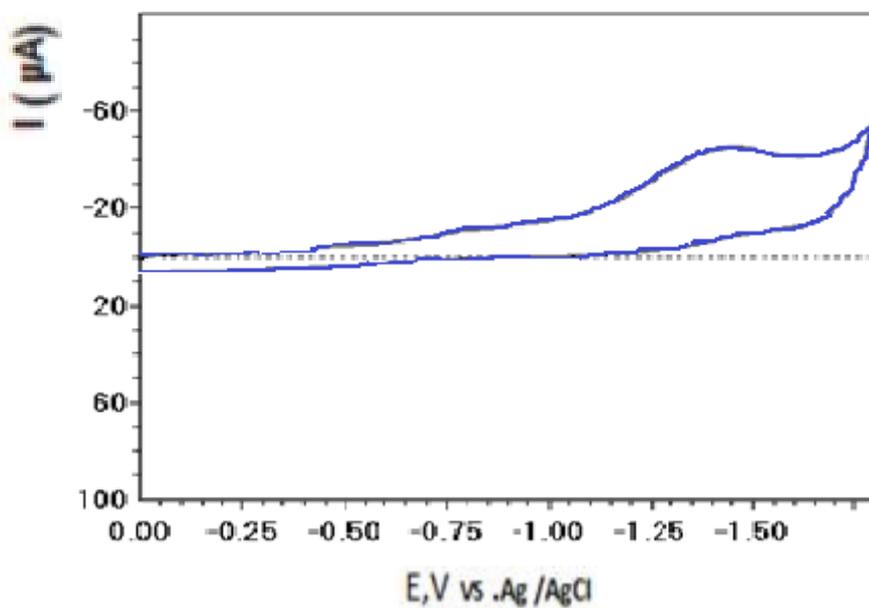
$I_{p(\text{sample})}$ : شدة التيار للعينة.

$I_{p(\text{st})}$ : شدة التيار للعياري.

$C_{(\text{st})}$ : تركيز العياري.

$C_{(\text{sample})}$ : تركيز العينة.

وكانت نسبة محتوى مادة الأسبرين في المضغوطة (92%) وهذا يتطابق مع ما هو موجود في المراجع الدوائية (90%-110%)



الشكل 7 : المنحني الفولتومتري الحلقي لنسبة محتوى مادة الأسبرين في المضغوطة الدوائية

### ثانياً: دراسة الإرجاع الكهروكيميائي للأسبرين في الوسط الحمضي:

طريقة العمل: تم تحضير محلول بحجم (25 ml) من الأسبرين بتركيز (0.01M) في وسط حمضي من حمض كلور الماء بتركيز (0.1M) ككهرليت داعم ، حيث تُمَّ الحجم باستخدام ماء ثنائي التقطير .  
ولكن لم تشاهد موجة كاتودية وذلك نتيجة كون كمونات الإرجاع للزمرة الحمضية COOH يعيقها انطلاق الهيدروجين المبكر .

### ثالثاً: دراسة الإرجاع الكهروكيميائي للأسبرين في الوسط القلوي:

طريقة العمل: تم تحضير محلول بحجم (25 ml) من الأسبرين بتركيز (0.01M) في وسط قلوي من ماءات الصوديوم بتركيز (0.1M) ككهرليت داعم حيث تُمَّ الحجم باستخدام ماء ثنائي التقطير  
وأيضاً لم تشاهد موجة كاتودية وذلك نتيجة كون كمونات الإرجاع للزمرة الحمضية COOH يعيقها انطلاق الهيدروجين المبكر .

### الاستنتاجات:

اهتم هذا البحث بدراسة الإرجاع الكهركيميائي لزمرة الحمض الكربوكسيلي في الأوساط الحمضية والقلوية والمعتدلة وقد تم استخدام محاليل من حمض كلور الماء وأخرى من هيدروكسيد الصوديوم وكلورالبتاسيوم بتركيز (0.1M) ككهرليات داعمة على مسرى الغرافيت الزجاجي باستخدام الطريقة الفولتومترية الحلقية فحصلنا على النتائج التالية :

1. تم حساب عدد الألكترونات الكلي حيث أُرجعت زمرة الحمض الكربوكسيلي في الوسط المعتدل إلى زمرة ألدهيد.
2. يخضع تفاعل الإرجاع الكهركيميائي في الوسط المعتدل إلى الحركية الانتشارية (هي المرحلة المحددة لسرعة التفاعل).
3. تم دراسة تأثير تغيير التركيز على عملية الإرجاع وكانت العلاقة بين التركيز والتيار خطية ضمن المجال المدروس.
4. تم تطبيق الدراسة على عينات دوائية.

### التوصيات:

على اعتبار بأن تفاعل الإرجاع الكهركيميائي للأسبرين في الوسط المعتدل يخضع إلى الحركية الانتشارية، نوصي باستخدام الطريقة الكهروكيميائية المذكورة في هذه الورقة لتحديده كميًا في العينات الدوائية الحاوية عليه.

## المراجع:

- 1-BAKEER.D,2005-Physical Chemistry, Publications of the al-baath University Homs, 420p
- 2-HAMDO.J,2012-Automated Analysis, Publications of the University of Damascus Syria, 342p
- 3-PROTTI.P,2001, Introduction to modern voltammetric and Polarographic analysis techniques, Amel electrochemistry, 1-37.
- 4- NICHOLSON .R,1965, Theory and application of cyclic voltammetry for Measurement of electrode reaction kinetics. Analytical chemistry, 1351-1355.
- 5-BÖGER.R.H, BODE-BÖGER.S.M, GUTZKI.F.M, TSIKAS.D, WESKOTT.H.P,1993, Rapid and selective inhibition of platelet aggregation and thromboxane formation by intravenous low dose aspirin in man, Clin, Sci, 517-524
- 6-POULSEN.T.S,KRISTENSEN.S.R, KORSHOLM.L, HAGHFELT.T, JØRGENSEN.B, LICHT.P.B, MICKLEY.H, 2007,Variation and importance of aspirin resistance in patients with known cardiovascular disease, Thromb, Res, 477-484

7-WEGGEN.S, ROGERS.M, ERIKSEN.J, NSAIDs, 2007, small molecules for prevention of Alzheimer's disease or precursors for future drug development?, Trends Pharmacol,Sci, 536–543

8-SHREEKANT M. PATIL, SANJEEVARADDI R. SATARADDI, ATMANAND M. BAGOJI, RIYAZKHAN M. PATHAN, and HARANAPPA T.NANDIBEWOR,2014, Electrochemical Behavior of Graphene-Based Sensors on the Redox Mechanism of Aspirin, Electroanalysis,Vol. 26. 831–839

9-XIA.Y, DAI.Q, CHEN.J,2015,Electrochemical degradation of aspirin using a novel Ti/SnSbOx/Ni-PbO<sub>2</sub> electrode, Journal of Electroanalytical Chemistry,1–26

10-YING<sup>1</sup>.J, ZHENG<sup>2</sup>.Y, ZHANG<sup>1</sup>.H, FU<sup>1</sup>.L, 2020, Room temperature biosynthesis of gold nanoparticles with Lycorisaurea leaf extractfor the electrochemical determination of aspirin, Mexicana de IngenieríaQuímica,Vol. 19. 585–592

11-SIVAKUMAR.M, SAKTHIVEL.M, CHEN.S-M, CHENG.Y-H, PANDI.K, 2017, One-step synthesis of porous copper oxide for electrochemical sensing of acetylsalicylic acid in the real sample, Journal of Colloid and Interface Science, 1–21

12-BAKEER.D, IBRAHEM.S, 2021, A study of the electrochemical reduction of Nemosolend in moderate media at glassy carbon Electrode, Publications of the al-baath University, 43.1-20



# توابع الحالة الترموديناميكية والعلاقات التأسيسية الموافقة لجسم هوك الصلب في نظام احداثي منحني كيفي

أ.د. منتجب الحسن<sup>1</sup>

ط. غيث عزيز صالح<sup>2</sup>

## ملخص البحث:

يتعلق البحث بالنموذج الرياضي الحاكم للحقول الترموميكانيكية، التي تصف السلوك الترموديناميكي لجسم Hooke الصلب المرن، غير المتجانس والغير متماثل المناعي، والذي يرمز له اختصاراً بالرمز  $(\mathcal{H})$ ، نسبة للباحث الرياضي Hooke، وهو من أسس النموذج الرياضي لهذا الجسم. في البحث، سنناقش أولاً الشكل التتسوري الناطق في نظام احداثي منحني كيفي للطاقة الحرة المتعلقة بعنصر الحجم من الجسم  $(\mathcal{H})$ ، كتابع لمقطعي الانفعال والحرارة، ومن ثم سنستنتج العلاقات التأسيسية الموافقة لعملية إيزوتيرمية، في نظام احداثي منحني كيفي. بعدها سنناقش الطاقة الداخلية المتعلقة بعنصر الحجم المذكور، كتابع لمقطعي الانفعال والأنثروبية والعلاقات التأسيسية الموافقة لعملية أدياباتية، في نظام احداثي منحني كيفي. أخيراً سنناقش كمون Gibbs الترموديناميكي لنفس عنصر الحجم كتابع لمقطعي الإجهاد والحرارة، والعلاقات التأسيسية الموافقة لعملية إيزوتيرمية، في نظام احداثي منحني كيفي. في النهاية سننهى البحث باقتراح ثلاث مسائل للمناقشة.

<sup>1</sup> أستاذ في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث.

<sup>2</sup> طالب ماجستير في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث.

الكلمات المفتاحية: توابع الحالة الترموديناميكية والعلاقات التأسيسية للجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$ ، في نظام احداثي منحني كيفي.

# The thermodynamical state functions and corresponding constitutive relations for the Hooke elastic solid in an arbitrary curvilinear coordinate system

Mountajab Al-Hasan <sup>†</sup>

&

Ghaith Aziz Saleh <sup>‡</sup>

## Abstract

The paper concerns the mathematical model that governing the thermomechanical fields, describing the thermodynamical behavior of the Hooke nonhomogeneous and anisotropic elastic solid, shortly called ( $\mathcal{H}$ ), mathematically discussed by Hooke. In the paper, first we discuss the free energy related to the body volume element as a function of the strain tensor field and the temperature field, and we derive the related constitutive relations corresponding to the isothermal process in a curve coordinate system. Next, we discuss the internal energy related to the same body volume element as function of the strain tensor field and the entropy field, and we derive the related constitutive relations corresponding to the adiabatic process in a curve coordinate system. Then, we discuss the Gibbs thermodynamical potential related to the same mentioned body volume element as a function of the stress tensor field and the temperature field, and we derive the related constitutive relations corresponding to the isothermal process in a curve coordinate system. Finally, we will end the paper by proposing three problems for discussing.

---

<sup>†</sup> Professor At Department of Mathematics–Faculty of Science–Al–Baath University.

<sup>‡</sup> Master Student At Department of Mathematics–Faculty of Science–Al–Baath University.

**Key words:** The thermodynamical state functions, the corresponding constitutive relations for the ( $\mathcal{H}$ ) elastic solid in a curve coordinate system.

## 1. مقدمة:

قام العديد من الباحثين الرياضيين في مجال الأوساط المستمرة، بدراسة توابع الحالة الترموديناميكية لجسم Hooke الصلب المرن، في الحالة التي يخضع فيها الجسم لمؤثرات حرارية، وفي النظام الإحداثي الديكارتي. من هذه التوابع: الطاقة الحرة، والطاقة الداخلية، وكمون Gibbs الترموديناميكي، وأعطوا لأجل كلٍ من هذه التوابع، شكل جديد مختلف للعلاقات التأسيسية، كما وضعوا المعادلات الترموديناميكية للجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$ ، إما بواسطة الانفعالات والأنتروبية، أو بواسطة الانفعالات والحرارة، وكل ذلك في النظام الإحداثي الديكارتي. من هؤلاء الباحثين: Truesdell [7] و Fung [4] و Nowacki [3,5]، وكان ذلك في الستينيات والسبعينيات والثمانينات من القرن العشرين.

## 2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى دراسة توابع: الطاقة الحرة كتابع لمركبات مقطع الانفعال والحرارة، والطاقة الداخلية كتابع لمركبات مقطع الانفعالات والأنتروبية، وكمون Gibbs الترموديناميكي كتابع لمركبات مقطع الإجهاد والحرارة، واستنتاج العلاقات التأسيسية الموافقة لكل تابع من التوابع السابقة، كل ذلك في نظام إحداثي منحنى كفي، وللجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$  غير المتجانس وغير المتماثل المناحي.

## 3. طرق لبحث:

سندرس الطاقة الحرة للجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$ ، كتابع لمركبات مقطع الانفعال التتسوري والحرارة، والطاقة الداخلية لهذا الجسم، كتابع لمركبات مقطع الانفعال التتسوري والأنتروبية وكذلك كمون Gibbs الترموديناميكي للجسم، كتابع لمركبات مقطع الإجهاد التتسوري والحرارة، كل ذلك في نظام إحداثي منحنى كفي، متبعين في ذلك طريقة هي تعميم الطريقة المتبعة في Nowacki [3,5].

لهذا الغرض، سنرمز للطاقة الحرة لعنصر الحجم اللاغرانجي  $dV$  من الجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$  بالرمز  $\mathcal{F}$ ، وسنرمز للطاقة الداخلية لنفس عنصر الحجم اللاغرانجي بالرمز  $U$ ، كما سنرمز لكمون Gibbs الترموديناميكي لهذا العنصر بالرمز  $G$ .

توابع الحالة الترموديناميكية والعلاقات التأسيسية الموافقة لجسم هوك الصلب في نظام  
إحداثي منحنى كفي

إن العملية الترموديناميكية للجسم الصلب المرن ( $\mathcal{H}$ ) غير المتجانس وغير المتماثل  
المناحي، توصف بواسطة مجموعة المقاطع التتسورية  $\{ \mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, T, S \}$ ،  
حيث  $\mathbf{u}$  مقطع متجهي، يمثل فيزيائياً حقل الإزاحات، أما  $\boldsymbol{\varepsilon}$  و  $\boldsymbol{\sigma}$  فهما مقطعان تتسوريان  
من المرتبة الثانية، ومتناظران، وفيزيائياً هما على الترتيب، مقطع الانفعالات ومقطع  
الإجهادات. أخيراً  $T$  و  $S$ ، هما مقطعان تتسوريان من المرتبة الصفرية، يمثلان على  
الترتيب مقطع الحرارة المطلقة ومقطع الأنتروبية.

من أجل متطلبات البحث أيضاً، نفرض أن جميع الأدلة اللاتينية  $i, j, k, \dots$   
تأخذ القيم  $1, 2, 3$  وسنعمد رموز Einstein في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد  $R^3$ ،  
ولكن  $Ox_1 x_2 x_3$  جملة إحداثية ديكارتية قائمة، ومباشرة، وعطالية، قاعدتها  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ .  
كما سنفرض وجود نظام إحداثي منحنى كفي في الحالة البدائية  $\Omega$  للجسم الصلب المرن  
( $\mathcal{H}$ )، وسطاءه  $\eta_i$  وقاعدته موافقة التغير هي  $\mathbf{g}_i(p) = \mathbf{g}_i(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ، وقاعدته مخالفة  
التغير هي  $\mathbf{g}^i(p) = \mathbf{g}^i(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ . عندئذٍ يمكن أن تُمثل مجموعة المقاطع التتسورية  
 $\{ \mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma} \}$  في النظام الإحداثي المنحنى  $\eta_i$ ، على النحو الآتي:

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i = u_i \mathbf{g}^i, \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \varepsilon_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \varepsilon_j^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \sigma_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \sigma_j^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (3.3)$$

حيث  $u_i$  و  $u^i$ ، على الترتيب تمثل المركبات موافقة التغير والمركبات مخالفة التغير  
في النظام الإحداثي المنحنى  $\eta_i$  لمقطع الإزاحة  $\mathbf{u}$ ، كما أن:  $\varepsilon_{ij}$  و  $\varepsilon^{ij}$  و  $\varepsilon_j^i$ ، هي  
مصفوفات متناظرة، تمثل على الترتيب المركبات موافقة التغير والمركبات مخالفة التغير  
والمركبات المختلطة في النظام الإحداثي المنحنى  $\eta_i$  لمقطع الانفعال  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ، كما أن:  $\sigma_{ij}$   
و  $\sigma^{ij}$  و  $\sigma_j^i$ ، هي أيضاً مصفوفات متناظرة وتمثل على الترتيب المركبات موافقة  
التغير والمركبات مخالفة التغير والمركبات المختلطة في النظام الإحداثي المنحنى  $\eta_i$   
لمقطع الإجهاد  $\boldsymbol{\sigma}$ .

#### 4. النتائج والمناقشة:

أولاً: الطاقة الحرة  $\mathcal{F}$ ، كتابع لمركبات مقطع الانفعال التتسوري والحرارة، والعلاقات التأسيسية الموافقة للجسم الصلب المرن ( $\mathcal{H}$ ) غير المتجانس وغير المتماثل المناحي، كل ذلك في نظام احداثي منحنى كفي  $\eta_i$ : تعطى الطاقة الحرة  $\mathcal{F}$  بالعلاقة [3,5]:

$$\mathcal{F} = \mathcal{U} - S T \quad (4.1)$$

ولكن يمكن أن نعتبر أن:  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\varepsilon_{ij}, S)$ ، وعندئذ [3]:

$$d\mathcal{U} = \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} + T dS \quad (4.2)$$

حيث هنا:  $d\varepsilon_{ij} = \nabla_k \varepsilon_{ij} d\eta^k$  و  $\eta^k = \eta_k$  والرمز  $\nabla_k \varepsilon_{ij}$  يعني المشتق موافق التغيير للمركبات موافقة التغيير  $\varepsilon_{ij}$  بالنسبة لـ  $\eta_k$ ، وهو يعطى بالعلاقة [6,9]:

$$\nabla_k \varepsilon_{ij} = \partial_k \varepsilon_{ij} - \Gamma_{ik}^m \varepsilon_{mj} - \Gamma_{jk}^m \varepsilon_{im}$$

وحيث  $\partial_k$  يرمز المشتق الجزئي بالنسبة للوسيط  $\eta_k$ ؛  $\partial_k \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \eta_k}$  . الرمز  $\Gamma_{ij}^k$

تدل هي رموز Christoffel من النوع الثاني؛ وهي تعطى بالعلاقة:  $\Gamma_{ij}^k = g^{k\ell} \Gamma_{ij\ell}$ ، مع العلم بأن:  $\Gamma_{ij\ell}$  هي رموز Christoffel من النوع الأول،

وهي تعطى بالعلاقة:  $\Gamma_{ijk} = \partial_j \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_k = \frac{1}{2}(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij})$ ،

و  $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$  و  $g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$  على الترتيب هما الحد العام للمصفوفة المترية موافقة التغيير والحد العام للمصفوفة المترية مخالفة التغيير.

ينتج الآن عن (4.1) و (4.2) أن:

$$d\mathcal{F} = \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} - S dT \quad (4.3)$$

التي منها نجد أن:  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varepsilon_{ij}, T)$  . بالتالي:

$$d\mathcal{F} = \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T d\varepsilon_{ij} + \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right)_\varepsilon dT \quad (4.4)$$

حيث الرمز  $\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T$  تدل على اشتقاق  $\mathcal{F}$  خلال ظروف إيزوتيرمية (متساوية درجة

الحرارة المطلقة)، أما الرمز  $\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right)_\varepsilon$  فيعني اشتقاق  $\mathcal{F}$  خلال تشوه ثابت للجسم. من  
(4.4) و(4.3)، ينتج أن:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T = \sigma^{ij}, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right)_\varepsilon = -S \quad (4.5)$$

بالتالي إذا عرفنا الطاقة الحرة  $\mathcal{F}$ ، فيمكن أن نعرف المركبات مخالفة التغيير  $\sigma^{ij}$   
لمقطع الإجهاد، بدلالة كلٍ من المركبات موافقة التغيير  $\varepsilon_{ij}$  لمقطع الانفعال والحرارة  $T$ ،  
كما يمكن أن نعرف الأنتروبية  $S$  أيضاً بدلالة كلٍ من المركبات موافقة التغيير  $\varepsilon_{ij}$   
لمقطع الانفعال والحرارة  $T$ .

بنشر الطاقة الحرة  $\mathcal{F}(\varepsilon, T)$  في متسلسلة تايلور في جوار الحالة الطبيعية:  $(\mathbf{0}, T_0)$ ،  
(حيث  $\mathbf{0}$  هو المقطع التنسوري، الصفري، و  $T_0$  هي درجة حرارة الحالة الطبيعية للجسم)،  
نحصل على:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varepsilon_{ij}, T) = & \mathcal{F}(\mathbf{0}, T_0) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij}}(\mathbf{0}, T_0) \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}(\mathbf{0}, T_0) (T - T_0) + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}(\mathbf{0}, T_0) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T}(\mathbf{0}, T_0) \varepsilon_{ij} (T - T_0) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T^2}(\mathbf{0}, T_0) (T - T_0)^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

ولكن في جوار الحالة الطبيعية للجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$  ينعدم كلاً من مقطعي الانفعال  
والإجهاد ومقطع الأنتروبية، كما تملك الطاقة الحرة عندئذٍ القيمة الثابتة  $\mathcal{F}(\mathbf{0}, T_0)$ ، والتي  
يمكن أن نفرضها معدومة دون المساس بعمومية المسألة. ينتج من انعدام قيمة كلاً من  
مقطعي الإجهاد والأنتروبية في  $(\mathbf{0}, T_0)$ ، ومن العلاقة (4.5)، أن:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij}}(\mathbf{0}, T_0) = \sigma^{ij}(\mathbf{0}, T_0) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}(\mathbf{0}, T_0) = -S(\mathbf{0}, T_0) = 0 \quad (4.6)$$

وبذلك يصبح المنشور السابق بالشكل:

$$\mathcal{F}(\varepsilon_{ij}, T) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}(\mathbf{0}, T_0) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T}(\mathbf{0}, T_0) \varepsilon_{ij} (T - T_0) + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T^2}(\mathbf{0}, T_0) (T - T_0)^2 \right] + \dots \quad (4.7)$$

في العلاقة (4.7) لنهمل مجموع قوى المركبات موافقة التغيير لمقطع الانفعال:  $\varepsilon_{ij}$  والفرق الحراري  $(T - T_0)$ ، التي هي أكبر أو تساوي الـ 3، الأمر الذي يتناسب مع حالة الانفعال الصغيرة جداً، ومع حالة كون  $|(T - T_0)/T_0| \ll 1$ ، وبذلك تصبح العلاقة (4.7) بالشكل الآتي:

$$\mathcal{F}(\varepsilon_{ij}, T) = \frac{1}{2} C_T^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta^{ij} \varepsilon_{ij} \theta + \mathcal{F}_0(\theta) \quad (4.8)$$

علماً أن:  $\theta := T - T_0$ ، و  $\mathcal{F}_0(\theta)$  تابع لـ  $\theta$  فقط، كما أن:

$$C_T^{ijkl} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}(\mathbf{0}, T_0), \quad \beta^{ij} = - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T}(\mathbf{0}, T_0) \quad (4.9)$$

وللحصول، الآن على العلاقات التأسيسية، بشكلها الأول، وفي نظام احداثي منحنى كفي  $\eta_i$ ، نستخدم العلاقتين (4.5)، فنجد:

$$\sigma^{ij} = C_T^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta^{ij} \theta \quad (4.10)$$

$$S = \beta^{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial T}(\theta) \quad (4.11)$$

ندعوا العلاقتان (4.10) و (4.11) بالعلاقتين التأسيسيتين (الشكل الأول)، في النظام الاحداثي المنحني الكفي  $\eta_i$ ، حيث ندعوا (4.10)، بعلاقة Duhamel – Neumann، لأجل الجسم المرن  $(\mathcal{H})$ ، الأنيزوتروبي (غير المتماثل المناحي)، في النظام الاحداثي المنحني الكفي  $\eta_i$ . يبقى علينا الآن، تحديد قيمة الحد  $-\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial T}(\theta)$ ، في الطرف الأيمن

للعلاقة (4.11)، والذي يتم باتباع الآتي. بما أن  $S = S(\varepsilon_{ij}, T)$ ، فإن:

توابع الحالة الترموديناميكية والعلاقات التأسيسية الموافقة لجسم هوك الصلب في نظام  
احداثي منحني كيفي

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T d\varepsilon_{ij} + \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_\varepsilon dT \quad (4.12)$$

هذا من جهة أولى، ومن جهة أخرى ينتج عن (4.11)، أن:

$$dS = \beta^{ij} d\varepsilon_{ij} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial T^2}(\theta) dT \quad (4.13)$$

ينتج عن (4.12) و (4.13)، أن:

$$\left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_\varepsilon = - \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial T^2}(\theta) \quad (4.14)$$

إن المقدار  $T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_\varepsilon$  هو مقدار ثابت [3,5]، يدعى بالحرارة النوعية للجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$ ، خلال تشوه ثابت، ويرمز لهذا المقدار الثابت بالرمز  $c_\varepsilon$ . ينتج عن ذلك وعن (4.14)، أن:

$$- \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial T^2}(\theta) = \frac{c_\varepsilon}{T} \quad (4.15)$$

بمكاملة طرفي العلاقة (4.15) مرة واحدة على المجال  $[T_0, T]$ ، وبملاحظة أن:  $\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial T}(0) = 0$ ، فنحصل على:

$$- \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial T}(\theta) = c_\varepsilon \ln \frac{T}{T_0} = c_\varepsilon \ln \left( 1 + \frac{\theta}{T_0} \right) \quad (4.16)$$

ينتج الآن عن (4.16) أن (4.11) تأخذ الشكل:

$$S = \beta^{ij} \varepsilon_{ij} + c_\varepsilon \ln \left( 1 + \frac{\theta}{T_0} \right) \quad (4.17)$$

وإذا نشرنا الآن المقدار  $\ln \left( 1 + \frac{\theta}{T_0} \right)$  في متسلسلة تايلور في جوار النقطة  $\theta = 0$ ، وأخذنا بعين الاعتبار فرضيات الجسم  $(|\theta/T_0| \ll 1)$ ، يمكننا الاكتفاء بالحد الأول فقط من هذا المنشور، فنحصل على:  $\ln \left( 1 + \frac{\theta}{T_0} \right) \cong \frac{\theta}{T_0}$ . ينتج عن ذلك وعن (4.16) وعن

كون  $\mathcal{F}_0(0) = 0$  ، أن:  $\mathcal{F}_0(\theta) = -\frac{c_\varepsilon}{2T_0} \theta^2$  . ومما تقدم ينتج أن الطاقة الحرة  $\mathcal{F}$

والأنثروبية  $S$  تصبحان بالشكل التالي:

$$\mathcal{F}(\varepsilon_{ij}, T) = \frac{1}{2} C_T^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta^{ij} \varepsilon_{ij} \theta - \frac{c_\varepsilon}{2T_0} \theta^2 \quad (4.18)$$

$$S = \beta^{ij} \varepsilon_{ij} + c_\varepsilon \frac{\theta}{T_0} \quad (4.19)$$

إن الحد الأول في الطرف الأيمن للعلاقة (4.18) له صفة الانفعال فقط، والحد الثالث له طابع حراري فقط، بينما الحد الثاني له طابع مزيج لهذين الطابعين السابقين، وهو يعبر عن التأثير المتبادل بين مقطع الانفعال ومقطع الحرارة. وفي (4.18)، أيضاً، تمثل المقادير  $C_T^{ijkl}$  المعاملات الميكانيكية للجسم الصلب المرن ( $\mathcal{H}$ )، بينما ترتبط المقادير  $\beta^{ij}$  بالموثرات الميكانيكية وكذلك بالموثرات الحرارية لهذا الجسم، لذلك تدعى بالمعاملات الترموميكانيكية للجسم الصلب المرن ( $\mathcal{H}$ ). ينتج عن (4.9)، وعن تناظر مقطع الانفعال أن المعاملات  $C_T^{ijkl}$  والمعاملات  $\beta^{ij}$  تحقق الخواص التناظرية التالية:

$$C_T^{ijkl} = C_T^{jikk} , C_T^{ijkl} = C_T^{ijlk} , C_T^{ijkl} = C_T^{klij} \quad (4.20)$$

$$\beta^{ij} = \beta^{ji}$$

ثانياً: الطاقة الداخلية  $\mathcal{U}$  كتابع للمركبات الموافقة للتغيير لمقطع الانفعال وللأنثروبية، والعلاقات التأسيسية الموافقة في الجسم الصلب المرن ( $\mathcal{H}$ ) غير المتجانس وغير المتماثل المناحي، كل ذلك في نظام احداثي منحنى كفي  $\eta_i$ : سنعتبر هنا أن الطاقة الداخلية  $\mathcal{U}$  المتعلقة بعنصر الحجم اللاغرانجي  $dV$  المأخوذ من الجسم الصلب المرن ( $\mathcal{H}$ )، تمثل تابع حالة ترموديناميكية:  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\varepsilon_{ij}, S)$ . بنشر الطاقة الداخلية  $\mathcal{U}$  في متسلسلة تايلور في جوار الحالة الطبيعية للجسم الصلب المرن ( $\mathcal{H}$ ) (هي الحالة التي ينعدم فيها كلاً من مقطع الأنثروبية  $S$  ومقطع الانفعال  $\varepsilon$ ، ومقطع الإجهاد  $\sigma$ ، بينما يكون فيها مقطع الحرارة المطلقة  $T$  مساوياً لدرجة حرارة الحالة الطبيعية  $T_0$ ، وأما قيمة الطاقة الداخلية لأجل الحالة الطبيعية فهي مقدار ثابت، يمكن أن نفرضه معدوماً دون المساس بالعمومية)، فنجد:

توابع الحالة الترموديناميكية والعلاقات التأسيسية الموافقة لجسم هوك الصلب في نظام  
احداثي منحني كيفي

$$\mathcal{U}(\varepsilon_{ij}, S) = \mathcal{U}(\mathbf{0}, 0) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}}(\mathbf{0}, 0) \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial S}(\mathbf{0}, 0) S +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}(\mathbf{0}, 0) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial S}(\mathbf{0}, 0) \varepsilon_{ij} S + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial S^2}(\mathbf{0}, 0) S^2 \right] + \dots$$

وبما أنه في الحالة الطبيعية، ينعدم مقطع الانتروبية ومقطعا الانفعال والإجهاد، وكذلك  
مقطع الطاقة الداخلية، وفي الحالة الطبيعية أيضاً [3,5]:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}}(\mathbf{0}, 0) = 0, \quad T_0 = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial S}(\mathbf{0}, 0)$$

فينتج عن ذلك أن المنشور السابق يأخذ الشكل الآتي:

$$\mathcal{U}(\varepsilon_{ij}, S) = T_0 S + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}(\mathbf{0}, 0) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial S}(\mathbf{0}, 0) \varepsilon_{ij} S + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial S^2}(\mathbf{0}, 0) S^2 \right] + \dots \quad (4.21)$$

في (4.21)، إذا اكتفينا بقوى المركبات موافقة التغيير  $\varepsilon_{ij}$  والانتروبية  $S$ ، التي مجموعها  
لا يزيد عن الـ 2 (الأمر الذي يتوافق مع الجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$ )، ومع حالة  
كون  $1 \leq |(T - T_0)/T_0|$ ، عندئذٍ تصبح (4.21) بالشكل:

$$\mathcal{U}(\varepsilon_{ij}, S) = \frac{1}{2} C_S^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - g^{ij} \varepsilon_{ij} S + \mathcal{U}_0(S) \quad (4.22)$$

حيث:  $\mathcal{U}_0(S)$  تابع فقط لـ  $S$ ، و:

$$C_S^{ijkl} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}(\mathbf{0}, 0), \quad g^{ij} = - \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial S}(\mathbf{0}, 0) \quad (4.23)$$

وبما أن [4]:

$$d\mathcal{U} = \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_S d\varepsilon_{ij} + \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial S} \right)_\varepsilon dS = \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} + T dS \quad (4.24)$$

حيث الرمز  $\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_S$  يعني اشتقاق  $\mathcal{U}$  في ظروف آدياباتية (أي عندما يكون مقطع الأنثروبية  $S$  ثابت) ، والرمز  $\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial S}\right)_\varepsilon$  يعني اشتقاق  $\mathcal{U}$  خلال تشوه ثابت، فينتج عن (4.22) و (4.24) أن:

$$\sigma^{ij} = C_S^{ijkl} \varepsilon_{kl} - g^{ij} S = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_S \quad (4.25)$$

$$T = -g^{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial S}(S) = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial S}\right)_\varepsilon \quad (4.26)$$

وينتج، الآن عن (4.23) وعن كون أن مقطع الانفعال  $\varepsilon$  متناظر، أن المعاملات  $C_S^{ijkl}$  والمعاملات  $g^{ij}$  تحقق الخواص التناظرية التالية:

$$C_S^{ijkl} = C_S^{jikl}, \quad C_S^{ijkl} = C_S^{ijlk}, \quad C_S^{ijkl} = C_S^{klij} \quad (4.27)$$

$$g^{ij} = g^{ji}$$

ندعو العلاقات (4.25) و (4.26) بالعلاقات التأسيسية للجسم الصلب المرن، الأيزوتروبي  $(\mathcal{H})$ ، (بشكلها الثالث).

ولنوجد الآن العلاقات التي تربط المعاملات  $C_T^{ijkl}$  و  $\beta^{ij}$  بالمعاملات  $C_S^{ijkl}$  و  $g^{ij}$ ، آخذين بعين الاعتبار فرضيات الجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$ ، التي تتمثل بكون تشوهات المرنة صغيرة جداً، ويكون  $|\theta/T_0| \ll 1$ . بحل العلاقة (4.19) بالنسبة لـ  $\theta$  نجد:

$$\theta = \frac{T_0}{c_\varepsilon} (S - \beta^{ij} \varepsilon_{ij}) \quad (4.28)$$

بتعويض ذلك في علاقات Duhamel–Neumann (4.10)، نحصل على:

$$\sigma^{ij} = (C_T^{ijkl} + \frac{T_0}{c_\varepsilon} \beta^{ij} \beta^{kl}) \varepsilon_{kl} - \frac{T_0}{c_\varepsilon} \beta^{ij} S \quad (4.29)$$

وبمقارنة (4.25) مع (4.29)، نجد أن:

$$C_S^{ijkl} = C_T^{ijkl} + \frac{T_0}{c_\varepsilon} \beta^{ij} \beta^{kl}, \quad g^{ij} = \frac{T_0}{c_\varepsilon} \beta^{ij} \quad (4.30)$$

توابع الحالة الترموديناميكية والعلاقات التأسيسية الموافقة لجسم هوك الصلب في نظام  
احداثي منحني كيفي

ثالثاً: كمون Gibbs الترموديناميكي  $G$ ، كتابع لكل من المركبات مخالفة التغيير لمقطع الإجهاد وللحرارة، والعلاقات التأسيسية الموافقة في الجسم الصلب المرن ( $\mathcal{H}$ ) غير المتجانس وغير المتماثل المناحي، كل ذلك في نظام احداثي منحني كيفي  $\eta_i$ :  
في الترموديناميك، يلعب كمون Gibbs الترموديناميكي  $G$  دوراً هاماً، وهو يعطى بالعلاقة التالية في أي نظام احداثي منحني  $\eta_i$ :

$$G = \mathcal{F} - \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} \quad (4.31)$$

والتي ينتج عنها أن:

$$dG = d\mathcal{F} - \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij} d\sigma^{ij} \quad (4.32)$$

حيث:  $d\sigma^{ij} = \nabla_k \sigma^{ij} d\eta^k$  والرمز  $\nabla_k \sigma^{ij}$  يعني المشق موافق التغيير للمركبات مخلفة التغيير  $\sigma^{ij}$  بالنسبة لـ  $\eta_k$ ، وهو يعطى بالعلاقة [6,8,9]:

$$\nabla_k \sigma^{ij} = \partial_k \sigma^{ij} + \Gamma_{km}^i \sigma^{mj} + \Gamma_{km}^j \sigma^{im}$$

ينتج عن (4.32) وعن العلاقة (4.3)، أن:

$$dG = -\varepsilon_{ij} d\sigma^{ij} - S dT \quad (4.33)$$

بما أن العلاقة السابقة تعطي التفاضل التام للتابع  $G(\sigma^{ij}, T)$ ، ولدينا:

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial \sigma^{ij}} \right)_T d\sigma^{ij} + \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_\sigma dT \quad (4.34)$$

فينتج عن (4.33) و (4.34) أن:

$$\varepsilon_{ij} = - \left( \frac{\partial G}{\partial \sigma^{ij}} \right)_T, \quad S = - \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_\sigma \quad (4.35)$$

لننشر، الآن كمون Gibbs:  $G(\sigma^{ij}, T)$  في متسلسلة تايلور في جوار الحالة الطبيعية  $(\mathbf{0}, T_0)$  للجسم الصلب المرن ( $\mathcal{H}$ ). باتباع طريقة مشابهة لما فعلناه في الفقرتين

السابقتين من أجل كل حالتي الطاقة الحرة  $\mathcal{F}$  والطاقة الداخلية  $\mathcal{U}$ ، نحصل على:

$$-G(\sigma^{ij}, T) = \frac{1}{2} S_{ijkl}^T \sigma^{ij} \sigma^{kl} + \alpha_{ij} \sigma^{ij} \theta + G_0(\theta) \quad (4.36)$$

حيث:  $G_0(\theta)$  تابع فقط لـ  $\theta$ ، كما أن:

$$S_{ijk\ell}^T = -\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \sigma^{ij} \partial \sigma^{k\ell}}(\mathbf{0}, T_0), \quad \alpha_{ij} = -\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \sigma^{ij} \partial T}(\mathbf{0}, T_0) \quad (4.37)$$

وهنا أيضاً أخذنا بعين الاعتبار فرضيات الجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$ ، المتمثلة بكون تشوهات المرنة صغيرة جداً، ويكون  $|\theta/T_0| \ll 1$ .

نحصل، الآن على العلاقات التأسيسية، بشكلها الثاني، في النظام الاحداثي المنحني الكيفي  $\eta_i$  باستخدام العلاقتين (4.35)، فنجد:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijk\ell}^T \sigma^{k\ell} + \alpha_{ij} \theta \quad (4.38)$$

$$S = \alpha_{ij} \sigma^{ij} + \frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial T}(\theta) \quad (4.39)$$

ندعوا العلاقتان (4.38) و (4.39) بالعلاقتين التأسيسيتين (الشكل الثاني)، للجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$ ، غير المتجانس والأنيزوتروبي، في النظام الاحداثي المنحني الكيفي  $\eta_i$ . يبقى علينا الآن، تحديد قيمة الحد  $\frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial T}(\theta)$ ، في الطرف الأيمن للعلاقة (4.39)، والذي

يتم باتتباع الآتي. بما أن  $S = S(\sigma^{ij}, T)$ ، فإن:

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial \sigma^{ij}} \right)_T d\sigma^{ij} + \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_\sigma dT \quad (4.40)$$

هذا من جهة أولى، ومن جهة أخرى من (4.39)، ينتج أن:

$$dS = \alpha_{ij} d\sigma^{ij} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}_0}{\partial T^2}(\theta) dT \quad (4.41)$$

وينتج عن (4.40) و (4.41)، أن:

$$\left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_\sigma = \frac{\partial^2 \mathcal{G}_0}{\partial T^2}(\theta) \quad (4.42)$$

إن المقدار  $T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_\sigma$  هو مقدار ثابت [3,5]، يسمى بالحرارة النوعية للجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$ ، خلال مقطع إجهاد ثابت، ونرمز لهذا المقدار الثابت بالرمز  $c_\sigma$ . وينتج عن ذلك وعن (4.42)، أن:

توابع الحالة الترموديناميكية والعلاقات التأسيسية الموافقة لجسم هوك الصلب في نظام  
احداثي منحني كفي

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}_0}{\partial T^2}(\theta) = \frac{c_\sigma}{T} \quad (4.43)$$

بمكاملة طرفي العلاقة السابقة مرة واحدة على المجال  $[T_0, T]$ ، وملاحظة أن:  
 $\frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial T}(0) = 0$ ، نحصل على:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial T}(\theta) = c_\sigma \ln \frac{T}{T_0} = c_\sigma \ln \left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right) \quad (4.44)$$

وينتج عن (4.44) أن (4.39) تصبح بالشكل:

$$S = \alpha_{ij} \sigma^{ij} + c_\sigma \ln \left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right) \quad (4.45)$$

ولكن بالأخذ بعين الاعتبار فرضيات الجسم  $(|\theta/T_0| \ll 1)$ ، فيمكننا اعتبار أن:  
 $\ln \left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right) \cong \frac{\theta}{T_0}$ . فينتج عن ذلك وعن (4.44) وعن كون  $\mathcal{G}_0(0) = 0$ ، أن:

$\mathcal{G}_0(\theta) = \frac{c_\sigma}{2T_0} \theta^2$ . ومما تقدم يصبح كمون Gibbs الترموديناميكي  $\mathcal{G}$  والأنتروبية  $S$   
بالشكل:

$$-G(\sigma^{ij}, T) = \frac{1}{2} S_{ijkl}^T \sigma^{ij} \sigma^{kl} + \alpha_{ij} \sigma^{ij} \theta + \frac{c_\sigma}{2T_0} \theta^2 \quad (4.46)$$

$$S = \alpha_{ij} \sigma^{ij} + c_\sigma \frac{\theta}{T_0} \quad (4.47)$$

ولنوجد، الآن العلاقة التي تربط مابين  $c_\sigma$  و  $c_\epsilon$ . لهذا الغرض نعوض (4.38) في  
(4.11)، فنجد:

$$S = S_{ijkl}^T \beta^{ij} \sigma^{kl} + \alpha_{ij} \beta^{ij} \theta - \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial T}(\theta) \quad (4.48)$$

ينتج عن ذلك وعن تعريف  $c_\sigma$ ، أن:

$$c_\sigma := T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_\sigma = T \left[ \alpha_{ij} \beta^{ij} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial T^2}(\theta) \right] \quad (4.49)$$

ينتج، الآن عن ذلك وعن (4.15)، أن:

$$c_\sigma - c_\epsilon = T \alpha_{ij} \beta^{ij} \quad (4.50)$$

وبنفس الطريقة المتبعة في الفقرتين السابقتين، نجد أن المعاملات  $S_{ijkl}^T$  والمعاملات  $\alpha_{ij}$  تحقق الخواص التناظرية الآتية:

$$S_{ijkl}^T = S_{jikl}^T, S_{ijk\ell}^T = S_{ij\ell k}^T, S_{ijk\ell}^T = S_{k\ell ij}^T \quad (4.51)$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

كما أنه بنفس الطريقة المتبعة في الفقرة السابقة، يمكن إيجاد العلاقات التي تربط ما بين المعاملات  $S_{ijkl}^T$  و  $\alpha_{ij}$  والمعاملات  $C_T^{ijkl}$  و  $\beta^{ij}$ ، بالأخذ بعين الاعتبار فرضيات الجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$ ، المتمثلة بكون تشوهات المرنة صغيرة جداً، ويكون  $|\theta/T_0| \ll 1$ .

تعريف الجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$ ، المتماثل المناحي: نقول أن الجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$  متماثل المناحي إذا وفقط إذا تحقق أحد البنود التالية:

حيث:  $\lambda_T$  و  $\mu_T$  هي معاملات Lamé الأولى، المقاسة في ظروف إيزوتيرمية (متساوية درجة الحرارة المطلقة)، أما  $\beta$  فهو معامل حراري،

$$C_S^{ijkl} = \lambda_S g^{ij} g^{kl} + \mu_S (g^{il} g^{jk} + g^{jl} g^{ik}), \quad \beta^{ij} = \beta g^{ij} \quad (4.52)$$

حيث:  $\lambda_S$  و  $\mu_S$  هي معاملات Lamé الأولى، المقاسة في ظروف آديباتية (متساوية الأنتروبية)، أما  $\beta$  فهو معامل حراري آخر،

$$S_{ijkl}^T = \lambda^T g_{ij} g_{kl} + \mu^T (g_{il} g_{jk} + g_{jl} g_{ik}), \quad \alpha_{ij} = \alpha g_{ij} \quad (4.54)$$

حيث:  $\lambda^T$  و  $\mu^T$  هي معاملات Lamé الثانية المقاسة في ظروف إيزوتيرمية، أما  $\alpha$  فهو ثابت حراري آخر جديد مختلف حالات خاصة:

(1) إذا كان الجسم الصلب المرن  $(\mathcal{H})$  متماثل المناحي بالشكل (4.52)، فتأخذ عندئذ كلاً من الطاقة الحرة والعلاقات التأسيسية الموافقة لها، الشكل الآتي:

$$\mathcal{F}(\varepsilon_{ij}, T) = \frac{1}{2} \left[ \lambda_T g^{ij} g^{kl} + \mu_T (g^{il} g^{jk} + g^{jl} g^{ik}) \right] \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta g^{ij} \varepsilon_{ij} \theta - \frac{c_\varepsilon}{2T_0} \theta^2, \quad (4.55)$$

$$\sigma^{ij} = \left[ \lambda_T g^{ij} g^{kl} + \mu_T (g^{il} g^{jk} + g^{jl} g^{ik}) \right] \varepsilon_{kl} - \beta g^{ij} \theta, \quad (4.56)$$

توابع الحالة الترموديناميكية والعلاقات التأسيسية الموافقة لجسم هوك الصلب في نظام  
احداثي منحني كيفي

$$S = \beta g^{ij} \varepsilon_{ij} + c_\varepsilon \frac{\theta}{T_0} \quad (4.57)$$

أو:

$$\mathcal{F}(\varepsilon_{ij}, T) = \frac{1}{2} \lambda_T \varepsilon_i^i \varepsilon_j^j + \mu_T \varepsilon_{ij} \varepsilon^{ij} - \beta \varepsilon_j^j \theta - \frac{c_\varepsilon}{2T_0} \theta^2, \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \lambda_T g^{ij} \varepsilon_k^k + 2\mu_T \varepsilon^{ij} - \beta g^{ij} \theta = \\ &= 2\mu_T \varepsilon^{ij} + g^{ij} (\lambda_T \varepsilon_k^k - \beta \theta), \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$S = \beta \varepsilon_k^k + c_\varepsilon \frac{\theta}{T_0} \quad (4.59)$$

(2) إذا كان الجسم الصلب المرن ( $\mathcal{H}$ ) متمائل المنحني بالشكل (4.53)، فتأخذ عندئذ كلاً من الطاقة الداخلية والعلاقات التأسيسية الموافقة لها، الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\varepsilon_{ij}, S) &= \frac{1}{2} \left[ \lambda_S g^{ij} g^{kl} + \mu_S (g^{il} g^{jk} + g^{jl} g^{ik}) \right] \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \\ &\quad - \vartheta g^{ij} \varepsilon_{ij} S + \mathcal{U}_0(S), \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\sigma^{ij} = \left[ \lambda_S g^{ij} g^{kl} + \mu_S (g^{il} g^{jk} + g^{jl} g^{ik}) \right] \varepsilon_{kl} - \vartheta g^{ij} S, \quad (4.61)$$

$$T = -\vartheta g^{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial S}(S) \quad (4.62)$$

أو:

$$\mathcal{U}(\varepsilon_{ij}, S) = \frac{1}{2} \lambda_S \varepsilon_i^i \varepsilon_j^j + \mu_S \varepsilon_{ij} \varepsilon^{ij} - \vartheta \varepsilon_j^j S + \mathcal{U}_0(S), \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \lambda_S g^{ij} \varepsilon_k^k + 2\mu_S \varepsilon^{ij} - \vartheta g^{ij} S = \\ &= 2\mu_S \varepsilon^{ij} + g^{ij} (\lambda_S \varepsilon_k^k - \vartheta S), \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$T = -\vartheta \varepsilon_k^k + \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial S}(S) \quad (4.65)$$

(3) أخيراً إذا كان الجسم الصلب المرن ( $\mathcal{H}$ ) متمائل المنحني بالشكل (4.54)، فيأخذ عندئذ كلاً من كمون Gibbs الترموديناميكي والعلاقات التأسيسية الموافقة له، الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} -G(\sigma^{ij}, T) &= \frac{1}{2} \left[ \lambda^T g_{ij} g_{kl} + \mu^T (g_{il} g_{jk} + g_{jl} g_{ik}) \right] \sigma^{ij} \sigma^{kl} + \\ &\quad + \alpha g_{ij} \sigma^{ij} \theta + \frac{c_\sigma}{2T_0} \theta^2 \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\varepsilon_{ij} = \left[ \lambda^T g_{ij} g_{kl} + \mu^T (g_{il} g_{jk} + g_{jl} g_{ik}) \right] \sigma^{kl} + \alpha g_{ij} \theta, \quad (4.67)$$

$$S = \alpha g_{ij} \sigma^{ij} + c_\sigma \frac{\theta}{T_0} \quad (4.68)$$

أو:

$$-G(\sigma^{ij}, T) = \frac{1}{2} \lambda^T \sigma_i^i \sigma_j^j + \mu^T \sigma_{ij} \sigma^{ij} + \alpha \sigma_j^j \theta + \frac{c_\sigma}{2T_0} \theta^2, \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \lambda^T g_{ij} \sigma_k^k + 2\mu^T \sigma_{ij} + \alpha g_{ij} \theta = \\ &= 2\mu^T \sigma_{ij} + g_{ij} (\lambda^T \sigma_k^k + \alpha \theta), \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$S = \alpha \sigma_k^k + c_\sigma \frac{\theta}{T_0} \quad (4.71)$$

## 5. الاستنتاجات والمقترحات:

**أولاً) الاستنتاجات:** ناقشنا ثلاثة توابع للحالة الترموديناميكية للجسم الصلب المرن ( $\mathcal{H}$ ) غير المتجانس وغير المتماثل المناحي، كما ناقشنا العلاقات التأسيسية المتعلقة بها، كل ذلك في نظام احداثي منحني كفي؛ التابع الأول هو الطاقة الحرة كتابع لمقطعي الانفعال والحرارة المطلقة، والتابع الثاني هو الطاقة الداخلية كتابع لمقطعي الانفعال والأنتروبية، أما التابع الأخير هو كمون Gibbs الترموديناميكي كتابع لمقطعي الإجهاد والحرارة المطلقة. وتكمن أهمية ذلك بأنه يمكن أن نختار الإحداثيات المنحنية الملائمة التي تسهل حل المسألة.

**ثانياً) المقترحات:** يمكن أن نختتم هذا البحث بثلاث مسائل للمناقشة، هي الآتية:

مسألة 1: إعادة نفس الدراسة لأجل الجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب.

مسألة 2: مناقشة قانون Fourier في التوصيل الحراري ومعادلة انتشار الأنتروبية، كل ذلك في نظام احداثي منحني كفي.

مسألة 2: إعادة المسألة السابقة لأجل حالة الجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب.

## المراجع

- [1]-Kupradse V. D., Gegelya T. G., Bashelishili M. O., Burchuladse T. V., Three – Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity. Nauka, Moscow, 1968 and 1976 (In Russian).
- [2] Gurtin M. E., 1972, *The Linear Theory of Elasticity*,[in:] Encyclopedia of Physics, vol. AIa / 2, Springer – Verlag, Berlin.
- [3]- W. Nowocki , Theory of Elasticity , PWN Warsaw 1970.
- [4]- Fung, Y.C, 1966 Foundations of Solid Body Mechanics, Warsaw, (in Polish).
- [5]- Nowacki, W. , 1962, Thermoelasticity, Oxford – Warsaw, Pergamon Press , PWN.
- [6]-Heinbockel ,J.H, 1996- Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics, Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion University.
- [7]- Truesdell C.: Mechanics of Solids, Volume II, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1984.
- [8]- Hung Nguyen-Schäfer, Tensor Analysis and Elementary Differential Geometry for Physicists and Engineers, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2017.
- [9]- Rebecca M. Brannon, Curvilinear Analysis in a Euclidean Space, Second Edition, University of New Mexico, 2004.