مجلة جامعة حمص

سلسلة العلوم الأساسية

مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 47 . العدد 7

1447 هـ - 2025 م

الأستاذ الدكتور طارق حسام الدين رئيس جامعة حمص **المدير المسؤول عن المجلة**

أ. د. وليد حمادة	**رئيس تحرير مجلة جامعة حمص للعلوم الإنسانية**
أ. د. درغام سلوم	**رئيس تحرير مجلة جامعة حمص للعلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية**

د.محمد فراس رمضان	عضو هيئة التحرير
د. مضر سعود	عضو هيئة التحرير
د. ممدوح عبارة	عضو هيئة التحرير
د. موفق تلاوي	عضو هيئة التحرير
د. طلال رزوق	عضو هيئة التحرير
د. أحمد الجاعور	عضو هيئة التحرير
د. الياس خلف	عضو هيئة التحرير
د. روعة الفقس	عضو هيئة التحرير
د. محمد الجاسم	عضو هيئة التحرير
د. خليل الحسن	عضو هيئة التحرير
د. هيثم حسن	عضو هيئة التحرير
د. أحمد حاج موسى	عضو هيئة التحرير

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة حمص

سورية . حمص . جامعة حمص . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : 2138071 31 963 ++

. موقع الإنترنت : www.homs-univ.edu.sy

. البريد الالكتروني : journal.homs-univ.edu.sy

ISSN: 1022-467X

شروط النشر في مجلة جامعة حمص

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
- طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
- **اذا كان الباحث طالب دراسات عليا:**

يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقته على النشر في المجلة.

- **اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:**

يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.

- **اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :**

يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.

- **اذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :**

يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.

- **يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):**

عنوان البحث . . ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1- مقدمة

2- هدف البحث

3- مواد وطرق البحث

4- النتائج ومناقشتها .

5- الاستنتاجات والتوصيات .

6- المراجع.

- **يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (الآداب – الاقتصاد– التربية – الحقوق – السياحة – التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):**
- عنوان البحث . . ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1. مقدمة.
2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
3. أهداف البحث و أسئلته.
4. فرضيات البحث و حدوده.
5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
7. منهج البحث و إجراءاته.
8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
9. نتائج البحث.
10. مقترحات البحث إن وجدت.
11. قائمة المصادر والمراجع.

7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:

أ- قياس الورق 17.5×25 B5.

ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 – يمين 2.5- يسار 2.5 سم

ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8

ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20

ـ كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي ـ العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.

ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.

8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.

9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.

10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة ـ الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة ـ سنة النشر ـ وتتبعها معترضة (–) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة ـ دار النشر وتتبعها فاصلة ـ الطبعة (ثانية . ثالثة) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة.

وفيما يلي مثال على ذلك:

–MAVRODEANUS, R1986– **Flame Spectroscopy**. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

ـــ بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة ـــ المجلد والعدد (كتابة مختزلة) وبعدها فاصلة ـــ أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة.

مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases **Clinical Psychiatry News** , Vol. 4. 20 – 60

ج. إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد بالبنود (أ و ب) ويكتب في نهاية المراجع العربية: (المراجع In Arabic)

رسوم النشر في مجلة جامعة حمص

1. **دفع رسم نشر (50000) ل.س أربعون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.**
2. **دفع رسم نشر (200000) ل.س مئة الف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .**
3. **دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .**
4. **دفع مبلغ (15000) ل.س ستة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.**

المحتوى

اسم البحث	اسم الباحث	الصفحة
صيغة جديدة لطاقة ترابط النواة اعتماداً على التفاعلات النووية	آلاء خضري د.عبدالله رستناوي د.سليمان ديبو	40-11
دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية ذات أمثال متغيرة زمنياً	ايمان حسين د.سامح العرجه	64-41
نمذجة أزمنة الوصول البينية في نظام الخدمة $G/M/1/\infty$ باستخدام طوري تجديد ماركوف	د.هادية طهماز	90-65
دراسة تأثير بعض العوامل الفيزيائية على كفاءة الخلية الشمسية السيليكونية باستخدام النمذجة	صالح الدرويش د.أحمد العبدو د.ناصر سعد الدين	124-91
تحديد الترددات البلازمونية وتعيين زمن الاسترخاء والكتلة الفعالة للإلكترون الحر في أفلام النحاس الرقيقة	عبد المعين محمد العلص	152-125

صيغة جديدة لطاقة ترابط النواة اعتماداً على التفاعلات النووية

الطالبة: آلاء خضري[1] د. عبدالله رستناوي [2] د. سليمان ديبو[3]

الملخص

في هذا البحث قمنا باقتراح علاقة جديدة لطاقة الترابط لكافة النوكليدات في خريطة سيغري انطلاقاً من حل معادلة باتيمان Bateman، وبناء عليه حصلنا على صيغة لطاقة الترابط جديدة تتطابق بشكل جيد مع طاقات الترابط التجريبية، ومقارنتهما مع صيغة ويسكاكر المعتمدة على نموذج قطرة السائل. بناء على فكرة النموذج الارضي المقترح، حصلنا على صيغة لطاقة الارتباط جديدة بدلالة العدد الذري التي تتعلق بالتبادلات الكولونية للبروتونات ضمن طبقات الثلاثة للنواة والتي تفسر الشكل اللاتناظري للنواة .

الكلمات المفتاحية: صيغة ويسكاكر، معادلة باتيمان، طبقات النواة، صيغة طاقة ترابط، النموذج الارضي.

[1] طالبة دكتوراه في الفيزياء النظرية كلية العلوم جامعة حمص

[2] قسم الفيزياء بكلية العلوم– جامعة حمص.

[3] قسم الفيزياء بكلية العلوم– جامعة حمص.

A new formula for nucleus binding energy based on nuclear interactions.

Abstract:

In this research, we proposed a new formula for the binding energy of all nuclides in the Segre map from the solution of the Bateman equation. Accordingly, we obtained an equation of binding energy that fit better fits the Weizsäcker formula based on the liquid drop model with the experimental binding energies.
Based on the idea of the proposed Earth model, we obtained a new binding energy formula in terms of atomic number, which relates to the coulomb exchange of protons within the three layers of the nucleus.

Keywords: Weizsäcker's formula, Bateman equation, layers of the nucleus, binding energy formula, Earth model .

1. مقدمة

إن عدم وجود تصور صحيح عن النواة قاد إلى وضع العديد من النماذج النووية (كنموذج قطرة السائل ونموذج غاز فيرمي والنموذج الطبقي، والنموذج الضوئي...)، التي فسر كل منها إحدى الخصائص النووية وعجز عن تفسير بقية الخصائص.

وماتزال هذه النماذج قيد الدراسة والتطوير من اجل التوصل الى نموذج جديد يصف النواة بشكل دقيق. إن نموذج قطرة السائل نجح في صياغة طاقة الترابط النواة بشكل جيد. وما زال التطوير عليه جار من أجل تحسين علاقة طاقة الترابط.

من خلال دراستنا المرجعية، الموجزة أدناه، عن علاقة طاقة الترابط وجدنا أن كافة الباحثين قد أجروا مطابقتهم، لعددٍ محدود ومختلف من طاقات الترابط للنوى المعينة تجريبياً مع طاقات الترابط النظرية الموصوفة في علاقة طاقة الارتباط وفق نموذج قطرة السائل liquid drop model (LDM) وكانت هذه النوى المختارة للدراسة محدودة ام ذات عدد كتلي فردي أو زوجي فقط وايضا لا تخضع لقانونية رياضية او فيزيائية محددة وبالتالي من الطبيعي الا يحصل بينهما تطابق تام مع طاقات الترابط التجريبية.

لكن لما كان التقدير المبني على المطابقة مع أكبر عدد ممكن من طاقات الترابط التجريبية للنوى سوف يعطي أفضل قيم للتطابق مع القيم التجريبية للعلاقة النظرية، فإن من احد الجوانب السلبية ايضا لهذه النموذج هو أنه لم يستطع ان يفسر ماهية القوى النووية أو ان يعطي علاقة واضحة عن القوى النووية .

في هذا البحث، ركزنا في دراستنا على عدد كبير من النوى، حيث كل النوى المدروسة تنتج عن بعضها البعض بقانونية محددة. وذلك، عند قذفها بجسيمات او عندما تتفكك نوى فتنتج نوى أخرى. وبالتالي، عند حدوث تفاعل او تفكك نووي يرافقه تغير في العدد الكتلي. وبالتالي، تتغير طاقة الترابط للنواة. لذلك، سوف نحاول ايجاد علاقة طاقة الترابط انطلاقاً من معادلات التفكك الاشعاعي المتتابع (المتسلسل).

2. هدف البحث

أولاً معالجة كافة النوكليدات المختارة كمجموعات بطريقة نفترض فيها أن كل نواة تنتج عن نواة اخرى عند حدوث تفكك نووي بصورة مشابهة لسلاسل التفكك الاشعاعي. وعندئذ تكون طاقة الترابط التجريبية لهذه النوكليدات لقانونية محددة ما. **ثانيا** إيجاد صيغة نظرية جديدة لطاقة الارتباط بدلالة العدد الكتلي بناء على التفككات والتفاعلات النووية بحيث تتوافق بشكل جيد مع النتائج التجريبية وبشكل أفضل من صيغة ويسكاكر.

3. مواد وطرق البحث

3.1. حول علاقة طاقة الترابط النووي

في مجال الفيزياء النووية، كما في بقية الحقول، إن أيَّ نموذجٍ للنواة يتم بناؤه عادةَ اعتماداً على بيانات تجريبية متوفرة عن النواة. ثم يتم التأكد من صحته هذا النموذج من خلال توافقه مع البيانات التجريبية هذه، وفضلاً عن ذلك يجب أن يكون هذا النموذج قادراً على التنبؤ ببعض النتائج التجريبية الأخرى [1].

بناءاً على نموذج قطرة السائل(LDM) liquid drop model تم استنتاج علاقة نصف تجريبية تسمى علاقة الكتلة نصف–التجريبية Semi–empirical mass formula (SEMF)، التي تعرف بصيغة ويساكر Weizsacker's formula أو بعلاقة بث–ويساكر Bethe–Weizsacker formula [1–2]، إن اسم هذه العلاقة SEMF يدل على أنها مكونة من جزأين؛ جزء نظري وجزء تجريبي؛ لقد تم استحصال الجزء النظري لهذه العلاقة اعتماداً على فرضيات نموذج "قطرة السائل" المقترح من قبل جورج غامو George Gamow [3]. يتكون الجزء النظري من عدة حدود كان قد وضعها فيما بعد نيلز بور Niles Bohr و جون أرشيبالد ويلر John Archibald Wheeler [4]. ثم من حين وضع الصياغة النهائية لهذه العلاقة من قبل الفيزيائي الألماني، كارل فريدريش فون ويساكر Carl Friedrich von Weizscker في عام 1935 [5–6]. حتى يومنا هذا، ما تزال بنية هذه الصياغة كما هي، ولاتزال تلقى قبولاً عند الباحثين،

$$E_{Bth}(Z,A) = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} - a_A \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm a_P A^{-\frac{1}{2}} \quad (1)$$

حيث في الجزء النظري لطاقة الترابط binding energy للنواة من: $a_V A$ **حد طاقة حجمية** Volume، و $a_S A^{\frac{2}{3}}$ **حد طاقة سطحية** Surface، و $a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}}$ **حد طاقة كولونية** Coulomb، و $a_A \frac{(A-2Z)^2}{A}$ **حد طاقة اللا-تناظر (أو اللا-تماثل)** Asymmetry، و $a_P A^{-1/2}$ **حد الاقتران** pairing.

ومن ثم ادخلت بعض التحسينات والفرضيات الجديدة لتصبح علاقة طاقة الترابط اكثر تطابقا مع طاقات الترابط التجريبية وتصبح قادرة على تفسير خصائص نووية جديدة فمثلاً، قام ماسمي يامدا (MasamiYAMADA) في عام 1964 بوضع صيغة جديدة للطاقة الارتباط حيث افترض أن المادة النووية قابلة للانضغاط. مما قاد إلى تحسين كبير في شرح السمات الإجمالية لخط استقراريه β [7].

كما حاول Seeger عام 1961و S. DeBenedetti و C.Gut واخرون بإدخال تأثير درجة الحرارة في العلاقة [10-9-8]، وبعض باحثين حددوا المعاملات في علاقة الكتلة- النصف التجريبية بالاعتماد على درجة حرارة من خلال تطابق المربعات الصغرى للمجموعة من النوى في الجدول الدوري اقترح S. DeBenedetti واخرون عدة تعديلات.[11] [12]

في عام 2012 قام Ghahramany واخرون[13] بتقريب جديد لعلاقة طاقة الترابط اعتمادا على نموذج النووي المتكامل integrated nuclear model وتم مقارنتها مع قيم طاقات الترابط التجريبية وقيم الطاقات الترابط وفق قطرة السائل، وفي هذا النموذج قد اعتبر الجسيمات "حرة" في حالة كثيفة كنوع من انواع البلازما.

في عام 2014 قام WANG [14] تم دراسة تأثير الانتشار السطحي التناظري الذي يلعب دور هام في تطور القشرة نيوترونيه من اجل النوى الثقيلة التي تقترب من الخط الحدودي النتروني وحصلوا على القيمة المثلى لقيمة المعامل التناظر، تم وضع علاقة بث-ويساكر المعدلة من اجل النوى الكروية.

قمنا في بحث سابق عام 2021 [15] بتعديل علاقة طاقة الارتباط وفق نموذج قطرة السائل، حيث ركزنا على الطاقة الحرارية المكتسبة من قبل النوى المستقرة كتابع

لعددها الكتلي، واضافة حد حراري على العلاقة بث ويسكاكر، وقد تم اقتراح تصور للنموذج هو النموذج الارضي ان النواة جسيم مشابه للأرض أي النواة مكونة من ثلاث طبقات، طبقة الداخلية قلب (صلب)، طبقة المتوسطة (سائل)، السطحية (غاز).

3.2.الدراسة النظرية

3.2.1 كيفية اختيار مجموعة النوكليدات المدروسة

تتم دراسة 3550 نوكليد من المرجع [16] حيث تتوفر فيه جميع البيانات التجريبية عن الكتل الذرية المعينة تجريبيا للنوكليدات وقيم طاقات الارتباط التجريبية للنوكليون او يمكن حسابها حاسوبياً وفق برنامج ماثكاد وفق العلاقات التالية:

$$E_{\mathrm{Bexp}}(Z,A) = \left[Z \cdot m_p + N m_n - M\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}\right)\right]c^2 \ \mathrm{MeV} \qquad (2)$$

$$E_{\mathrm{Nexp}} = \frac{E_{\mathrm{Bexp}}(Z,A)}{A} \qquad (3)$$

إن النوكليدات تمتلك إما على الأقل نظير أو العديد من النظائر التي قد يصل عددها حتى 18. وكل نوكليد يمتلك عدداً من الايزوبارات[4].

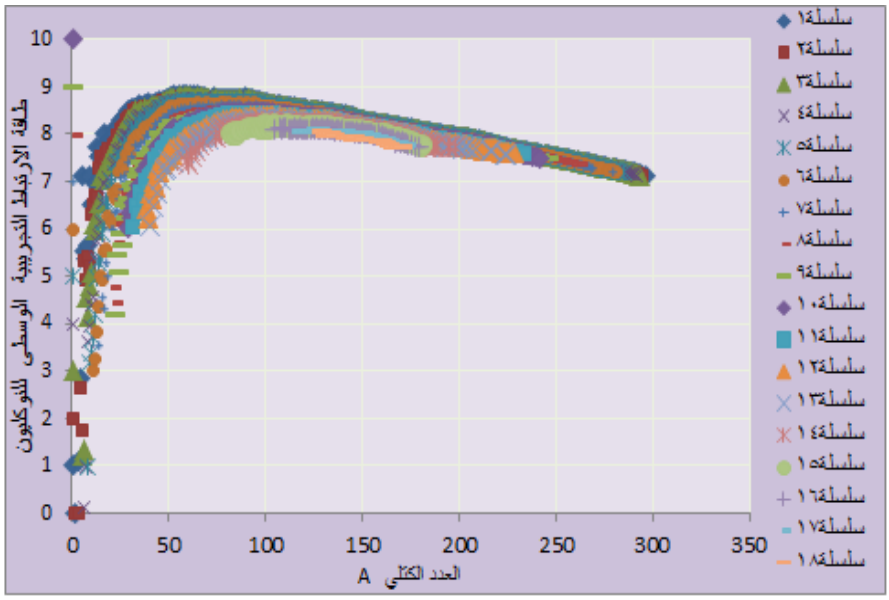
إن كيفية اختيار عناصر المجموعة تتم كما يلي: من أجل نوكليد ذو عدد كتلي معين (مثلاً $A = 2$)، نضع الايزوبار الأول له، الذي يمتلك أعلى طاقة ارتباط تجريبية في المجموعة الأولى. والايزوبار الثاني له، الذي يمتلك طاقة ارتباط تجريبية تلي الايزوبار الأول نضعه في المجموعة الثانية. وهكذا دواليك ....

ومن اجل نوكليد اخر ذو عدد كتلي $A + 1$ من أجل نوكليد ذو عدد كتلي معين A، نضع الايزوبار الأول له، الذي يمتلك أعلى طاقة ارتباط تجريبية في المجموعة الأولى. والايزوبار الثاني له، الذي يمتلك طاقة ارتباط تجريبية تلي الايزوبار الأول نضعه في المجموعة الثانية. والايزوبار الثالث له، الذي يمتلك طاقة ارتباط تجريبية تلي الايزوبار

[4] مثلا عدة نوكليدات ${}^{10}_{4}Be$ ذو طاقة الاعلى في المجموعة الاولى، و ${}^{10}_{5}B$ ذو طاقة الاقل من الاول في المجموعة الثانية، و ${}^{10}_{6}C$ ذو طاقة اقل من العنصرين السابقين في المجموعة الثالثة، و ${}^{10}_{3}Li$ ذو طاقة اقل من العناصر السابقة في المجموعة الرابعة، و ${}^{10}_{7}N$ ذو طاقة اقل من العناصر السابقة في المجموعة الخامسة، و ${}^{10}_{2}He$ ذو طاقة اقل من العناصر السابقة في المجموعة السادسة.

الثاني نضعه في المجموعة الثالثة. وهكذا دواليك ....نستمر بالفرز حتى آخر نوكليد (A = 298)، فنحصل على 18 مجموعة، حيث تم هذا الفرز باستخدام دالة VLOOKUP في برنامج اكسل.

يبين الشكل (1): رسم بياني لمجموعات النوكليدات المختارة في 18 مجموعة، كما تبين الاشكال (2)،(3)،(4) طاقات الارتباط التجريبية الوسطى للنوكليون بدلالة العدد الكتلي للنوكليدات المدروسة المختلفة في المجموعة الثانية والسابعة والحادي عشرعلى التوالي.



الشكل (1): رسم بياني لمجموعات النوكليدات المختارة في 18 مجموعة.

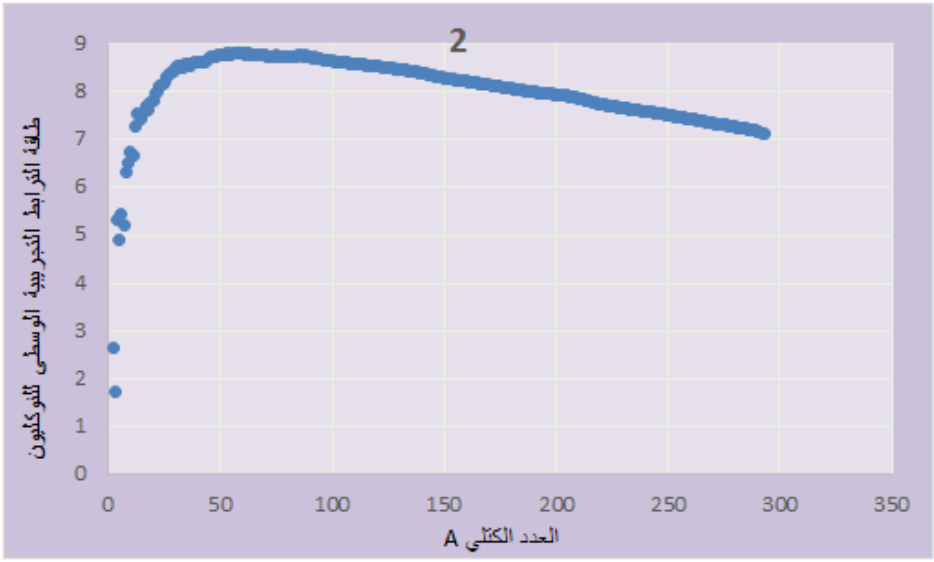
وبهذا الأسلوب تبدو النوكليدات في كل مجموعة وكأنها سلسلة تفكك إشعاعي فيها النوكليد ذو العدد الكتلي الأقل ناتجاً عن النوكليد ذو العدد الكتلي الأكبر الذي يكون قبل مباشرة، مثلاً في حالة التفكك

$$ {}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-A_1}_{Z-Z_1}Y + {}^{A_1}_{Z_1}Y \qquad (4) $$

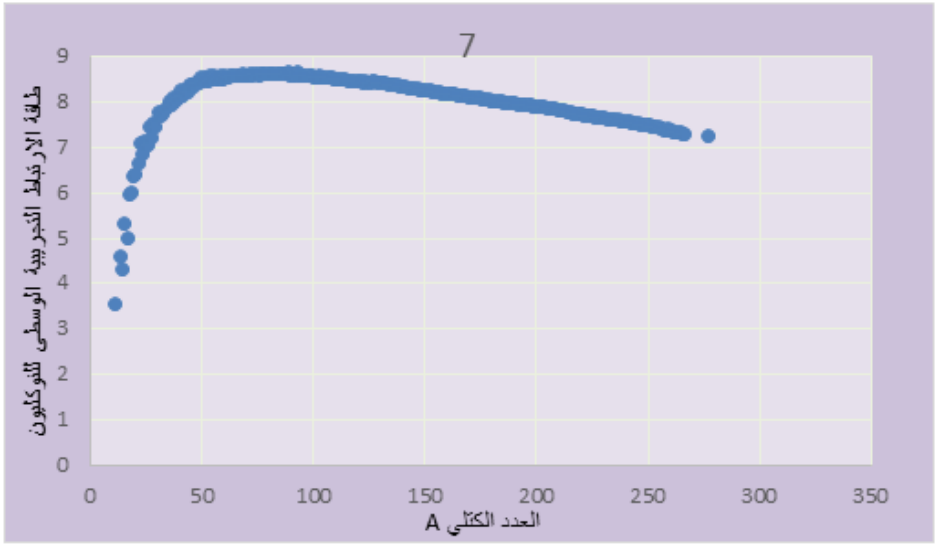
وفي حالة التفاعل

$$ {}^{A-A_1}_{Z-Z_1}Y + {}^{A_1}_{Z_1}Y \rightarrow {}^{A}_{Z}X \qquad (5) $$

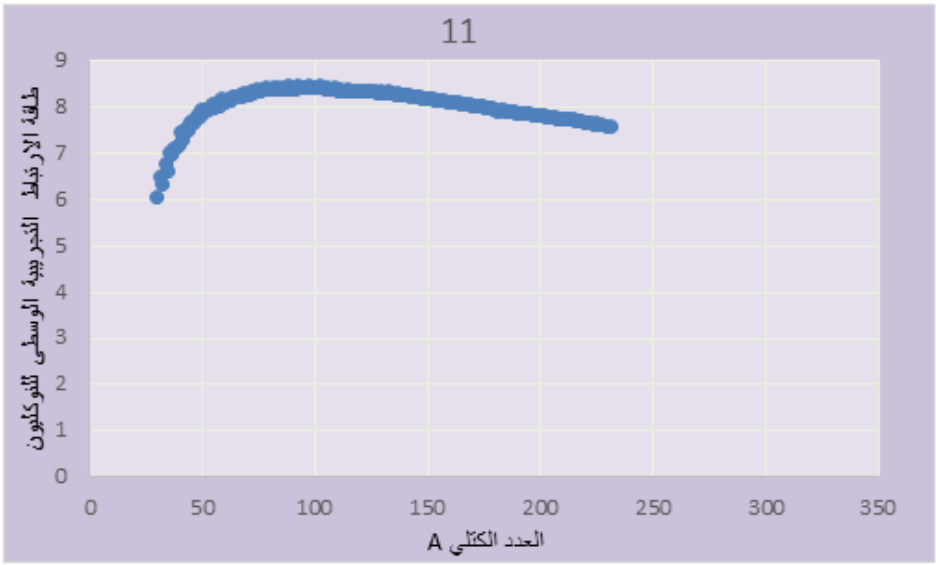
حيث $^{A_1}_{Z_1}Y$ النوكليد او الجسيم الناتج عن تفكك او التفاعل النووي. كل مجموعة مختارة كأنها سلسلة تفاعل او تفكك نووي مشابهة لسلاسل التفكك الإشعاعي الطبيعية.



الشكل (2): طاقة الارتباط التجريبية الوسطى للنوكليون في نوى المجموعة الثانية بدلالة العدد الكتلي.



الشكل (3): طاقة الارتباط التجريبية الوسطى للنوكليون في نوى المجموعة السابعة بدلالة العدد الكتلي.



الشكل (3): طاقة الارتباط التجريبية الوسطى للنوكليون في نوى المجموعة الحادي عشر بدلالة العدد الكتلي.

وبما ان النوى تنتج عن تفكك نوى اخرى بشكل تسلسلي متتابع حيث يتغير عدد النوى N بتغير الزمن(t) كسلسلة كما الشكل التالي

$$N_1(t) \rightarrow N_2(t) \rightarrow N_3(t) \rightarrow \cdots \rightarrow N_n(t)$$

فأن سلاسل التفكك الاشعاعي تخضع لعلاقة التفكك الاشعاعي المتتابع (السلسلي) العامة Radioactive decay equations التالية [17][18]

$$N_n(t) = N_1^0\left(c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{-\lambda_n t}\right) \qquad (6)$$

وبالتالي وبشكل موازي بما انه عند تفكك او تفاعل نواة عن نواة اخرى فأن تغير عدد النوى يتسبب تغير بطاقة ارتباط التجريبية للنوى الناتجة مع تغير العدد الكتلي كسلسلة كما الشكل التالي:

$$E_1(A) \rightarrow E_2(A) \rightarrow E_3(A) \rightarrow \cdots \rightarrow E_n(A)$$

فان شكل علاقة طاقة الارتباط النووي الجديدة المقترحة للمجموعة النظائر المدروسة $E_n(A)$ لها نفس شكل العلاقة $N_n(t)$ في جميع المجموعات النوى المدروسة الموضحة في الشكل (1)

$$E_n(A) = a_1 e^{-B_1 A} + a_2 e^{-B_2 A} + a_3 e^{-B_3 A} + \cdots + a_n e^{-B_n A} \quad (7)$$

ثم اختبرنا مطابقة علاقة لطاقة الارتباط النووي المقترحة مع طاقة الارتباط التجريبية للنوكليونات من أجل حدين ومن اجل ثلاث حدود وأربع حدود منها... فوجدنا أن العلاقة المقترحة النظرية من اجل ثلاث حدود هي أكثر تطابقا مع طاقات الارتباط التجريبية. فذلك قد اقترحنا تابع نظري جديد لطاقة الارتباط الوسطى للنوكليون $E_{\mathrm{NTHnew}}(A)$ كما يلي:

$$E_{\mathrm{NTHnew}}(A) = a_0 e^{-a_1 A} + a_2 e^{-a_3 A} + a_4 e^{-a_5 A} \quad (8)$$

وبالتالي، فإن طاقة الترابط للنواة $E_{\mathrm{BTHnew}}(A)$ تكون:

$$E_{\mathrm{BTHnew}}(A) = A E_{\mathrm{NTHnew}}(A) \quad (9)$$

- a_0 معامل موجب يزيد من طاقة الترابط يتعلق بالطاقة الحجمية للنواة ككل.
- a_1 تعبر عن احتمال ان تتغير طاقة الترابط بتغير وحدة العدد الكتلي A من اجل النواة ككلْ.
- a_2 معامل سالب ينقص من طاقة الارتباط يتعلق بالطاقة السطحية للنواة ككل.
- a_3 تعبر عن احتمال تعبر عن احتمال ان تتغير طاقة الترابط بتغير العدد الكتلي من اجل الطبقة السطحية للنواة للكل.
- a_4 معامل سالب ينقص من طاقة الترابط ويتعلق بمجموع التأثيرات الكولونية للنواة.
- a_5 تعبر عن احتمال ان تتغير طاقة الترابط بتغير العدد الكتلي من اجل التأثيرات الناتجة عن البروتونات في النواة ككل.

3.2.2. ايجاد معاملات علاقة طاقة الارتباط للنوكليون في نوكليدات نظرياً:

نبدء بمعالجة مجموعة النوكليدات الثانية المشار اليها في الشكل (1) والقيم التجريبية لهذه المجموعة مبينة في الشكل (2)

نقوم بمطابقة العلاقة النظرية المقترحة (8) مع قيم طاقات الارتباط التجريبية على برنامج ماثكاد، اولا ندخل عدد النوى $n:=296$ و $i=0\ldots n$، ثم ندخل قيم طاقة الارتباط التجريبية والعدد الكتلي في جدول input table، ثم ندخل مجال للتابع متوافق مع قيم العدد الكتلي A. لإيجاد قيم المعاملات التي تجعل التابع النظري المقترح متوافق بشكل جيد للقيم التجريبية، نتبع الخطوات التالية، أولا نفترض قيم اولية للمعاملات كما يلي

$$Pg:=\begin{pmatrix}9.9\\0.0021\\8\\0.021\\9.3\\0.015\end{pmatrix}$$

وثم نضع مصفوفة المشتقات الجزئية للتابع المقترح التي نرمز لها $F(z,a)$ الموصوف بالنسبة للمعاملات $(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$.

$$F(z,a):=\begin{pmatrix}a_0\cdot e^{-a_1\cdot z}+a_2\cdot e^{-a_3\cdot z}+a_4\cdot e^{-a_5\cdot z}\\e^{-a_1\cdot z}\\-a_0\cdot z\cdot e^{-a_1\cdot z}\\e^{-a_3\cdot z}\\-a_2\cdot z\cdot e^{-a_3\cdot z}\\e^{-a_5\cdot z}\\-a_4\cdot z\cdot e^{-a_5\cdot z}\end{pmatrix}$$

ثم نضع التعليمة التالية genfit

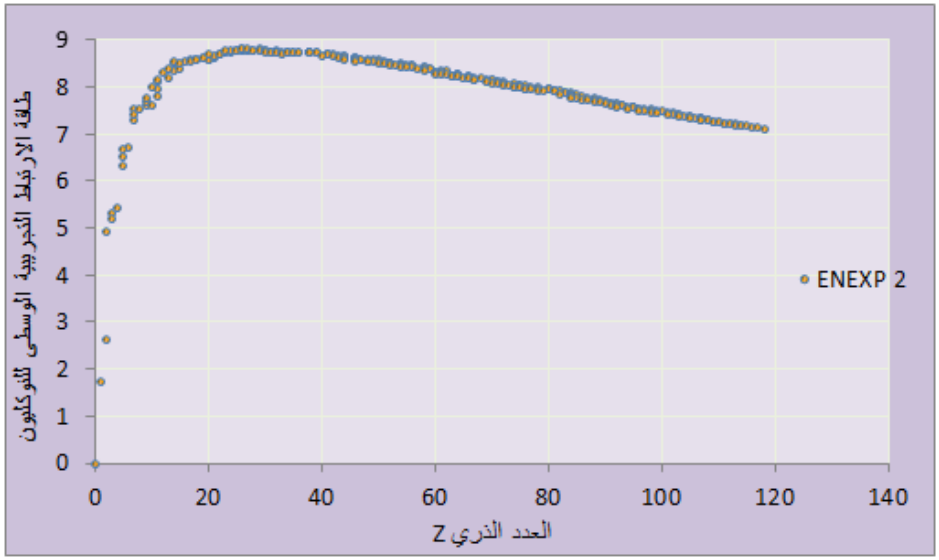
$$GEN:=genfit(A,E,Pg,F)$$

$$GEN=\begin{pmatrix}9.77\\1.052\times 10^{-3}\\-8.052\\0.163\\-2.378\\0.029\end{pmatrix}$$

نعوض هذه المعاملات في المعادلة (8) فنحصل على علاقة طاقة الترابط النظرية الجديدة بدلالة العدد الكتلي

$$E_{\mathrm{NTH2new}}(A)=9.77e^{-1.05\times10^{-3}A}-8.052e^{-0.163A}-2.37e^{-0.029A}\quad(10)$$

وبما ان كل تفكك او تفاعل نووي وفق المعادلتين (4) و(5) يرافقه تغير بالعدد الذري وبالتالي تغير طاقة الترابط للنواة، يبين الشكل (5) تابعية طاقة الارتباط الوسطى التجريبية للنوكليون بدلالة العدد الذري.



الشكل (5): طاقة الارتباط التجريبية الوسطى للنوكليون في نوكليدات المجموعة الثانية بدلالة العدد الذري.

نلاحظ من الشكل(5) ان تغير طاقة الارتباط مع تغير العدد الذري Z له نفس شكل تابعية تغير طاقة الارتباط مع العدد الكتلي وتخضع للمعادلة النظرية المقترحة (8) الممثلة بثلاث حدود اسية، وبناء على اقتراح في دراستنا سابقا[15] للنموذج الارضي بان النواة مكونة من ثلاث طبقات داخلية (صلب) متوسطة (سائل) سطحية (غاز)، فان كل حد من الحدود في المعادلة النظرية يتعلق بالتأثيرات الكولونية بعيدة المدى في كل طبقة والطبقات الاخرى للنواة والتي تسبب تشوه في الشكل الكروي للنواة، كما المعادلة التالية

$$E_{\mathrm{NTHnew}}(Z) = b_0 e^{-b_1 Z} + b_2 e^{-b_3 Z} + b_4 e^{-b_5 Z} \qquad (11)$$

- b_0 معامل يتعلق بالتبادلات الشحنية الكولونية بين البروتونات في الطبقة القلب النواة (الصلب).

- b_1 معامل طاقة الانحناء، ناتجة عن قوى التأثير المتبادل بين البروتونات في الطبقة الداخلية القلب النواة (الصلب) والطبقة المتوسطة (السائل).
- b_2 معامل يتعلق بالتبادلات الشحنية الكولونية بين البروتونات الموجودة في الطبقة المتوسطة (السائل).
- b_3 معامل طاقة الانحناء، ناتجة عن قوى التأثير المتبادل بين البروتونات في الطبقة المتوسطة (السائل) والسطحية(غاز).
- b_4 معامل يتعلق بالتبادلات الشحنية الكولونية بين البروتونات الموجودة في الطبقة السطحية (غاز).
- b_5 معامل طاقة الانحناء، ناتجة عن قوى التأثير المتبادل بين البروتونات في القلب (الصلب) والطبقة السطحية للنواة (غاز).

لإيجاد معاملات التابع المقترح (11) نتبع الخطوات السابقة على برنامج الماثكاد باستخدام تعليمة *genfit function* فنحصل على الصيغة التالية لطاقة الارتباط النظرية بدلالة العدد الذري.

$$E_{\mathrm{NTH2new}}(\mathrm{Z}) = 8.73e^{-2.195\times10^{-3}Z} - 8.96e^{-0.21Z} + 0.66e^{-2.410^{-3}Z} \quad (12)$$

بما ان كل من صيغة طاقة الارتباط الجديدة (10) تابعة للعدد الكتلي، والصيغة طاقة الارتباط الجديدة (12) تابعة للعدد الذري فيمكن مقارنتهم مع صيغة طاقة الترابط النواة وفق نموذج قطرة السائل تابعة للعدد الذري والكتلي وفق الصيغة التالية

$$E_{\mathrm{BTHLDM}} = \left(a_V A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_a A + \frac{a_p}{A^{1/2}}\right) + \left(\frac{a_c}{A^{1/3}} + 4a_a\right) Z + \left(-\frac{a_c}{A^{\frac{1}{3}}} - \frac{4a_a}{A}\right) Z^2 \quad (13)$$

يمكننا ايجاد قيم المعاملات المعامل الحجمي و السطحي و الكولوني و اللاتناظري بطريقة المقارنة بين علاقة طاقة الترابط النظرية الجديدة وعلاقة طاقة الترابط وفق نموذج قطرة السائل، اولا نقوم بنشر العلاقة (10) وفق علاقة منشور تايلور ماكلوران من اجل كل حد اسي ونجعل العلاقة تابعة للعدد الكتلي والذري بشكل يقابل العلاقة (13)

$$E_{\mathrm{NTH2new}}(\mathrm{A}) = 9.77\left[1 - 1.05.10^{-3}A + \frac{(-1.05.10^{-3}A)^2}{2!} + \frac{(-1.05.10^{-3}A)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1.05.10^{-3}A)^N}{N!}\right] - 8.052\left[1 - 0.163A + \frac{(-0.163A)^2}{2!} + \frac{(-0.163A)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-0.163A)^N}{N!}\right] - 2.378\left[1 - 0.029A + \frac{(-0.029A)^2}{2!} + \frac{(-0.029A)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-0.029A)^N}{N!}\right]$$

بعد الاصلاح والنشر

$$E_{\mathrm{NTH2new}}(\mathrm{A}) = -0.66 + 1.3711A - 0.107A^2 + 0.0058A^3 + \cdots + \left(\text{عدد}\right)^N A^N$$

نعوض $A = Z + N$ في الحد الثالث والرابع فتصبح بعد الاصلاح ونضربها بالعدد الكتلي لتعطى طاقة الترابط النواة

$$E_{B\mathrm{TH2new}}(\mathrm{A}) = -0.66A + 1.3711A^2 + 0.321N^2Z + 0.321NZ^2 - 0.107Z^3 - 0.107N^3 + \cdots + \left(\text{عدد}\right)^N A^N \quad (14)$$

نقوم بمقارنة الحدود الثلاثة الاولى من المعادلتين (14) و (13)

$$(a_V - a_a)A = -0.66A \Rightarrow a_V - a_a = -0.66 \quad (15)$$

$$\left(a_s A^{-4/3}\right)A^2 = 1.37\ A^2 \implies a_s A^{-4/3} = 1.37 \quad (16)$$

$$\left(\frac{a_c}{A^{1/3}} + 4a_a\right)Z = 0.321N^2Z \implies \frac{a_c}{A^{1/3}} + 4a_a = 0.321N^2 \quad (17)$$

$$\left(-\frac{a_c}{A^{1/3}} - \frac{4a_a}{A}\right)Z^2 = 0.321NZ^2 \implies -\frac{a_c}{A^{1/3}} - \frac{4a_a}{A} = 0.321N \quad (18)$$

بحل المعادلات حاسوبيا (15), (16), (17), (18)، ومن اجل نواة ذات عدد كتلي فردي مثلا $A = 51$ و $N = 27$ نحصل على قيم المعاملات التالية

$$a_c = -49.48, a_a = 61.882, a_s = 258.7, a_V = 61.22 \ \text{MeV}$$

أن هذه القيم تمثل قيم المعاملات الحجمية و الكولونية و اللاتناظرية وفق صيغة طاقة الترابط الجديدة (10) مختلفة تماما عن القيم معاملات وفق نموذج قطرة السائل(1). اختبرنا العلاقة منشور طاقة الارتباط النظرية الجديدة (14) من اجل حساب قيم علاقة طاقة الارتباط الجديدة حاسوبيا على برنامج ماثكاد، حيث اختبرنا النشر حتى A^{12}, Z^{12}،

وتبينا ان الاكتفاء بالحدود الثلاثة الاولى التابعة ل A,Z، وحتى A^{12}، لا ينتج عنها قيم دقيقة للطاقة الارتباط الوسطى للنوكليون وبذلك لا يمكننا اهمال الحدود ذو الرتبة العليا ولكي نحصل على قيم دقيقة يجب بأخذ نشر كافة الحدود الاسية حتى الرتبة N، وبالتالي ان العلاقة طاقتي الارتباط النظرية الجديدة وفق العلاقتين (10) و(12) مختلفة تماما عن علاقة طاقة الارتباط وفق نموذج قطرة السائل وفق العلاقة (1)، وبذلك ان الفرضيات التي اقترحناها في هذا البحث مختلفة عن فرضيات نموذج قطرة السائل التي شبهت النواة بانها قطرة سائل، وانما نعتمد في العلاقات(10)(12) على اقتراح في تشبيه النواة بانها مكونة من عدة طبقات الداخلية (القلب الصلب)،المتوسطة(سائلة)، السطحية(غاز) وفق تصور النموذج الارضي.

4. النتائج:

من أجل مقارنة قيم المعاملات التي حصلنا عليها وفق العلاقتين الجديدتين لطاقة الارتباط النظرية (8) و(11) مع القيم التي عينها بعض الباحثين في علاقة الترابط وفق نموذج قطرة السائل نقدم الجدول (1).

الجدول (1): قيم المعاملات التي حصلنا عليها مع بعض القيم المعينة من قبل باحثين آخرين بوحدة MeV.

المرجع	a_{sh2}	a_{sh1}	a_{pair}	a_{sym}	a_c	a_s	a_V
green[19]	-	-	0	23.3	0.698	17.23	15.5
fthallah[20]	1.74	0.63	12.03	19.42	0.578	15.29	14.19
Sree [21]			11	23.7	0.724	17.90	15.78
معاملات علاقتنا	-	-	0	25.3	-49.4	258.7	61.22
معاملات علاقتنا	-	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
المجموعة الثانية	-	0.029	-2.37	0.16	-8.05	-1.10^{-3}	9.7
معاملات علاقتنا	-	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0

المجموعة الثانية	-	$2.4.10^{-3}$	0.669	0.211	-8.96	$2.1.10^{-3}$	8.73

حساب طاقة الترابط والارتباط النظرية للنوكليدات في المجموعة الثانية :

بعد تعويض قيم المعاملات في الصيغة طاقة الارتباط النظرية الجديدة بدلالة العد الكتلي في المعادلة(8) نقوم بتعويض قيم العدد الكتلي فنحصل على الجدول(2)

$$E_{\mathrm{NTH2new}}(\mathrm{A}_i) = 9.77e^{-1.05\times10^{-3}A_i} - 8.052e^{-0.163\,A_i} - 2.378e^{-0.029\,A_i}$$

وكذلك الامر بالنسبة الى الصيغة طاقة الارتباط النظرية التابعة للعد الذري نعوض قيم المعاملات والعدد الذري وفق العلاقة الجديدة(11) فنحصل على الجدول(2)

$$E_{\mathrm{NTH2new}}(\mathrm{Z}_i) = 8.731e^{-2.195\times10^{-3}\mathrm{Z}_i} - 8.969e^{-0.211\mathrm{Z}_i} + 0.669e^{-2.410^{-3}\mathrm{Z}_i}$$

تتم حسابات طاقات الارتباط النظرية الجديدة باستخدام برنامج ماثكاد ويظهر الجدول(2)مدى التطابق بين القيم النظرية عن القيم التجريبية، ونقارنها مع طاقة الارتباط وفق نموذج قطرة السائلLDM حيث حصلنا على قيم المعاملات في دراسة سابقة [15]نقوم بتعويضها في العلاقة (1) وحسابها من اجل كافة النوى في المجموعة الثانية

$$E_{\mathrm{BTH}}(A_i, Z_i) =$$

$$15.82A_i - 17.97A_i^{\frac{2}{3}} - 0.73\frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{\frac{1}{3}}} - 20.88\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i} \mp 24.15\,A^{-\frac{1}{2}} \qquad (19)$$

في هذه العلاقة نأخذ بعين الاعتبار حد الاقتران حيث نقسم النوى المجموعة الثانية المدروسة الى نوى فردية و زوجية

$$E_{\mathrm{NTHLDM}}(A_i, Z_i) = \frac{E_{\mathrm{BTHLDM}}(A_i, Z_i)}{A_i} \qquad (20)$$

الجدول(2): قيم طاقات الارتباط التجريبية وطاقات الارتباط النظرية للتابع الجديد وطاقات الارتباط النظرية وفق نموذج قطرة السائل وفق المجموعة الثانية.

$E_{NTH2new}(Z)$	$E_{NTH\ LDM}(A,Z)$	$E_{NTH2new}(A)$	E_{NEXP2}	A	Z
3.47726	0.70004	2.62155	2.64254	3	2
2.11638	-3.73864	3.41631	1.74378	4	1
4.57537	3.95904	4.09759	5.32853	5	3
3.47726	5.11970	4.68224	4.91114	6	2
5.46071	5.33953	5.18460	5.43076	7	4

3	8	5.19699	5.61683	4.18721	4.57537
5	9	6.31450	5.98928	6.13558	6.17375
5	10	6.52631	6.31076	6.03135	6.17375
6	11	6.73276	6.58875	6.66304	6.74729
5	12	6.67314	6.82960	6.27377	6.17375
7	13	7.29438	7.03872	7.04055	7.20787
7	14	7.52684	7.22073	6.98512	7.20787
8	15	7.51864	7.37953	7.32400	7.57698
7	16	7.41804	7.51844	7.21707	7.20787
9	17	7.59684	7.64031	7.54375	7.87204
9	18	7.68286	7.74755	7.52100	7.87204
10	19	7.62150	7.84221	7.71793	8.10714
9	20	7.76577	7.92604	7.74283	7.87204
11	21	7.81944	8.00054	7.85817	8.29368
11	22	7.96688	8.06696	7.85610	8.29368
10	23	7.99919	8.12639	8.13097	8.10714
11	24	8.11006	8.17976	8.06747	8.29368
11	25	8.14592	8.22785	8.26356	8.29368
13	26	8.20099	8.27135	8.07730	8.55636
12	27	8.30887	8.31081	8.36985	8.44093
14	28	8.35713	8.34675	8.48530	8.64603
13	29	8.39391	8.37957	8.45557	8.55636
15	30	8.40473	8.40964	8.22692	8.71485
14	31	8.50411	8.43728	8.52486	8.64603
14	32	8.52571	8.46274	8.64499	8.64603
16	33	8.54716	8.48625	8.52479	8.76680
15	34	8.49284	8.50802	8.45521	8.71485
17	35	8.56990	8.52821	8.55561	8.80509
18	36	8.57113	8.54697	8.58916	8.83233
18	37	8.57685	8.56444	8.57981	8.83233
17	38	8.55082	8.58071	8.56902	8.80509
19	39	8.60681	8.59590	8.59832	8.85063
20	40	8.60252	8.61007	8.61019	8.86170

8.86170	8.61187	8.62332	8.59656	41	20
8.83233	8.76585	8.63569	8.59886	42	18
8.85063	8.73260	8.64726	8.62095	43	19
8.86692	8.60782	8.65807	8.60606	44	21
8.86692	8.73787	8.66816	8.66644	45	21
8.86742	8.77318	8.67759	8.70525	46	22
8.86742	8.74454	8.68638	8.70889	47	22
8.86170	8.76001	8.69456	8.70860	48	20
8.86410	8.74749	8.70218	8.73071	49	23
8.85769	8.76451	8.70925	8.75000	50	24
8.85769	8.74715	8.71579	8.75993	51	24
8.86410	8.73848	8.72184	8.75934	52	23
8.84879	8.74389	8.72742	8.78224	53	25
8.83789	8.74652	8.73253	8.78553	54	26
8.83789	8.73804	8.73721	8.79477	55	26
8.84879	8.75807	8.74146	8.78357	56	25
8.82536	8.72988	8.74530	8.79016	57	27
8.82536	8.71493	8.74875	8.78634	58	27
8.83789	8.82069	8.75183	8.79937	59	26
8.83789	8.86748	8.75453	8.79963	60	26
8.82536	8.82155	8.75689	8.80096	61	27
8.79667	8.69993	8.75890	8.76570	62	29
8.79667	8.78054	8.76059	8.79893	63	29
8.79667	8.75475	8.76195	8.78506	64	29
8.81154	8.81453	8.76301	8.77973	65	28
8.81154	8.84628	8.76376	8.78227	66	28
8.78096	8.80696	8.76423	8.77954	67	30
8.76458	8.73752	8.76442	8.74751	68	31
8.78096	8.81364	8.76433	8.76667	69	30
8.74766	8.80838	8.76398	8.76813	70	32
8.74766	8.78575	8.76338	8.74902	71	32
8.78096	8.81538	8.76253	8.73372	72	30
8.76458	8.79537	8.76144	8.73668	73	31
8.71264	8.77349	8.76012	8.73441	74	34

32	75	8.73864	8.75857	8.79377	8.74766
32	76	8.74764	8.75681	8.81814	8.74766
33	77	8.73922	8.75483	8.78956	8.73032
33	78	8.71650	8.75265	8.74517	8.73032
35	79	8.73245	8.75027	8.76863	8.69470
36	80	8.73856	8.74769	8.77519	8.67655
34	81	8.72826	8.74493	8.76491	8.71264
34	82	8.73488	8.74199	8.78195	8.71264
35	83	8.73586	8.73887	8.76106	8.69470
38	84	8.72341	8.73558	8.73635	8.63981
36	85	8.74124	8.73213	8.75495	8.67655
38	86	8.75318	8.72851	8.76160	8.63981
38	87	8.74939	8.72474	8.73736	8.63981
39	88	8.72741	8.72082	8.68498	8.62130
38	89	8.74899	8.71676	8.73669	8.63981
38	90	8.73854	8.71255	8.75883	8.63981
39	91	8.72818	8.70820	8.72489	8.62130
41	92	8.70752	8.70372	8.64911	8.58409
41	93	8.70880	8.69912	8.68712	8.58409
42	94	8.70761	8.69438	8.68250	8.56543
41	95	8.69079	8.68953	8.69670	8.58409
40	96	8.67724	8.68456	8.72030	8.60271
43	97	8.66861	8.67947	8.64782	8.54676
44	98	8.66583	8.67427	8.63719	8.52808
44	99	8.65373	8.66897	8.62669	8.52808
42	100	8.64695	8.66357	8.69831	8.56543
43	101	8.63606	8.65806	8.66514	8.54676
46	102	8.62603	8.65245	8.58882	8.49076
44	103	8.62745	8.64676	8.64959	8.52808
46	104	8.62962	8.64097	8.61768	8.49076
46	105	8.61496	8.63509	8.60465	8.49076
44	106	8.60268	8.62913	8.65768	8.52808
47	107	8.59834	8.62308	8.58327	8.47211
48	108	8.59503	8.61695	8.57066	8.45349

8.49076	8.61411	8.61075	8.58739	109	46
8.49076	8.63081	8.60447	8.58924	110	46
8.47211	8.59790	8.59812	8.57746	111	47
8.49076	8.61487	8.59170	8.56197	112	46
8.43490	8.55542	8.58521	8.56674	113	49
8.41633	8.54533	8.57865	8.56693	114	50
8.41633	8.53384	8.57203	8.55801	115	50
8.45349	8.58887	8.56535	8.55394	116	48
8.43490	8.55970	8.55861	8.54602	117	49
8.45349	8.57059	8.55181	8.52864	118	48
8.39780	8.52284	8.54496	8.53116	119	51
8.37929	8.51470	8.53805	8.52076	120	52
8.39780	8.52510	8.53109	8.52451	121	51
8.37929	8.52309	8.52408	8.52111	122	52
8.37929	8.50636	8.51702	8.50813	123	52
8.41633	8.52537	8.50991	8.50781	124	50
8.39780	8.50576	8.50276	8.49911	125	51
8.34239	8.48010	8.49557	8.48678	126	54
8.37929	8.49189	8.48833	8.48722	127	52
8.34239	8.48437	8.48105	8.48580	128	54
8.34239	8.46719	8.47373	8.47352	129	54
8.37929	8.47958	8.46638	8.47038	130	52
8.36082	8.46184	8.45898	8.46286	131	53
8.30563	8.44254	8.45156	8.45213	132	56
8.32399	8.44400	8.44409	8.45154	133	55
8.30563	8.44356	8.43660	8.45023	134	56
8.30563	8.42616	8.42907	8.43924	135	56
8.34239	8.43346	8.42151	8.43591	136	54
8.32399	8.41722	8.41393	8.42917	137	55
8.26902	8.40278	8.40631	8.41936	138	58
8.26902	8.38803	8.39867	8.41245	139	58
8.28731	8.38139	8.39100	8.39587	140	57
8.25077	8.36782	8.38331	8.39610	141	59
8.26902	8.39379	8.37559	8.38807	142	58

59	143	8.37089	8.36785	8.36549	8.25077
58	144	8.35512	8.36009	8.38098	8.26902
61	145	8.34502	8.35230	8.32538	8.21440
62	146	8.33666	8.34450	8.31328	8.19627
60	147	8.32457	8.33667	8.34043	8.23257
60	148	8.31783	8.32883	8.34892	8.23257
61	149	8.30263	8.32097	8.32247	8.21440
60	150	8.28963	8.31309	8.33521	8.23257
61	151	8.28177	8.30519	8.31329	8.21440
64	152	8.27581	8.29728	8.27384	8.16013
62	153	8.26917	8.28935	8.29639	8.19627
64	154	8.26659	8.28141	8.27706	8.16013
64	155	8.25475	8.27346	8.26425	8.16013
63	156	8.24510	8.26549	8.26179	8.17818
63	157	8.23999	8.25751	8.26857	8.17818
66	158	8.23216	8.24952	8.23300	8.12414
64	159	8.22795	8.24151	8.25189	8.16013
64	160	8.22307	8.23350	8.25804	8.16013
66	161	8.21447	8.22547	8.22147	8.12414
65	162	8.20427	8.21744	8.21781	8.14211
67	163	8.19825	8.20940	8.20110	8.10621
68	164	8.19071	8.20134	8.19110	8.08831
66	165	8.18396	8.19328	8.20710	8.12414
66	166	8.17706	8.18522	8.21235	8.12414
67	167	8.17056	8.17714	8.18988	8.10621
67	168	8.15673	8.16906	8.17355	8.10621
69	169	8.15545	8.16097	8.15801	8.07046
70	170	8.14798	8.15288	8.14841	8.05264
70	171	8.13898	8.14478	8.13738	8.05264
69	172	8.13122	8.13667	8.13899	8.07046
69	173	8.12439	8.12856	8.14511	8.07046
71	174	8.11241	8.12045	8.10528	8.03487
71	175	8.10983	8.11233	8.11444	8.03487
72	176	8.10243	8.10421	8.10513	8.01713

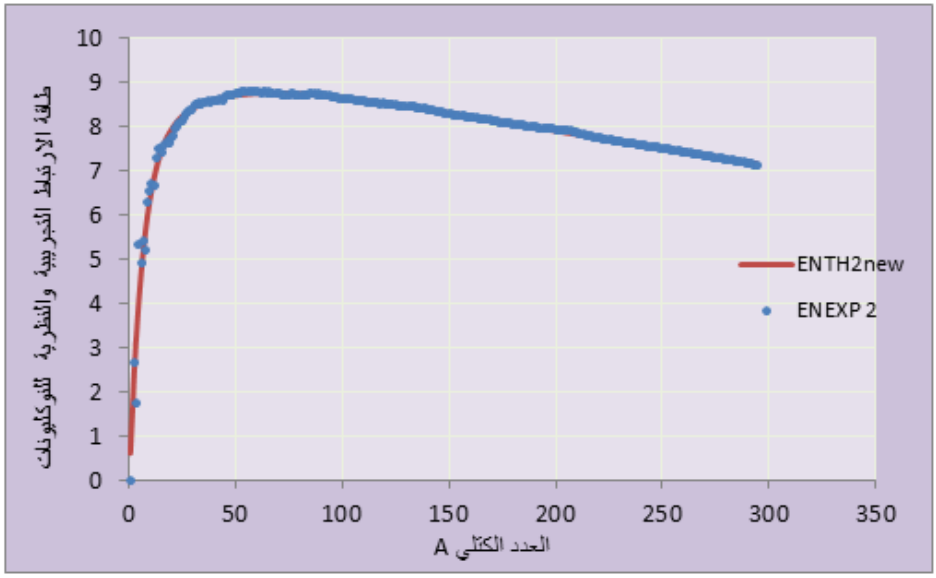
8.01713	8.09411	8.09609	8.09265	177	72
8.05264	8.12098	8.08796	8.08204	178	70
8.03487	8.10024	8.07984	8.07475	179	71
7.98177	8.06126	8.07170	8.06674	180	74
8.01713	8.08268	8.06357	8.06181	181	72
8.01713	8.08763	8.05544	8.05440	182	72
7.99943	8.06452	8.04730	8.04667	183	73
7.96415	8.02070	8.03916	8.03366	184	75
7.96415	8.02988	8.03103	8.03167	185	75
7.94657	8.01820	8.02289	8.02385	186	76
7.98177	8.03794	8.01475	8.01469	187	74
7.98177	8.04230	8.00661	8.00839	188	74
7.96415	8.01993	7.99848	8.00151	189	75
7.96415	8.00636	7.99034	7.98924	190	75
7.92903	7.98626	7.98220	7.98852	191	77
7.91153	7.97480	7.97407	7.98324	192	78
7.94657	7.99323	7.96593	7.97563	193	76
7.94657	7.99709	7.95780	7.97116	194	76
7.92903	7.97536	7.94967	7.96440	195	77
7.87664	7.93037	7.94154	7.95534	196	80
7.91153	7.95693	7.93341	7.95557	197	78
7.87664	7.93116	7.92528	7.95206	198	80
7.87664	7.92186	7.91716	7.94556	199	80
7.91153	7.95202	7.90904	7.93814	200	78
7.89406	7.93084	7.90092	7.93445	201	79
7.85925	7.89162	7.89281	7.92639	202	81
7.85925	7.89858	7.88470	7.92600	203	81
7.84190	7.88738	7.87659	7.92021	204	82
7.84190	7.87818	7.86848	7.91439	205	82
7.85925	7.88221	7.86038	7.91102	206	81
7.85925	7.88642	7.85228	7.90588	207	81
7.82459	7.84828	7.84419	7.88980	208	83
7.82459	7.85467	7.83610	7.88772	209	83
7.80731	7.84353	7.82801	7.87440	210	84

84	211	7.85863	7.81993	7.83446	7.80731
82	212	7.84290	7.81185	7.86246	7.84190
85	213	7.82995	7.80378	7.81382	7.79008
86	214	7.81737	7.79571	7.80061	7.77288
84	215	7.80719	7.78764	7.82404	7.80731
84	216	7.79763	7.77958	7.82765	7.80731
85	217	7.78375	7.77153	7.80548	7.79008
84	218	7.76995	7.76348	7.81799	7.80731
87	219	7.76093	7.75543	7.77028	7.75572
88	220	7.75174	7.74739	7.75716	7.73860
88	221	7.74099	7.73936	7.74942	7.73860
86	222	7.73315	7.73133	7.78331	7.77288
87	223	7.72262	7.72330	7.76152	7.75572
89	224	7.70990	7.71528	7.72054	7.72152
89	225	7.70525	7.70727	7.72678	7.72152
90	226	7.69698	7.69926	7.71370	7.70447
90	227	7.68712	7.69126	7.70608	7.70447
88	228	7.68092	7.68326	7.73916	7.73860
89	229	7.67203	7.67527	7.71773	7.72152
91	230	7.66147	7.66729	7.67751	7.68747
91	231	7.65781	7.65931	7.68333	7.68747
92	232	7.65157	7.65134	7.67028	7.67050
92	233	7.64344	7.64337	7.66280	7.67050
90	234	7.63519	7.63541	7.69524	7.70447
91	235	7.62704	7.62746	7.67410	7.68747
93	236	7.61861	7.61951	7.63452	7.65356
93	237	7.61420	7.61157	7.63999	7.65356
92	238	7.60785	7.60363	7.65893	7.67050
93	239	7.59941	7.59570	7.63621	7.65356
92	240	7.58997	7.58778	7.65154	7.67050
95	241	7.58269	7.57986	7.59883	7.61981
95	242	7.57422	7.57195	7.59161	7.61981
95	243	7.56922	7.56405	7.59676	7.61981
94	244	7.56322	7.55616	7.61533	7.63667

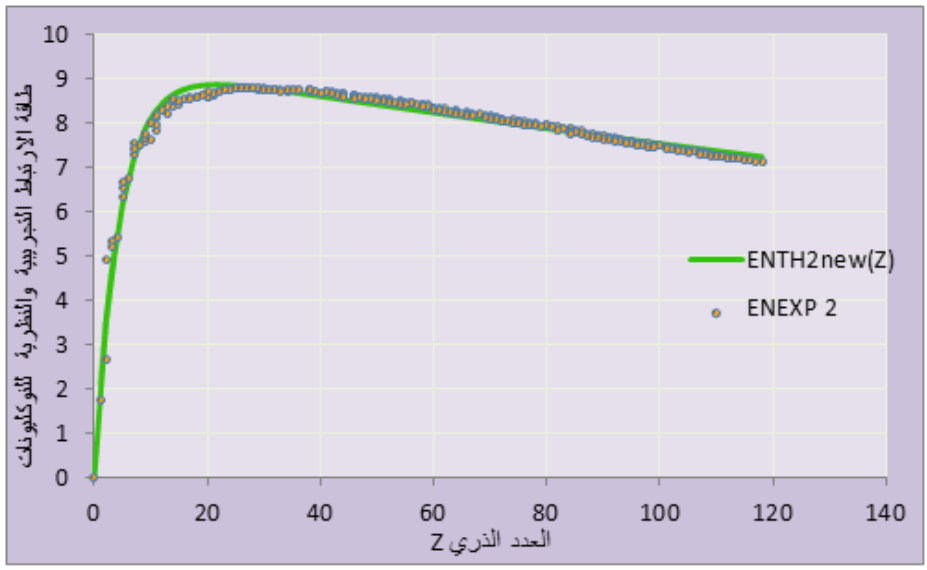
7.61981	7.59292	7.54827	7.55399	245	95
7.63667	7.60807	7.54038	7.54460	246	94
7.58621	7.55587	7.53251	7.53818	247	97
7.56946	7.54115	7.52464	7.53056	248	98
7.60299	7.56879	7.51678	7.52399	249	96
7.60299	7.57195	7.50892	7.51721	250	96
7.58621	7.54980	7.50107	7.50781	251	97
7.60299	7.56483	7.49323	7.49750	252	96
7.55275	7.51302	7.48539	7.49197	253	99
7.53608	7.49830	7.47757	7.48415	254	100
7.56946	7.52579	7.46975	7.47637	255	98
7.56946	7.52879	7.46193	7.46996	256	98
7.55275	7.50687	7.45412	7.46048	257	99
7.55275	7.49854	7.44633	7.45004	258	99
7.51944	7.47030	7.43853	7.44392	259	101
7.50284	7.45557	7.43075	7.43587	260	102
7.50284	7.44960	7.42297	7.42738	261	102
7.51944	7.46053	7.41520	7.42012	262	101
7.48628	7.42859	7.40743	7.40987	263	103
7.48628	7.42272	7.39968	7.40211	264	103
7.46975	7.40728	7.39193	7.39335	265	104
7.48628	7.42116	7.38419	7.38723	266	103
7.45326	7.38570	7.37645	7.37594	267	105
7.45326	7.38065	7.36872	7.36715	268	105
7.43681	7.36383	7.36100	7.35747	269	106
7.45326	7.38051	7.35329	7.35256	270	105
7.42039	7.34171	7.34558	7.33748	271	107
7.42039	7.33746	7.33789	7.32939	272	107
7.42039	7.34361	7.33020	7.32515	273	107
7.40401	7.32611	7.32251	7.31547	274	108
7.40401	7.32188	7.31484	7.30698	275	108
7.42039	7.33844	7.30717	7.30326	276	107
7.40401	7.32297	7.29951	7.29484	277	108
7.42039	7.33683	7.29185	7.28925	278	107

109	279	7.27571	7.28421	7.30163	7.38767
109	280	7.26809	7.27657	7.29682	7.38767
110	281	7.25871	7.26894	7.28003	7.37136
110	282	7.25619	7.26131	7.28579	7.37136
111	283	7.24047	7.25370	7.25818	7.35509
111	284	7.23426	7.24609	7.25411	7.35509
112	285	7.22389	7.23848	7.23609	7.33885
112	286	7.22207	7.23089	7.24236	7.33885
113	287	7.20524	7.22330	7.21375	7.32265
113	288	7.19950	7.21573	7.21039	7.32265
114	289	7.18808	7.20815	7.19119	7.30649
114	290	7.18675	7.20059	7.19796	7.30649
115	291	7.16874	7.19303	7.16841	7.29036
116	292	7.15598	7.18548	7.14745	7.27427
117	293	7.13532	7.17794	7.11570	7.25821
118	294	7.11957	7.17041	7.09249	7.24219

يبين الشكل (6) مدى التطابق(خط الاحمر) بين طاقات الارتباط الوسطى للنوكليون النظرية الجديدة $E_{NTH2new}(A)$ وفق العلاقة (10) والتجريبية E_{NEXP2} (نقاط زرقاء) بدلالة العدد الكتلي، يبين الشكل (7) مدى التطابق (خط الاخضر) بين طاقات الارتباط الوسطى للنوكليون النظرية الجديدة $E_{NTH2new}(Z)$ وفق العلاقة (12) والتجريبية E_{NEXP2} (نقاط زرقاء) بدلالة العدد الذري من النوكليدات المجموعة الثانية.



الشكل(6): مطابقة قيم طاقات الارتباط الوسطى النظرية مع القيم التجريبية بدلالة العدد الكتلي.



الشكل(7): مطابقة قيم طاقات الارتباط الوسطى النظرية مع القيم التجريبية بدلالة العدد الذري.

نقوم بحساب الفروقات قيم طاقات الارتباط النظرية للنوكليونات عن قيم طاقات الارتباط التجريبية وفق الصيغتين الجديدين (10) (12) ثم نحسب الانحراف المعياري في المجموعة الثانية $\sigma\, new(E_{\mathrm{NTH2new}} - E_{\mathrm{Nexp}})$.

وحساب الانحراف المعياري لطاقة الارتباط النظرية وفق نموذج قطرة السائل عن القيم طاقات الارتباط التجريبية $\sigma\, LDM(E_{\mathrm{NTH2LDM}} - E_{\mathrm{Nexp}})$.

الجدول(3): الانحراف المعياري لطاقة الارتباط النظرية الجديدة عن التجريبية ومقارنتها بالانحراف المعياري لطاقة الارتباط وفق نموذج قطرة السائل عن التجريبية في المجموعة الثانية.

قيم الانحراف المعياري	التابع الاول $E_{NTH2new}(A)$	التابع الثاني $E_{NTH2new}(Z)$
$\sigma\, new$	0.13	0.17
$\sigma\, LDM$	0.36	

5. المناقشة:

عند حدوث أي تفاعل او تفكك نووي سيتغير عدد النوى بتغير الزمن وبتغير عدد البروتونات والنترونات فستتغير طاقة ترابط النواة ولاحظنا ان القيمة الوسطى لطاقة الارتباط بين نوكليونين تتغير مع تغير العدد الكتلي وهذا يعني ان طاقة الارتباط الوسطى بين نوكليونين في النوى ليست متساوية وبالتالي تتغير قوى التأثير المتبادل بين أي نوكليونين اي القوى بين أي نوكليونين ليست متساوية وبالتالي يتغير الكمون النووي ايضا، حيث تمت دراسة الكمون النووي الكمون رايد Reid V_{Reid} [22] الذي يتغير مع تغير البعد وفق الصيغة التالية

$$V_{\mathrm{Reid}}(r) = -10.463\frac{e^{-\mu r}}{\mu r} - 1650.6\frac{e^{-4\mu r}}{\mu r} + 6484.2\frac{e^{-7\mu r}}{\mu r}$$

وايضا تمت دراسة الكثافة النووية وفق الصيغة ودد–ساكسون للكثافة المادة النووية، حيث أن كثافة المادة النووية ليست ثابتة وهي تقريباً تتناقص بصورة أسية مع البعد r. في المنطقة التي تكون فيها كثافة المادة النووية ليست ثابتة، لا يمكننا عندها النظر إلى المادة

النووية على أنها سائل بأي حال من الأحوال، وهذه الافتراضات تختلف عن اسس وفرضيات نموذج قطرة السائل الذي يعتبر ان الكثافة ثابتة و ان القوى النووية متساوية ومستقلة عن الشحنة، وبناء على دراستنا سابقا اقتراحنا للنموذج الارضي بان النواة مكونة من عدة طبقات داخلية –القلب (صلب)، المتوسطة (سائل)، السطحية (غاز) فان الكثافة والكمون والقوى تتغير بين نوكليونات حسب تغير اطوار المادة النووية. وبناء على فرضيات وعلاقات التفكك الاشعاعي وحل معادلة باتيمان Bateman، و صيغ تغير الكمون والكثافة، اقترحنا تابعين اسين جديدين لطاقة الترابط تابع للعد الكتلي $E_{\mathrm{BTH1new}}(A)$ وتابع $E_{\mathrm{BTH1new}}(Z)$ للعدد الذري مكونة من ثلاث حدود اسية، حيث أن معاملات كل حد يتعلق بالتأثيرات الناتجة عن نوكليونات بين طبقات الثلاث المختلفة للنواة وعن النواة ككل. وبناء عليه ان تغير طاقة الترابط في كل جزء من اطوار المادة النووية يمكن ان يفيد في وضع تصور تقريبي لعلاقة للقوى النوى وتطوير علاقة الكثافة النووية في حساب معاملات جديدة للكثافة وللقوى النووية.

6. الاستنتاجات:

- في هذا البحث، عند دراسة عدد كبير من النوى حوالي 3550 وجدنا ان هذه النوكليدات تخضع لقانونية معينة، حيث كل نوكليد يرتبط بالنوكليد الذي يليه او يسبقه عند حدوث تفكك او تفاعل نووي كأنها مشابه لسلاسل اشعاعية.
- ايجاد علاقة لطاقة الارتباط النظرية الجديدة تابعة للعدد الكتلي مشابه لحل معادلة باتيمان Bateman للتفككات النووية وتعطي توافق جيد مع قيم طاقات الترابط التجريبية.
- بناء على النموذج الارضي المقترح تم ايجاد علاقة لطاقة الارتباط النظرية الجديدة تابعة للعدد الذري، والتي استطعنا من خلالها تفسير التأثيرات الكولونية المتبادلة بين البروتونات في ثلاث طبقات للنواة والتي تسبب تشوه في شكل النواة اللاتناظري.

- أظهرت النتائج الاحصائية للانحراف المعياري مدى دقة النموذج المقترح في تحديد طاقة الترابط النووية وتفسير بعض الخصائص النووية.

7. المراجع

[1] VAHID, Mirzaei Mahmoud Abadi; MOHSEN, Mirhabibi; BAGHER, Askari Mohammad. Estimation of Semi-Empirical Mass Formula Coefficients. Nuclear Science, 2017, 2.1: 11-15.

[2] BAILEY, David. Semi-empirical nuclear mass formula. *PHY357: Strings & Binding Energy. University of Toronto. Retrieved*, 2011, 03-31.

[3] WEIZSÄCKER, CF v. Zur theorie der kernmassen. *Zeitschrift für Physik*, 1935, 96.7: 431-458.

[4] SMAGULOV, Samat; LOGACHEV, Vadim. Nuclear Tests in the USSR: The Red Book (From Nuclear History: Fear, Horror and Nuclear Blackmail) Anatoliy Matushchenko Co-Chairman of the Interagency Expert Commission under the Scientific Research Institute for Pulse Engineering, and Advisor to. *Energy, Society and Security*, 2008, 405.

[5] GAMOW, George. Mass defect curve and nuclear constitution. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 1930, 126.803: 632-644.

[6] TELLER, Edward; WHEELER, John A. On the rotation of the atomic nucleus. *Physical Review*, 1938, 53.10: 778.

[7] YAMADA, Masami. Semi-Empirical Mass Formula for Compressible Nuclei. *Progress of Theoretical Physics*, 1964, 32.4: 512-541.

[8] SEEGER, Philip A. Semi empirical atomic mass law. *Nuclear Physics*, 1961, 25: 1-IN1.

[9] Davidson, N. J., et al. "A semi-empirical determination of the properties of nuclear matter." Nuclear Physics A 570.1 (1994).

[10] C.GUTE ,E.STRUMERGR,M.BRACK,"liquid drop paramter for hot nuclei" , Vol205,num4 , 1988.

[11]S. DeBenedetti, Nuclear interactions (Wiley, New York, 1964).

[12] Singh, BirBikram , et al "Temperature-dependent Seeger's liquid drop energy for nuclei up to Z=118". arXiv preprint arXiv: 1101.039(2011).

[13]GHAHRAMANY, Nader; GHARAATI, Shirvan; GHANAATIAN, Mohammad. New approach to nuclear binding energy in integrated nuclear model. *Journal of Theoretical and Applied Physics*, 2012, 6: 1-5.

[14]WANG, Ning, et al. Surface diffuseness correction in global mass formula. *Physics Letters B*, 2014, 734: 215-219

[15]Alaa Khodari, Dr. Abdullah Rastanawi, Dr. Suleiman Dibo.
DEVELOP SEMI-EMPIRICAL MASS FORMULA BY ADDING A THERMAL TERM INDEPENDENTLY. Phy lettere ,2021.

[16] HUANG, W. J., et al. The AME 2020 atomic mass evaluation (I). Evaluation of input data, and adjustment procedures. Chinese Physics C, 2021, 45.3: 030002.

[17] SMITH, Blaine T. Introduction to radioactivity and radioactive decay. Nuclear Pharmacy: Concepts and Applications in Nuclear Pharmacy, Pharmaceutical Press, London, 2010.

[18].BATEMAN, Harry. The solution of a system of differential equations occurring in the theory of radioactive transformations. In: Proc. Cambridge Philos. Soc. 1910. p. 423-427.

[19] GREEN, Alex ES. Coulomb radius constant from nuclear masses. *Physical Review*, 1954, 95.4: 1006.

[20] ALDAWDY, Fadwa; AL-JOMAILY, Firas Mohammed Ali. Fitting the Nuclear Binding Energy Coefficients for Liquid Drop Model and Adding a mathematical terms to the Closed Shell of Magic Nuclei. Arab Journal of Nuclear Sciences and Applications, 2022, 55.4: 150-160.

[21] HARSHA, NR Sree. The tightly bound nuclei in the liquid drop model. *European Journal of Physics*, 2018, 39.3: 035802.

[22] REID JR, Roderick V. Local phenomenological nucleon-nucleon potentials. *Annals of Physics*, 1968, 50.3: 411-448.

دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية ذات أمثال متغيرة زمنياً

ايمان احمد حسين[1] أ.د. سامح العرجه[2]

ملخص البحث:

ندرس في هذا البحث استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية بمعاملات متغيرة زمنياً، وتشمل الدراسة الجمل المتجانسة وغير المتجانسة.

في البداية ذكرنا مبرهنات وتعاريف أساسية في الاشتقاق الكسري، بالإضافة إلى تعاريف ومفاهيم أساسية في الاستقرار، ثم تطرقنا إلى عرض متراجحات أساسية لدراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية كسرية بمعاملات متغيرة، وهي تعتبر أداة مهمة في الدراسة.

بالاعتماد على نظريات تابع ليبانوف وتابع ميتاج- ليفلر، حصلنا على ثلاث مبرهنات للاستقرار وهذه المبرهنات تعطي شروط كافية لاستقرار حل الجمل المتجانسة وغير المتجانسة.

كلمات مفتاحية: الجمل الكسرية، تابع ميتاج-ليفلر، الاستقرار، تابع ليبانوف، متراجحة جورنويل-بيلمان المعدلة، المشتق الكسري المتزاو، التفاضل والتكامل الكسري.

Study Stability Solution system of fractional differential equations with variable coefficients

Abstract

In this paper, we study stability of system of fractional equations with variable

coefficients, which includes the homogeneous and nonhomogeneous cases

Whereas at the beginning we mentioned theorems and basic definitions of fractional derivation, in addition to definition and basic concepts of stability. Then we dealt with presenting basic inequalities to study the stability of fractional differential systems, which is an important tool in the study.

Based on the theories Lyapunov function and Mittag- Leffler function, we obtain three theorems on stability, which give some sufficient conditions on stability, for homogeneous systems and the nonhomogeneous systems.

Keywords: Fractional system, Mittag- Leffler function, Stability, Lyapunov function, Modified Gronwall- Bellman inequality, Conformable fractional derivative, Fractional calculus.

1-مقدمة:

يعود تاريخ التفاضل والتكامل من مرتبة كسرية والذي هو تعميم للتفاضل والتكامل من مرتبة صحيحة إلى أكثر من 300 سنة.

في العقود الأخيرة الماضية جذبت النماذج الرياضية من مرتبة كسرية اهتماماً متزايداً، وذلك منذ أن أظهرت أفضلية في وصف الذاكرة والخواص الوراثية للعمليات الشاذة [6,12].

لقد تطورت نظرية الاستقرار للجمل من مرتبة كسرية نظراً للدور الهام الذي تلعبه نظرية الاستقرار في الهندسة والتطبيقات الفيزيائية [11].

قدّم العديد من الباحثين طرائق متنوعة لدراسة استقرار حل الجملة المدروسة.

تم تقديم شروط لازمة وكافية لاستقرار حل الجملة المعطاة باستخدام مبدأ القيم الذاتية لمصفوفة أمثال الجملة المدروسة [8].

تم تمديد طريقة ليبانوف المستخدمة في دراسة استقرار حل الجمل الغير خطية من مرتبة صحيحة إلى دراسة استقرار حل الجمل الغير خطية من مرتبة كسرية [3,10].

تم تقديم معايير كافية لإثبات الاستقرار التقاربي لحل الجمل الغير خطية من مرتبة كسرية وذلك باستخدام تابع ميتاج ليفلر [1].

تم تقديم شروط لازمة وغير كافية لإثبات استقرار حل الجمل الغير خطية من مرتبة كسرية باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة، عام 2018 قدم رحيم وسيماب بحثاً حول موضوع النقطة الثابتة يتضمن الشروط الكافية لوجود واستقرار حل معادلة تفاضلية كسرية غير خطية [9].

نظراً للصعوبات التي تواجهنا في دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية ذات أمثال متغيرة زمنياً، من خلال هذا البحث قدمنا طريقة فعالة للتغلب على هذه الصعوبات، في هذه الطريقة لا نحتاج لإيجاد حل الجملة المدروسة.

تتلخص هذه الطريقة بالاعتماد على مبدأ ليبانوف في الاستقرار بالإضافة للاستفادة من خواص تابع ميتاج ليفلر حيث استطعنا الحصول على شروط تضمن لنا استقرار حل الجملة المدروسة.

2-أهمية البحث:

إن دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية ذات أمثال متغيرة زمنياً أمر صعب ومعقد، نقدم من خلال هذا البحث طريقة عملية وفعالة للحصول على الاستقرار، وذلك بالاعتماد على تابع ليبانوف بالإضافة إلى استخدام متراجحة جورنويل-بيلمان المعدلة.

3-مشكلة البحث:

إن دراسة الاستقرار أمر بالغ الأهمية في المجالات التطبيقية، تأتي مشكلة البحث لتوضح أهمية دراسة استقرار الحل في الحصول على أنظمة مستقرة زمنياً.

4- هدف البحث:

إن هدف البحث هو تقديم معايير مختلفة لدراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية ذات أمثال متغيرة زمنياً. حيث نهدف من خلال هذا البحث إلى وضع نظريات تتضمن شروط كافية لاستقرار حل الجملة المعنية بالدراسة، وذلك باستخدام أدوات ومفاهيم رياضية مختلفة مثل: تابع ليبانوف، متراجحة جورنويل-بيلمان المعدلة، خواص تابع ميتاج-ليفلر.

5- أساسيات:

تعريف (1): [13] ليكن لدينا: $f:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ تابع قابل للمفاضلة n مرة يعرف المشتق الكسري المتزاو للتابع f بالشكل:

$$ {}^{G}D^{\alpha}f(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{(n)}\left(te^{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\varepsilon t^{1-\alpha}}\right)-f^{(n)}(t)}{\varepsilon}$$

$\Gamma(\ )$: تابع غاما، $n\in\mathbb{N},t>0,n-1<\alpha<n$

خاصة (1): [13] إذا كان التابع $f:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ قابل للمفاضلة α مرة في النقطة $t>0$ عندئذٍ:

$$ {}^{G}D^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}t^{1-\alpha}\frac{df}{dt} \qquad ;\ 0<\alpha<1 $$

مبرهنة (1): [13] لتكن $0<\alpha\le 1$ والتوابع f,g قابلة للمفاضلة α مرة في النقطة $t>0$ عندئذٍ:

$$ (1)\ {}^{G}D^{\alpha}(af+bg)=a\left({}^{G}D^{\alpha}f\right)+b\left({}^{G}D^{\alpha}g\right) \qquad ;\ \forall a,b\in\mathbb{R} $$

$$ (2)\ {}^{G}D^{\alpha}(\lambda)=0 \qquad ;\ \lambda=const $$

$$ (3)\ {}^{G}D^{\alpha}(fg)=\left({}^{G}D^{\alpha}f\right)g+\left({}^{G}D^{\alpha}g\right)f $$

$$ (4)\ {}^{G}D^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{\left({}^{G}D^{\alpha}f\right)g-\left({}^{G}D^{\alpha}g\right)f}{g^{2}} $$

$$ (5)\ {}^{G}D^{\alpha}(f\circ g)(t)={}^{G}D^{\alpha}(f)\left(g(t)\right){}^{G}D^{\alpha}(g)(t) $$

تعريف (2): [13] ليكن f تابع قابل للمكاملة ومعرّف على $(t_0,t]$ حيث $t>t_0,t_0\ge 0$ يعرف التكامل الكسري للتابع f من المرتبة $\alpha\in\mathbb{R}$ بالشكل:

$$ \mathrm{I}_{t_0}^{\alpha}f(t)=\Gamma(1-\alpha)\int_{t_0}^{t}\tau^{\alpha-1}f(\tau)d\tau $$

مبرهنة (2): [13] ليكن f تابع مستمر والتكامل الكسري للتابع f من المرتبة α موجود عندئذٍ يكون:

$$ {}^{G}D^{\alpha}\left(\mathrm{I}_{t_0}^{\alpha}f\right)(t)=f(t) $$

حيث: $t>t_0,t_0\ge 0,\alpha\in(0,1)$

تعريف (3): [3] يعطى تابع ميتاج ليفلر بوسيط واحد α بالعلاقة:

$$\mathrm{E}_{\alpha}\left(z\right)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{z^{\kappa}}{\Gamma\left(\alpha\kappa+1\right)} \qquad ;\alpha>0,\ \alpha\in\mathbb{C},z\in\mathbb{C}$$

يعطى تابع ميتاج ليفلر بوسيطين α,β بالعلاقة:

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}\left(z\right)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{z^{\kappa}}{\Gamma\left(\alpha\kappa+\beta\right)} \qquad ;\ \beta>0,\ \alpha>0$$

خاصة (2): [2] من أجل $0<\alpha\le 1$:

$$(1)\ \int_{0}^{t}\frac{d^{\alpha}\tau}{\tau}=\ln_{\alpha}t$$
$$(2)\ \mathrm{E}_{\alpha}\left(\left(t+\tau\right)^{\alpha}\right)=\mathrm{E}_{\alpha}\left(t^{\alpha}\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\tau^{\alpha}\right)$$

خاصة (3): [7] لتكن $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{C}^{n\times n},\alpha,\beta\in\mathbb{C},\alpha>0$ عندئذٍ:

$$\mathrm{A}\mathrm{E}_{\alpha,\beta}\left(\mathrm{A}\right)=\mathrm{E}_{\alpha,\beta}\left(\mathrm{A}\right)\mathrm{A}$$

خاصة (4): [5] من أجل:

$$\frac{\alpha\pi}{2}<\arg\left(\mathrm{Z}\right)<2\pi-\frac{\alpha\pi}{2} \qquad ;\left|\arg\left(\mathrm{Z}\right)\right|>\frac{\alpha\pi}{2}$$

يعرف تابع ميتاج–ليفلر $\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\lambda t^{\alpha}\right)$ بالعلاقة:

$$\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\lambda t^{\alpha}\right)\cong\begin{cases}1-\lambda\dfrac{t^{\alpha}}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}\cong\exp\left\{-\lambda\dfrac{t^{\alpha}}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}\right\} & ;\ t\to 0^{+}\\ \dfrac{t^{-\alpha}}{\Gamma\left(1+\alpha\right)} & ;t\to\infty\end{cases}$$

حيث: $Z\in\mathbb{C},\lambda>0,0<\alpha<1,t\in\left[0,\infty\right)$

5–نتائج أساسية:

جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية متجانسة بمعاملات متغيرة:

بفرض أنه لدينا الجملة:

$$ {}^{G}D^{\alpha}x\left(t\right)=\mathrm{A}\left(t\right)x\left(t\right) \qquad (1) $$

حيث: $x\left(t\right)=\left[x_1\left(t\right),x_2\left(t\right),.....,x_n\left(t\right)\right]^T:[t_0,t[\to\mathbb{R}^n$ ، $t>t_0,0<\alpha<1$

$\mathrm{A}\left(t\right):[t_0,\infty[\to\mathbb{R}^{n\times n}$ مصفوفة تابعية مستمرة على $[t_0,\infty[$

T: يرمز إلى منقول المتجه $x\left(t\right)$

تعريف (4): [5] نقول بأن حل الجملة المدروسة مستقر إذا وجد من أجل كل $\zeta>0$ عدد $\delta>0$ بحيث أنه إذا تحقق: $\left\|x\left(t_0\right)\right\|<\delta$ فإن ذلك يقتضي أنّ:

$$ \left\|x\left(t\right)\right\|<\zeta \qquad ;\forall t\in[t_0,T]\subset\mathbb{R} $$

$\|\ \|$: يرمز إلى نظيم المتجه $x\left(t\right)$

تعريف (5): [5] نقول بأن حل الجملة المدروسة مستقر تقاربياً إذا وجد عدد $\delta>0$ بحيث أنه إذا كان $\left\|x\left(t_0\right)\right\|<\delta$ فإن: $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|x\left(t\right)\right\|=0$

تعريف (6): [3] نقول بأن حل الجملة المدروسة مستقر حسب مفهوم ميتاج–ليفلر إذا تحقق الشرط:

$$ \left\|x\left(t\right)\right\|\le\left\{m\left[x\left(t_0\right)\right]\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\lambda\left(t-t_0\right)^{\alpha}\right)\right\}^{b} $$

حيث: $t>t_0,0<\alpha<1$، $\lambda>0,b>0$ ، $m\left(0\right)=0,m\left(x\right)\ge0$، و m_0 هي ثابت ليبشتز

$x\in\mathrm{B}\subset\mathbb{R}^n$

تعريف (7): [4] الحل الصفري للجملة المدروسة مستقر بانتظام بالنسبة لـ t_0 إذا كان:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma(\varepsilon) > 0$ تحقق المتراجحة $\|x_0\| < \sigma(\varepsilon)$ يقتضي تحقق

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad ; t \geq t_0$$

$x(t, t_0, x_0)$: يمثل الحل التذبذبي والذي يحقق الشرط الابتدائي: $x(t_0) = x_0$

تعريف (8): [4] الحل الصفري للجملة المدروسة يكون جاذبي إذا كان:

$$\forall t_0 \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \sigma(t_0) > 0, \exists T(\varepsilon, t_0, x_0) > 0:$$

تحقق $\|x_0\| < \sigma(t_0)$ يقتضي تحقق $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad ; t \geq t_0 + T$ أي

$$\lim_{t \to \infty} x(t, t_0, x_0) = 0$$

تعريف (9): [4] التابع $V(t, x)$ محدد موجب هذا يعني أنه يوجد تابع $\varphi(\|x\|) \in K$ يحقق: $V(t, x) \geq \varphi(\|x\|)$

تعريف (10): [4] نقول عن التابع H أنه من الصف K إذا كان H تابع مستمر ويحقق $H(0) = 0$

نظرية (1): بفرض أن التابع f مستمر على

$\bar{\square} = \{(t, x) \; ; |t - \tau| \leq a - |x - \xi| \leq b\}$ وغير متناقص بالنسبة لـ x وأن $x = \varphi(t)$ مستمر، التابع $\varphi(t)$ يحقق المتراجحة التكاملية:

$$\begin{cases} \varphi(t) \leq \xi + \int_{\tau}^{t} f(s, \varphi(s)) ds & ; \tau \leq t \leq \tau + h \\ \varphi(\tau) \leq \xi \end{cases}$$

وذلك من أجل $|t-\tau|\le a,(t,\varphi(t))\in\bar{\square}$

التابع $\phi(t)$ يحقق المعادلة التفاضلية:

$$\begin{cases}\dfrac{d^{\alpha}x}{dt^{\alpha}}=f(t,x)\\ x(\tau)=\xi\end{cases}$$

حيث $\tau\le t\le\tau+h$ ، عندئذٍ المتراجحة التالية محققة:

$$\varphi(t)\le\phi(t)\quad ;t\in[\tau,\tau+h]$$

حيث $h=\min\left(a,\dfrac{b}{\mathrm{M}}\right)$, $\mathrm{M}=\max\limits_{t,x\in\bar{\square}}|f(t,x)|$

مبرهنة (3): (متراجحة جورنويل–بيلمان المعدلة): بفرض أن التوابع $u(t),g(t)$ توابع مستمرة حقيقية وغير سالبة، و c ثابت حقيقي غير سالب عندئذٍ

$\forall t\in[t_0,t_1]$ ، وبفرض أن: $u(t)\le c+\int\limits_{t_0}^{t}g(\varepsilon)u(\varepsilon)d\varepsilon$

عندئذٍ تتحقق المتراجحة التالية: $u(t)\le c\mathrm{E}_{\alpha}\left(\int\limits_{t_0}^{t}g(\tau)d\tau^{\alpha}\right)$

البرهان: بفرض أنه لدينا المعادلة التفاضلية:

$$\begin{cases}\dfrac{d^{\alpha}V(t)}{dt^{\alpha}}=g(t)V(t)\\ V(t_0)=c\end{cases}$$

والتي تملك الحل:

$$\frac{d^{\alpha}V(t)}{V(t)}=g(t)dt^{\alpha}$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d^{\alpha}V(\tau)}{V(\tau)}=\int_{t_0}^{t}g(\tau)d\tau^{\alpha}$$

$$\ln_{\alpha}\frac{V(t)}{V(t_0)}=\int_{t_0}^{t}g(\tau)d\tau^{\alpha}$$

$$V(t)=c\mathrm{E}_{\alpha}\left(\int_{t_0}^{t}g(\tau)d\tau^{\alpha}\right)$$

حسب النظرية (1) نجد: $u(t)\le V(t)=c\mathrm{E}_{\alpha}\left(\int_{t_0}^{t}g(\tau)d\tau^{\alpha}\right)$

طريقة ليبانوف في الاستقرار: تعتمد هذه الطريقة على إيجاد تابع موجب مشتقه أصغر من الصفر يدعى تابع ليبانوف، إن وجود مثل هذا التابع يعني تماماً استقرار حل الجملة المدروسة.

مبرهنة (4): يكون الحل الصفري للجملة (1) مستقر تقاربياً إذا تحقق الشرط:

$$\|x(t)\|^2\le\frac{\delta_2(t_0)}{\delta_1(t_0)}\|x(t_0)\|^2\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\gamma(t_0)t^{\alpha}\right)$$

حيث: $0<\gamma(t_0)\le\frac{1}{\delta_1(t_0)}$

البرهان: من أجل دراسة استقرار حل الجملة:

$${}^{G}D^{\alpha}x(t)=\mathrm{A}(t)x(t)\qquad(1)$$

نفرض أن:

$$V(t,x)=x^{*}C(t)x$$

وبالتالي فإن:

$$ {}^{G}D^{\alpha}V\left(t,x\right)=\left({}^{G}D^{\alpha}x^{*}\right)C\left(t\right)x+x^{*}\left({}^{G}D^{\alpha}C\left(t\right)\right)x+x^{*}C\left(t\right)\left({}^{G}D^{\alpha}x\right) $$

$$ {}^{G}D^{\alpha}V\left(t,x\right)=x^{*}\mathrm{A}^{*}C\left(t\right)x+x^{*}\frac{d^{\alpha}C\left(t\right)}{dt^{\alpha}}x+x^{*}C\left(t\right)\mathrm{A}x $$

$$ {}^{G}D^{\alpha}V\left(t,x\right)=x^{*}\left[\mathrm{A}^{*}C\left(t\right)+\frac{d^{\alpha}C\left(t\right)}{dt^{\alpha}}+C\left(t\right)\mathrm{A}\right]x $$

لنعتبر:

$$ {}^{G}D^{\alpha}V\left(t,x\right)=-W\left(t,x\right) $$

حيث:

$$ W\left(t,x\right)=x^{*}\mathrm{B}\left(t\right)x $$

عندها:

$$ {}^{G}D^{\alpha}V\left(t,x\right)=-x^{*}\mathrm{B}\left(t\right)x $$

$$ \Rightarrow x^{*}\left[\mathrm{A}^{*}C\left(t\right)+\frac{d^{\alpha}C\left(t\right)}{dt^{\alpha}}+C\left(t\right)\mathrm{A}\right]x=-x^{*}\mathrm{B}\left(t\right)x $$

$$ \Rightarrow \mathrm{A}^{*}C\left(t\right)+\frac{d^{\alpha}C\left(t\right)}{dt^{\alpha}}+C\left(t\right)\mathrm{A}=-\mathrm{B}\left(t\right) \qquad (2) $$

لنوجد أولاً حل المعادلة المتجانسة:

$$ \frac{d^{\alpha}C\left(t\right)}{dt^{\alpha}}+\mathrm{A}^{*}C\left(t\right)+C\left(t\right)\mathrm{A}=0 $$

لنضرب الطرفين من اليسار بـ $\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)$ ومن اليمين بـ $\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)$ نجد:

$$\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}^* t^\alpha\right)\left[\frac{d^\alpha C(t)}{dt^\alpha}+\mathrm{A}^* C(t)+C(t)\mathrm{A}\right]\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}t^\alpha\right)=0$$

$$\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}^* t^\alpha\right)\frac{d^\alpha C(t)}{dt^\alpha}\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}t^\alpha\right)+\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}^* t^\alpha\right)\mathrm{A}^* C(t)\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}t^\alpha\right)+\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}^* t^\alpha\right)C(t)\mathrm{A}\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}t^\alpha\right)=0$$

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\left[\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}^* t^\alpha\right)C(t)\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}t^\alpha\right)\right]=0$$

بمكاملة الطرفين:

$$\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}^* t^\alpha\right)C(t)\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}t^\alpha\right)=C(0) \qquad (3)$$

$$\Rightarrow C(t)=\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}^* t^\alpha\right)C(0)\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}t^\alpha\right)$$

من أجل حل المعادلة غير المتجانسة نعتبر $C(0)$ تابعة لـ t ونشتق:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}C(t)=-\mathrm{A}^*\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}^* t^\alpha\right)C(0)\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}t^\alpha\right)+\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}^* t^\alpha\right)\frac{d^\alpha C(0)}{dt^\alpha}\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}t^\alpha\right)+$$
$$-\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}^* t^\alpha\right)C(0)\mathrm{A}\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}t^\alpha\right)$$

نعوض في المعادلة غير المتجانسة (2) نجد:

$$-\mathrm{A}^*\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}^* t^\alpha\right)C(0)\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}t^\alpha\right)+\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}^* t^\alpha\right)\frac{d^\alpha C(0)}{dt^\alpha}\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}t^\alpha\right)-\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}^* t^\alpha\right)C(0)\mathrm{A}\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}t^\alpha\right)$$
$$+\mathrm{A}^*\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}^* t^\alpha\right)C(0)\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}t^\alpha\right)+\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}^* t^\alpha\right)C(0)\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}t^\alpha\right)\mathrm{A}=-\mathrm{B}(t)$$

$$\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}^* t^\alpha\right)\frac{d^\alpha C(0)}{dt^\alpha}\mathrm{E}_\alpha\left(-\mathrm{A}t^\alpha\right)=-\mathrm{B}(t)$$

$$\Rightarrow\frac{d^\alpha C(0)}{dt^\alpha}=-\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}^* t^\alpha\right)\mathrm{B}(t)\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{A}t^\alpha\right)$$

حسب (3) العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\left[\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\right]=-\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)\mathrm{B}\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)$$

$$\mathrm{I}_{t_0}^{\alpha}\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\left[\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\right]=-\mathrm{I}_{t_0}^{\alpha}\left[\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)\mathrm{B}\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\right]$$

$$\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\Big|_{t_0}^{t}=-\mathrm{I}_{t_0}^{\alpha}\left[\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)\mathrm{B}\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\right]$$

الآن بجعل $t_0=\tau$ و $t\to\infty$ نحصل على:

$$-\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}\tau^{\alpha}\right)C\left(\tau\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}\tau^{\alpha}\right)=-\mathrm{I}_{\tau}^{\alpha}\left[\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)\mathrm{B}\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\right]$$

$$C\left(\tau\right)=\mathrm{I}_{\tau}^{\alpha}\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}\left(t-\tau\right)^{\alpha}\right)\mathrm{B}\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}\left(t-\tau\right)^{\alpha}\right)$$

بتبديل كل t بـ τ وكل τ بـ t نجد:

$$C\left(t\right)=\mathrm{I}_{t}^{\alpha}\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}\left(\tau-t\right)^{\alpha}\right)\mathrm{B}\left(\tau\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}\left(\tau-t\right)^{\alpha}\right)$$

نفرض الآن أن:

$$s=\tau-t$$

$$\Rightarrow ds=d\tau$$

$$\tau\to\infty\Rightarrow s\to\infty \quad \& \ \tau\to t\Rightarrow s\to 0$$

نعوض فنجد:

$$C\left(t\right)=\mathrm{I}_{0}^{\alpha}\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}s^{\alpha}\right)\mathrm{B}\left(s+t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}s^{\alpha}\right)$$

لنفرض أن $\delta_1(t)$ و $\delta_2(t)$ هي دوال القيم الذاتية الصغرى والعظمى على الترتيب للمصفوفة $C(t)$ ومنه يتحقق أن:

$$\delta_1(t)\|x(t)\|^2 \le V(t,x) \le \delta_2(t)\|x(t)\|^2 \quad ; \ t \in (-\infty,+\infty) \qquad (4)$$

بما أن كل من $W(t,x)$ و $V(t,x)$ دوال موجبة تماماً توجد قيمة $0<\gamma(t_0)$ بحيث تحقق:

$$\gamma(t_0)V(t,x) \le W(t,x) \le \|x(t)\|^2$$

$$\gamma(t_0)V(t,x) \le \|x(t)\|^2$$

$$\gamma(t_0)V(t_0,x_0) \le \|x(t_0)\|^2 \Rightarrow \gamma(t_0) \le \frac{\|x(t_0)\|^2}{V(t_0,x_0)}$$

لكن من (4) لدينا:

$$\delta_1(t)\|x(t)\|^2 \le V(t,x) \Rightarrow \delta_1(t_0)\|x(t_0)\|^2 \le V(t_0,x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{V(t_0,x_0)} \le \frac{1}{\delta_1(t_0)\|x(t_0)\|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\|x(t_0)\|^2}{V(t_0,x_0)} \le \frac{1}{\delta_1(t_0)} \Rightarrow \gamma(t_0) \le \frac{1}{\delta_1(t_0)}$$

من جهة أخرى:

$$\gamma(t_0)V(t,x) \le W(t,x)$$

$$\gamma(t_0)V(t,x) \le -{}^{G}D^{\alpha}V(t,x)$$

$$\Rightarrow -\gamma(t_0)V(t,x) \ge {}^{G}D^{\alpha}V(t,x)$$

$$\frac{{}^{G}D^{\alpha}V\left(t,x\right)}{V\left(t,x\right)}\leq-\gamma\left(t_0\right)\Rightarrow$$

$$\frac{d^{\alpha}V\left(t,x\right)}{V\left(t,x\right)}\leq-\gamma\left(t_0\right)dt^{\alpha}\Rightarrow$$

$$\int_0^t\frac{d^{\alpha}V\left(\tau,x\right)}{V\left(\tau,x\right)}=\int_0^t-\gamma\left(t_0\right)d\tau^{\alpha}$$

$$\ln_{\alpha}\frac{V\left(t,x\right)}{V\left(t_0,x_0\right)}\leq-t^{\alpha}\gamma\left(t_0\right)$$

$$\Rightarrow V\left(t,x\right)\leq V\left(t_0,x_0\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(-t^{\alpha}\gamma\left(t_0\right)\right)$$

لكن لدينا:

$$\delta_1\left(t\right)\left\|x\left(t\right)\right\|^2\leq V\left(t,x\right)$$

$$\left\|x\left(t\right)\right\|^2\leq\frac{1}{\delta_1\left(t\right)}V\left(t,x\right)$$

$$\left\|x\left(t\right)\right\|^2\leq\frac{1}{\delta_1\left(t\right)}V\left(t_0,x_0\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(-t^{\alpha}\gamma\left(t_0\right)\right)\quad;\forall t\in\left[0,\infty\right)$$

$$\Rightarrow\left\|x\left(t\right)\right\|^2\leq\frac{1}{\delta_1\left(t_0\right)}V\left(t_0,x_0\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(-t^{\alpha}\gamma\left(t_0\right)\right)$$

وأيضاً لدينا:

$$V\left(t,x\right)\leq\delta_2\left(t\right)\left\|x\left(t\right)\right\|^2\qquad;\forall t\in\left(-\infty,+\infty\right)$$

$$V\left(t_0,x_0\right)\leq\delta_2\left(t_0\right)\left\|x\left(t_0\right)\right\|^2$$

$$\left\|x\left(t\right)\right\|^2 \le \frac{1}{\delta_1\left(t_0\right)} V\left(t_0,x_0\right) \mathrm{E}_\alpha\left(-\frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)}{\alpha} t^\alpha \gamma\left(t_0\right)\right) \le \frac{\delta_2\left(t_0\right)}{\delta_1\left(t_0\right)} \left\|x\left(t_0\right)\right\|^2 \mathrm{E}_\alpha\left(-t^\alpha \gamma\left(t_0\right)\right)$$

وبما أن: $\mathrm{E}_\alpha\left(-t^\alpha \gamma\left(t_0\right)\right) \underset{t\to\infty}{\to} 0$

ومنه: $\left\|x\left(t\right)\right\| \underset{t\to\infty}{\to} 0$

إذاً حل الجملة المدروسة مستقر تقاربياً.

جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية غير متجانسة:

بفرض أنه لدينا الجملة:

$$^{G}D^{\alpha} x\left(t\right) = f\left(t,x\right) \qquad (5)$$

حيث: $f\left(t,x\right) \in \square^{1}\left[G_{\mathrm{H}}, \square^{n}\right]$ وأن

$$G_{\mathrm{H}} = \left\{\left(t,x\right) \quad ;t \ge t_0, \left\|x\right\| < \mathrm{H} = \mathrm{con\,stant}\right\}$$

$t > t_0, 0 < \alpha < 1$ ، $x\left(t\right) = \left[x_1\left(t\right), x_2\left(t\right), ..., x_n\left(t\right)\right]^T$:$[t_0, t[\to \square^{n}$

مبرهنة (5): يكون الحل الصفري للجملة (5) مستقر تقاربياً إذا وجد محدد موجب $V\left(t,x\right) \in \square^{1}\left[G_{\mathrm{H}}, \square^{n}\right]$ بحيث إن: $\frac{d^{\alpha} V}{dt^{\alpha}} \le 0$

البرهان:

ليكن $x = x\left(t, t_0, x_0\right)$ حل للجملة (5). بفرض أنه لدينا تابع ليبانوف المعرف بالشكل:

$$V\left(t,x\right) = \left\|x\left(t_0,t,x\right)\right\|^2 \left(1 + \mathrm{E}_\alpha\left(-t^\alpha\right)\right)$$

بما أن $f(t,x)\in\square^{1}\left[G_{\mathrm{H}},\square^{n}\right]$ فهذا يقتضي أن $V(t,x)\in\square^{1}\left[G_{\mathrm{H}},\square^{n}\right]$ لذا الحل الصفري للجملة (5) مستقر بانتظام. وبالتالي $\forall\varepsilon>0$ فإنه يوجد $\delta=\delta(\varepsilon)$ بحيث إنه إذا كان: $\|x\|>\varepsilon$ فإن $\delta(\varepsilon)$ يحقق: $\|x(t_0,t,x)\|>\delta(\varepsilon)$ إذاً $V(t,x)>\delta^2(\varepsilon)$ ، بالتالي $V(t,x)$ محدد موجب.

وبسبب جاذبية الحل الصفري فإنه يوجد $\delta_0=\delta(t_0)>0$ يحقق أن
$\|x(t_0,t,x)\|\le\delta(t_0)$

وبالتالي $\forall\varepsilon>0$ ، فإنه يوجد $T=T(\varepsilon,t_0)>0$ يحقق:
$$\|x(t_0,t,x)\|\le\varepsilon\quad;(t\ge t_0+T)$$

بوضع $\eta=\delta(t_0)$ ، بالتالي وعندما يكون: $V(t,x)<\eta$ نجد إن:

$$\|x(t_0,t,x)\|^2=\frac{V(t,x)}{1+\mathrm{E}_\alpha\left(-t^\alpha\right)}<\frac{\eta}{1+\mathrm{E}_\alpha\left(-t^\alpha\right)}<\eta=\delta(t_0)$$

لذلك من أجل: $t\ge t_0+T$ نجد إن: $\|x(t)\|<\varepsilon$.

أي أنه من أجل جميع $(t,x(t))$ التي تحقق: $V(t,x)<\eta$ يكون لدينا:
$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0$$

من ناحية أخرى لدينا: $V(t,x)=\|x(t_0,t,x)\|^2\left(1+\mathrm{E}_\alpha\left(-t^\alpha\right)\right)$

$$\Rightarrow\frac{d^\alpha V(t,x)}{dt^\alpha}=\|x(t_0,t,x)\|^2\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\mathrm{E}_\alpha\left(-t^\alpha\right)<0$$

إذاً حل الجملة المدروسة مستقر تقاربياً.

جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية غير متجانسة بمعاملات متغيرة:

بفرض أنه لدينا الجملة:

$$ {}^{G}D^{\alpha}x(t)=\mathrm{A}(t)x(t)+f(t,x) \qquad (6)$$

حيث: $x(t)=\left[x_1(t),x_2(t),.....,x_n(t)\right]^T:[t_0,t[\to\mathbb{R}^n$ ،

$$t>t_0,0<\alpha<1$$

$\mathrm{A}(t):[t_0,\infty[\to\mathbb{R}^{n\times n}$ مصفوفة تابعية مستمرة على $[t_0,\infty[$

$f(t,x)\in\mathbb{R}^1\left[G_{\mathrm{H}},\mathbb{R}^n\right]$ وأن $G_{\mathrm{H}}=\left\{g(t,x) \quad ;t\geq t_0,\|x\|<\mathrm{H}=\cos\tan t\right\}$

مبرهنة (6): $\forall\varepsilon>0$ فإنه يوجد $\sigma=\sigma(\varepsilon)>0$ يحقق

$$t\in[t_0,\infty) \text{ ، } x\in D=\left\{x \quad ;\|x\|<\sigma\right\}$$

وأن $\|f(t,x)\|<\varepsilon\|x\|$ محقق. يكون الحل الصفري للجملة (6) مستقر حسب ميتاج ليفلر إذا كان الحل الصفري للجملة (1) مستقر حسب ميتاج ليفلر.

البرهان: بفرض أن الحل الصفري للجملة (1) مستقر حسب ميتاج ليفلر، بالتالي يوجد ثابت $1\leq\mathrm{M}$ بحيث إن:

$$\left\|K(t,t_0)\right\|\leq\mathrm{M}\,\mathrm{E}_{\alpha}\left(-(t-t_0)^{\alpha}\right)$$

حيث $K(t,t_0)$ (مصفوفة الانتقال) حل للجملة (1)، بأخذ $\sigma(\varepsilon)>0$ بحيث يحقق: $\|x\|<\sigma(\varepsilon)$

لكن لدينا: $\|f(t,x)\|<\varepsilon\|x\|$ محقق

يعطى الحل العام للجملة (6) بالشكل:

$$x\left(t\right)=K\left(t,t_0\right)x\left(t_0\right)+\int_{t_0}^{t}K\left(t,t_1\right)f\left(t_1,x\left(t_1\right)\right)dt_1$$

بأخذ $\sigma>0$ وكون الحل مستمر يوجد ثابت $\delta>0$ يحقق أن:

$$\left\|x\left(t_0\right)\right\|=\left\|x\left(t,t_0,x_0\right)\right\|<\frac{\sigma}{\mathrm{M}}$$

ومن أجل $t\in\left[t_0,t_0+\delta\right]$ يكون لدينا:

$$\left\|x\left(t\right)\right\|\le\mathrm{M}\,\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\left(t-t_0\right)^{\alpha}\right)\left\|x\left(t_0\right)\right\|+\int_{t_0}^{t}\varepsilon\,\mathrm{M}\,\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\left(t-t_1\right)^{\alpha}\right)\left\|x\left(t_1\right)\right\|dt_1$$

حسب متراجحة جورنويل–بيلمان المعدلة نكتب

$$\left\|x\left(t\right)\right\|\le\mathrm{M}\,\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\left(t-t_0\right)^{\alpha}\right)\left\|x\left(t_0\right)\right\|\mathrm{E}_{\alpha}\left(\varepsilon\mathrm{M}\left(t-t_0\right)^{\alpha}\right)$$

$$\left\|x\left(t\right)\right\|\le\left\|x\left(t_0\right)\right\|\mathrm{M}\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\left(1-\varepsilon\,\mathrm{M}\right)\left(t-t_0\right)^{\alpha}\right)$$

وبفرض أن $\left(1-\varepsilon\,\mathrm{M}\right)>0$ يتم المطلوب

التوصيات والمقترحات:

1) دراسة استقرار جملة معادلات تفاضلية كسرية عددياً ومقارنة النتائج مع دراسة الاستقرار تحليلياً.
2) دراسة استقرار جملة معادلات تفاضلية كسرية عشوائية.
3) دراسة استقرار جملة معادلات تفاضلية كسرية بأمثال عشوائية متغيرة زمنياً.

References

1.Chen L, Chai Y, Wu R, Yang J, 2012- Stability and Stabilization of a Class of Nonlinear Fractional Order Systems with Caputo derivative, IEEE Trans Circuits Sys II, Express Briefs, 59(9):602-606.

2.Jumarie, G, 2007- Modeling Fractional Stochastic Systems as Non-Random Fractional Dynamics Driven by Brownian Motions, Applied Mathematical Modeling, 32: 836-859.

3.Li Y, Chen Y, Pudlubny I, 2009- Mittag-Leffler Stability of Fractional Order Nonlinear Dynamic Systems, Automatica, 45(8):1965-1969.

4. Liao X, Wang L and Yu P, 2007- Stability of Dynamical Systems, Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity.

5. Priyadharsini S, 2016- Stability of Fractional Neutral and Integrodifferential Systems, Journal of Fractional Calculus and Applications, 7 (1): 78-102.

6.Pudlubny I, 1999- Fractional Differential Equations, New York: Academic.

7.Popolizio M, 2019- on The Matrix Mittag-Leffler Function, Theoretical Properties and Numerical Computation.

8.Qian D, Li C, Agarwal R P, and Wang P J Y, 2010- Stability Analysis of Fractional Differential System with Rieman- Liouville Derivative, Mathematical and Computer Modelling, 52(5-6): 862-874.

9.Seemab A, UR Rehman M, 2018- Existence and Stability Analysis by Fixed Point Theorems for a class of Nonlinear Caputo Fractional Differential Equations, Dynamic Systems and Applications, 27(3):445-456.

10.Trigeasson J, Maamri N, Sabatier J, Oustaloup A, 2011- a Lyapunov Approach to The Stability of Fractional Differential Equations, Signal Process, 91(3): 437-445.

11.Valdes- Parada F J, Ochoa- Tapia J A, 2007- Effective Medium Equations for Fractional Fick's Law in Parous Media, Physica A, 373: 339-353.

12.Zhou Y, 2014- Basic Theory of Fractional Differential Equations, World Scientific Publishing. Co. pte.Ltd, Hackensack, NJ.

13.ZaKaria M, Moujahid A, Ikhouba M, 2023- a New Fractional Derivative Operator and Applications, Department of Mathematics, 14(1): 1277-1282.

نمذجة أزمنة الوصول البينية في نظام الخدمة $G/M/1/\infty$ باستخدام طوري تجديد ماركوف

د. هادية طهماز*

الملخص

يعد النظام $M/G/1/\infty$ من الأنظمة الهامة في نظرية صفوف الانتظار الذي يستخدم لتحليل وتقييم أداء الأنظمة التي تتعامل مع تدفقات العملاء عبر خادم واحد، والذي يتعامل مع أزمنة تخديم مستقلة بتوزيع احتمالي عام، وقد يصادفنا دراسة حالات تتطلب التعامل مع أزمنة تخديم عشوائية مرتبطة كون هذه الأنظمة تقدم خدمات مختلفة وتتطلب أزمنة عشوائية مختلفة، وبالتالي لابد من استخدام أداة جديدة تعالج هذا النوع من الحالات.

تم في هذا البحث توسيع مفاهيم والأساسيات النظرية للنموذج $M/G/1$ وذلك بالاعتماد على طوريات تجديد ماركوف، من خلال تمثيل أزمنة وصول هذا النموذج بطوري تجديد ماركوف، كما تم استنتاج مصفوفة الانتقال P بالاعتماد على نهاية مصفوفة كيرنل شبه ماركوف للنظام المدروس، ومن ثم استنتاج الصيغة الرياضية العامة للمتجه π_{n_i} الذي يمثل وجود n–زبون في النظام للنوع i_. ومن ثم استنتاج الصيغة الرياضية لـ π_{0_i} لكل نوع من الزبائن بالاعتماد على تعريف الدوال المولدة $\Pi_i\ (Z)$. وأخيراً تم مناقشة الحالة الخاصة لأزمنة وصول بينية أسية لنوعين من الزبائن وتوضيح النتائج من خلال أمثلة وتطبيقات، وتم التوصل إلى أن نظام الخدمة المقترح $GMR/M/1/\infty$ هو تعميم لنظام الخدمة $M/G/1/\infty$ كونه يتعامل مع أزمنة وصول مرتبطة ويتمتع بخواص هذا النظام.

الكلمات المفتاحية: طوري تجديد ماركوف، نظام الخدمة G/M/1، كيرنل شبه–ماركوف، أزمنة الوصـــول البينية، زمن المكوث، الدوال المولدة $\sqcap_i (Z)$، المتجه الاحتمالي π_{n_i}، مقاييس الأداء.

* قسم الاحصاء الرياضي، كلية العلوم، جامعة حمص.

Modeling Interarrival times in $G/M/1/\infty$ Queue Using Markov Renewal Process

Dr. HadiaTohmaz*

Abstract

The $G/M/1$ queueing system is a fundamental model in queuing theory, used to analyze and evaluate the performance of systems that manage customer flows through a single server with interarrival times following a general probabilistic distribution. However, there are scenarios requiring the handling of correlated interarrival times, as these systems provide various services and need different random service times. Thus, a new tool is needed to address such cases.

This study extends the concepts and theoretical foundations of the $G/M/1$ model by Markov renewal theory. interarrival times in this model are represented using Markov renewal processes. The transition matrix P is derived from the endpoint of the semi-Markov kernel matrix of the studied system, leading to the general mathematical formula for the vector π_{n_i} which represents the number of customers in the system. Subsequently, the formula for π_{0_i} is derived using the definition of generating functions $\Pi_i\ (Z)$ .Special cases of exponential interarrival times for different customer types are discussed, with results illustrated through examples and applications. The study concludes that the proposed $GMR/M/1$ service system is a generalization of the $G/M/1$ system.

*** Dept. of Mathematical Statistics, Faculty of Science, University of Albaath

Keywords: Markov renewal processes, G/M/1 Queue, semi-Markov kernel, interarrival times, sojourn time, Markov renewal generating function.

المقدمة:

تعتبر أنظمة الخدمة من المجالات الأساسية في نظرية الصفوف، حيث تُستخدم في تحليل أداء الأنظمة التي تتعامل مع تدفق العملاء، سواء في خدمات العملاء أو في بيئات التصنيع. يعتبر نموذج G/M/1 من أحد النماذج المهمة التي تُعنى بدراسة أنظمة الخدمة، فهو يمثل نوعًا من الأنظمة التي يتبع فيها وصول العملاء توزيعًا عامًا، بينما تكون أزمنة الخدمة فيه لها التوزيع الأسي. فهو يُفترض وجود خادم واحد يتعامل مع تدفق العملاء، مما يسمح بدراسة تأثير أزمنة الوصول العشوائية على أداء النظام. يعد هذا النموذج مناسبًا لتطبيقات متعددة مثل أنظمة الهاتف، وأنظمة خدمة العملاء، وحتى في المجالات اللوجستية. من خلال دراسة هذا النظام، يمكن تحديد زمن الانتظار، وعدد العملاء في النظام، ومدى تأثير أزمنة الوصول المتنوعة على كفاءة الخدمة. تُظهر الأبحاث المتعلقة بهذا المجال أن نموذج G/M/1 قادر على تقديم رؤى قيمّة حول كيفية تحسين الأداء وزيادة رضا العملاء. كما يتم استخدام هذا النموذج كأساس لتطوير نماذج أكثر تعقيدًا، مثل G/G/1 و M/G/1. [2][1]

نظام الخدمة G/M/1 لديه العديد من التطبيقات في مجالات مختلفة نظراً لمرونته وقدرته على نمذجة سلوك صفوف الانتظار. تُستخدم نماذج G/M/1 لتقدير أزمنة الانتظار للمتصلين، كما يُستخدم في حساب أزمنة الانتظار للعملاء في فروع البنوك، وخاصة في

حالات الخدمة الذاتية أو الخزائن. يُمكن أيضاً استخدامه لتحليل زمن انتظار الركاب عند تسجيل الوصول أو في نقاط التفتيش الأمنية. وبشكل عام يُستخدم في مراكز خدمة العملاء لتحسين تجارب العملاء من خلال تقليل أزمنة الانتظار وتحسين إدارة الصفوف. يُستخدم في تحليل أزمنة الانتظار والازدحام في الشبكات، مثل خوادم الإنترنت أو خدمات التخزين السحابية. كما من تطبيقاته أيضاً إدارة أزمنة الانتظار لمرضى الطوارئ أو العيادات الخارجية، وله العديد من التطبيقات الأخرى. [4][3]

في هذا البحث، سيتم توسيع المفاهيم النظرية الأساسية في نظام $G/M/1$، من خلال اقتراح تمثيل أزمنة الوصول البينية وفق طوري تجديد ماركوف، كما تم استنتاج مصفوفة الانتقال P واستنتاج الصيغ الرياضية العامة للمتجه π_{n_i} و π_{0_i} لكل نوع من الزبائن. وأخيراً تم مناقشة الحالة الخاصة لأزمنة وصول بينية أسية لنوعين من الزبائن وتوضيح النتائج من خلال أمثلة وتطبيقات بهدف تحسين أداء الأنظمة وتوفير رؤى حول كيفية إدارة الطوابير بشكل أكثر فعالية.

مشكلة البحث (*Problem of the Research*):

يعتبر النظام $G/M/1$ من الأنظمة الهامة في نظرية الخدمة الذي يستخدم أدوات قيمة لتحسين فعالية وكفاءة أنظمة الخدمة في مجموعة متنوعة من المجالات، والذي يتعامل مع أزمنة وصول مستقلة بتوزيع احتمالي عام، وقد يصادفنا دراسة حالات تتطلب التعامل مع أزمنة وصول عشوائية مرتبطة غير مستقلة كون هذه الأنظمة تقدم خدمات مختلفة وتتطلب أزمنة عشوائية مختلفة، وبالتالي لابد من استخدام أداة جديدة تعالج هذا النوع من الحالات.

أهداف البحث (*Objectives of the Research*):

1- توسيع المفاهيم النظرية للنموذج G/M/1 بالاعتماد على طوريات تجديد ماركوف.
2- تمثيل أزمنة الوصول البينية في نموذج G/M/1 بطوري تجديد ماركوف.
3- استنتاج مصفوفة الانتقال P بالاعتماد على نهاية مصفوفة كيرنل شبه ماركوف للنظام المدروس.
4- استنتاج الصيغة الرياضية العامة للمتجه π_{n_i}.
5- استنتاج الصيغة الرياضية لـ π_{0_i} لكل نوع من الزبائن بالاعتماد على تعريف الدوال المولدة $\Pi_i(Z)$.
6- مناقشة الحالة الخاصة لأزمنة وصول أسية لنوعين من الزبائن وتوضيح النتائج من خلال أمثلة وتطبيقات.

المفاهيم النظرية الأساسية:

أولاً: أنظمة الخدمة (queueing system): [4][5]

تعتبر مشكلة الانتظار في صفوف الانتظار من أكثر المشاكل التي نصادفها في حياتنا اليومية، إذ يتتابع وصول العناصر التي تحتاج الخدمة إلى مراكز تقديم الخدمة. فإذا كانت محطة الخدمة مشغولة فإن الزبائن سيقفون أمامها في طابور أو صف انتظار بانتظار تقديم الخدمة لهم. فالهدف تشغيل مراكز الخدمة في مستوى مقبول من الخدمة ضمن مستوى معقول من التكاليف. نشأت نظرية الخدمة على يد الباحث ايرلنغ عام 1909 حيث قدم أول ورقة بحثية عن نظرية الخدمة، وطورها كندال عام 1953 من خلال تقديم طريقة $A/B/C$ لترقيم الطابور.

بفرض أن الزبائن $K_1, K_2, \dots$ تصل إلى نظام الخدمة في اللحظات العشوائية $t_0, t_1, t_2, \dots$،وبفرض أن $\alpha_n = t_n - t_{n-1}, \forall n \geq 1$ تمثل أزمنة الوصول البينية وهي متغيرات عشوائية مستقلة. دالة توزيعها:

$$A(X) = P(\alpha_n < X).$$

وتوقعها:

$$a = E(\alpha_n) = \int_0^{\infty} XdA(X) < \infty$$

وبفرض أن β_n **أزمنة خدمة** الزبون K_n، وهي متغيرات عشوائية غير سالبة ومستقلة ولها التوزيع نفسه، دالة توزيعها:

$$B(X) = P(\beta_n < X).$$

بتوقع الرياضي

$$b = E(\beta_n) = \int_0^{\infty} XdB(X) < \infty.$$

عند دراسة أنظمة الانتظار نهتم بالتغير الزمني لطول الطابور $X(t)$. حيث نقصد **بطول الطابور** عدد الطلبات الموجودة في نظام الخدمة في اللحظة t، هذا يعني التي يتم تخديمها والتي في غرفة الانتظار. تشكل $(X(t))_{t\in I=[0,\infty)}$ عملية عشوائية مع زمن مستمر

ثانياً: نظام الانتظار $G/M/1/\infty$ ***[6][7]***

إن أزمنة الوصول البينية α_n في هذا النموذج تتبع توزيع عام $A(X)$ بتوقع رياضي منته، في حين توزيع أزمنة الخدمة β_n لهذا النظام له التوزيع الأسي:

$$B(X) = P(\beta_n < X) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x}, & x \geq 0 \\ 0 \quad\quad\quad , & x < 0 \end{cases}$$

بفرض أن X_n تمثل طول الطابور قبل وصول الزبون K_{n+1} عندئذ يكون:

$$X_0 = X(0-)$$

$$X_n = \begin{cases} X(t_n - 0) & ; \forall n \in N \\ X(0-) & ; \ n = 0 \end{cases}$$

وبفرض U_n تمثل عدد الزبائن الذين يغادرون النظام أثناء فترة الوصـــول α_n، عندئذ يمكننا أن نكتب:

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} + 1 - U_n \ ; \ X_{n-1} + 1 > U_n \\ 0 \qquad\qquad\qquad ; X_{n-1} + 1 \leq U_n \end{cases}$$

وأن $(X_n)_{n\geq 0}$ تمثل سلسلة ماركوف لأن U_n متغيرات عشوائية مستقلة وأن X_n تعتمد فقط على X_{n-1} دون الاعتماد على الماضي.

مبرهنة: تشكل $(U_n)_{n\in N}$ متتالية من المتحولات العشوائية الحقيقية المستقلة، ولها التوزيع الاحتمالي نفسه:

$$\beta_i = P(U_n = i) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\mu X} \frac{(\mu t)^i}{i!} \, dA(t), \quad \forall i = 0,1,2,..$$

من أجل دوال الانتقال نجد:

$$P_{ij} = P(X_n = j | X_{n-1} = i)$$

$$= \begin{cases} P(U_n \geq i+1), & j = 0, i \geq 0 \\ P(U_n = i+1-j), & i \geq 0, j \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{i} \beta_k & ; i = 0, j \geq 0 \\ \beta_{j-i+1} & ; \ i \geq 1, j \geq 0 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

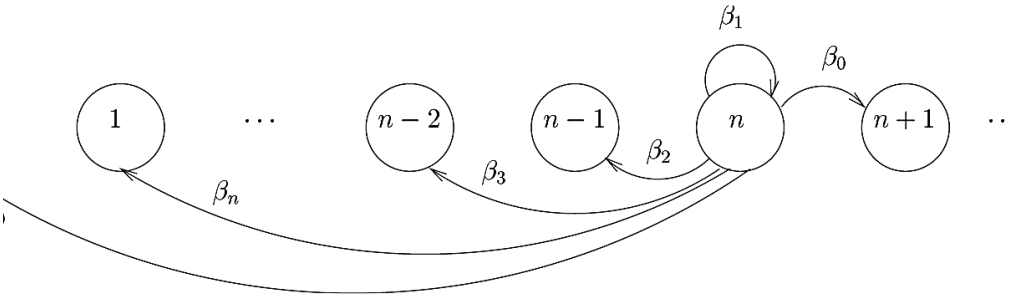
عندئذ مصفوفة الانتقال لها الشكل:

$$P=\begin{bmatrix} p_{0,0} & \beta_0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ p_{1,0} & \beta_1 & \beta_0 & 0 & 0 & . & . & . \\ p_{2,0} & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & 0 & . & . & . \\ p_{3,0} & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & . & . & . \\ p_{4,0} & \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

حيث:

$$p_{i,0}=1-\sum_{j=0}^{i}\beta_j=\sum_{j=i+1}^{\infty}\beta_j$$

والعرض الماركوفي لسلسلة ماركوف ممثلة بالشكل التالي:



ثالثاً: طوريات تجديد ماركوف (*Markov Renewal Processes*):

تعتبر طوريات التجديد الماركوفية تعميم لطوريات التجديد تتميز بأن سلسلة الأزمنة لها ليست مستقلة ومتطابقة بالتوزيع، توزيعاتها تعتمد على حالات سلسلة ماركوف.

درست طوريات التجديد الماركوفية لأول مرة عام (1961) على يد الباحث Pyke وطبقت على أنظمة الخدمة $M\backslash G\backslash 1$ وعلى مسائل اصلاح الآليات [8].

تعريف طوري ماركوف (*Markov Process*):[9]

نقول عن طوري عشوائي $\{X(t); t \in t\}$ أنه يمثل طوري ماركوف، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ وكل من $t_0, t_1, \cdots, t_n \in T$ مع $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ ومن أجل $y, x, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0 \in \mathbb{R}$، تكون العلاقة التالية محققة:

$$P\left(X_{t_n} = y \mid X_{t_{n-1}} = x, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \dots, X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = x_0\right) = P\left(X_{t_n} = y \mid X_{t_{n-1}} = x\right)$$

تدعى هذه الخاصية بخاصية ماركوف.

طوري تجديد ماركوف (*Markov Renewal Process*):[10]

بفرض أن $(X_n, T_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ سلسلة من المتغيرات العشوائية فيها $X_n \in S$; $S = \{0,1,2, \dots\}$ تمثل حالات لسلسة ماركوف و T_n أزمنة التجديد للحالات X_n، عندئذ نقول عن هذه السلسة أنها طوري تجديد ماركوفي بفضاء حالات S اذا تحقق الشرط التالي:

$$P(X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \le t | X_0, \dots, X_n = i; T_0, \dots, T_n) = P(X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \le t | X_n = i) = Q_{ij}(t)$$

وذلك من أجل كل $i, j\epsilon\, E\,, T_0, \dots, T_n \epsilon\, \mathbb{R}_+$

وبالتالي المصفوفة التالية:

$$Q := \{Q_{ij}(t); i, j \in E, , t\epsilon\, \mathbb{R}_+\}$$

تدعى بنواة شبه ماركوف semi−Markov kernel على فضاء الحالات S .

رابعاً: النظام المقترح $GMR\backslash M\backslash 1$:

يعد هذا النظام تعميم للنظام $G\backslash M\backslash 1$ حيث نقترح فيه أن أزمنة الوصـــول البينية تمثل طوري تجديد ماركوف وأن توزيع كل سلسلة من أزمنة الوصول لكل نوع له التوزيع الأسي بالوسيط λ_{ij}، كما نفترض أن أزمنة التخديم أسية بالوسيط μ. عندئذٍ نستطيع أن نوصف النظام الجديد كما يلي:

بفرض أن $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ســـلســـلة من أزمنة المغادرة المتعاقبة للزبائن حيث $n\epsilon\mathbb{N}$ $\tau_n\epsilon\mathbb{R}^+$. وبفرض أن X_n تمثل طول الطابور قبل وصـول الزبونK_{n+1} حيث $X_n\epsilon\mathbb{N}$، وبفرض أن α_n زمن وصول الزبون n حيث $\alpha_n\epsilon\mathbb{R}^+$، وبفرض أن Z_n تمثل نوع الزبون حيث $Z_n\epsilon E\{1,2,\dots,m\}$، عندئذٍ الثلاثية (X_n, Z_n, α_n) تمثل طوري تجديد ماركوف بكيرنل $K(t)$ حيث:

$$K(t) = P[X_n = K, Z_n = j, \tau_n - \tau_{n-1} \le t | X_{n-1} = l, Z_{n-1} = i]$$

$$= \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{i} \int_0^t \left(1 - e^{-\lambda(t-x)}\right) \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!} dA_{ij}(x) & ; l = 0, i \ge 0, j = 0 \\ \int_0^t \frac{e^{-\mu x}(\mu x)^{k-l+1}}{(k-l+1)!} dA_{ij}(x) & ; l > 0, j \ge 1, i \ge j-1 \end{cases}$$

حيث $B_{ij}(x)$ هي كيرنل طوري تجديد ماركوف لأزمنة الخدمة وتعطى بالعلاقة:

$$B_{ij}(x) = [B_{ij}(t)]_{i,j\epsilon E} = \left[P_{ij}F_{ij}(t)\right] = [P_{ij}\left(1 - e^{-\lambda_{ij}t}\right)]_{m*m}$$

ونلاحظ أن الثلاثية (X_n, Z_n, α_n) معقدة كونها بثلاثة أبعاد أحدها مســـتمر والآخر منفصـل مما يزيد الأمر تعقيداً لذلك لفهم هذا النظام نسـتطيع أن نراقبه بعد مغادرة الزبون رقم n وبذلك نكون قد بسطنا وصف النظام.

لدينا X_n طول الطابور بعد مغادرة الزبون n وبفرض U_n تمثل عدد الزبائن الجديدة التي تصل إلى النظام أثناء خدمة الزبون n عندئذٍ نستطيع أن نكتب:

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} + U_n - 1 & ; X_{n-1} > 0 \\ U_n & ; X_{n-1} = 0 \end{cases}$$

عندئذٍ (X_n) تمثل طوري ماركوف كون X_n يعتمد على X_{n-1} على الأكثر. ولنرمز لكيرنل$K(t)$ من خلال المصـــفوفات $E_k(t)$ و $G_k(t)$، عندئذٍ تصـــبح العلاقة (1) بالشكل:

$$K(t) = \begin{cases} C_k(t) & ; \ l = 0, i \geq 0, j = 0 \\ D_k(t) & ; \ l > 0, j \geq 1, i \geq j - 1 \end{cases}$$

عندئذٍ نستطيع أن نكتب $K(t)$ بالشكل المصفوفاتي التالي:

$$K(t) = \begin{bmatrix} C_0(t) & D_0(t) & 0 & 0 & \dots \\ C_1(t) & D_1(t) & D_0(t) & 0 & \cdots \\ C_2(t) & D_2(t) & D_1(t) & D_0(t) & \cdots \\ C_3(t) & D_3(t) & D_2(t) & D_1(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

مصفوفة الانتقال بخطوة واحدة P نستطيع أن نجدها بالاعتماد على العلاقة:

$$P = \lim_{t \to \infty} K(t)$$

وبالتالي مصفوفة الانتقال P تصبح بالشكل:

$$P = K(\infty) = \begin{bmatrix} 1 - D_0 & D_0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 - D_0 - D_1 & D_1 & D_0 & 0 & \cdots \\ 1 - D_0 - D_1 - D_2 & D_2 & D_1 & D_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

بحيث $$D_k = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda x}(\lambda x)^k}{k!} dA(x)$$

أو $$D_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}(\mu x)^k}{k!} \left[P_{ij} \lambda_{ij} e^{-\lambda_{ij} x}\right] dx$$

أو نكتب مصفوفة الانتقال P بشكل آخر كما يلي:

$$P = \begin{bmatrix} p_{0,0} & D_0 & 0 & 0 & \dots \\ p_{1,0} & D_1 & D_0 & 0 & \cdots \\ p_{2,0} & D_2 & D_1 & D_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

حيث أن $p_{i,0} = 1 - \sum_{j=0}^{i} D_j$

وبفرض أن π يمثل التوزيع المستقر لسلسلة ماركوف (X_n, Z_n) بحيث $0 \le \pi_k \le 1$; $K \in \mathbb{N}$ ونستطيع ايجاد π من خلال:

$$\pi\, \mathrm{K}(\infty) = \pi \qquad ; \pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots,)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1$$

وبالتالي ينتج لدينا من المعادلات الأخيرة أن:

$$\pi_n = \pi_{n-1} D_0 + \pi_n D_1 + \pi_{n+1} D_2 + \cdots \qquad ; n = 1,2, \dots$$

$$\Longrightarrow \pi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{k+n-1} D_k \qquad ; n = 1,2, \dots$$

أما من أجل $n = 0$ ينتج لدينا أيضاً الصيغة التالية:

$$\pi_0 = \pi_0 p_{0,0} + \pi_1 p_{1,0} + \pi_2 p_{2,0} + \cdots$$

$$\Longrightarrow \pi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{k,0}$$

ولنعرف التوابع المولدة الاحتمالية التالية:

$$\begin{cases} \sqcap_i (Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n_i} Z^n & ; i = 1,2,\dots,m \\ M_i(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{n_i} Z^n & ; i = 1,2,\dots,m \end{cases} \qquad (*)$$

وليكن لدينا $\pi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{k+n-1} D_k \quad ; n = 1,2,\dots$

وبتعميم هذه العلاقة لتشمل أكثر من نوع من الزبائن تصبح بالشكل:

$$\pi_{n_i} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{(n-1+k)_i} D_{(k)_{ij}} \quad ; j = 1,2,\dots,m$$

وبضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ Z^n وأخذ المجموع على n ينتج لدينا مايلي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n_i} Z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{(n-1+k)_i} D_{(k)_{ij}} \; Z^n \qquad ; j = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n_i} Z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{(n-1+k)_i} D_{(k)_{ij}} \; Z^{n-1+k} \, Z^{1-k}$$

وبفرض أن $n - 1 + k = \ell$ عندئذ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n_i} Z^n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n-1}^{\infty} \pi_{(\ell)_i} D_{(1-n+\ell)_{ij}} \; Z^{\ell} \, Z^{n-\ell}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n_i} Z^n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n-1}^{\infty} \pi_{(\ell)_i} D_{(1-n+\ell)_{ij}} \; Z^n$$

وبالاستفادة من العلاقة $(*)$ تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$\sqcap_i(Z) = \sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} M_i(Z) + Z^{-1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{\infty} \pi_{\ell_i} Z^{\ell} * \sum_{n=\ell}^{\infty} D_{(n+1-\ell)_{ij}} Z^{n+1-\ell}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} M_i(Z) + Z^{-1} \sum_{i=1}^{m} M_i(Z) \left(\sqcap_i(Z) - \boldsymbol{\pi_{0_i}}\right)$$

ولكن:

$$D_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x}(\mu x)^k}{k!} dA(x)$$

$$\Longrightarrow M(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} Z^k \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x}(\mu x)^k}{k!} \left[P_{ij}\lambda_{ij} e^{-\lambda_{ij}x}\right] dx$$

$$= P_{ij}\lambda_{ij} \int_0^{\infty} e^{\mu \mathrm{Z} x}\, e^{-(\mu+\lambda_{ij})x} dx$$

$$= P_{ij}\lambda_{ij} \int_0^{\infty} e^{-(\mu-\mu \mathrm{Z}+\lambda_{ij})x} dx = \frac{P_{ij}\lambda_{ij}}{\mu - \mu \mathrm{Z} + \lambda_{ij}}$$

$$\Longrightarrow M(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x}(\mu x)^k}{k!} dA(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{\mu x}(\mu x)^k}{k!} \left[P_{ij}\lambda_{ij} e^{-\lambda_{ij}x}\right] dx$$

$$= P_{ij}\lambda_{ij} \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-(\mu+\lambda_{ij})x} dx$$

$$= P_{ij}\lambda_{ij} \int_0^{\infty} e^{\mu x} e^{-(\mu+\lambda_{ij})x} dx = P_{ij}\lambda_{ij} \int_0^{\infty} e^{-\lambda_{ij}x} dx$$

$$= \frac{P_{ij}\lambda_{ij}}{\lambda_{ij}} = P_{ij}$$

$$\Longrightarrow \acute{M}(Z) = \frac{\mu P_{ij}\lambda_{ij}}{(\mu - \mu Z + \lambda_{ij})^2}$$

$$\Longrightarrow \acute{M}(1) = \frac{\mu P_{ij}\lambda_{ij}}{(\mu - \mu + \lambda_{ij})^2} = \frac{\mu P_{ij}}{\lambda_{ij}} = \rho^{-1}P_{ij}$$

استنتاج $\boldsymbol{\pi_{0_i}}$ (متجه احتمالات أن يكون النظام المقترح فارغ بالنسبة لكل الأنواع):

من أجل $Z = 1$ تصبح العلاقة $\sqcap_i (Z)$ السابقة بالشكل:

$$\sqcap_i (1) = \sum_{i=1}^{m} M_i(1) \sqcap_i (1)$$

ولكن $M_i(1) = \frac{P_{ij}\lambda_{ij}}{\mu-\mu+\lambda_{ij}} = P_{ij}$ وبالتالي:

$$\sqcap_i (1) = \sum_{i=1}^{m} P_{ij} \sqcap_i (1)$$

يمكن كتابتها بالشكل المصفوفاتي التالي:

$$\Longrightarrow \sqcap (1) = \sqcap (1)\mathrm{P}$$

وبفرض أن المتجه η هو المتجه الاحتمالي الوحيد المستقر للمصفوفة P أي أن:

$$\eta = \eta P \qquad ;\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$$

بالمطابقة بين العلاقتين الأخيرتين ينتج أن $\sqcap (1) = \eta$

الآن بالرجوع لعلاقة $\sqcap_i (Z)$ نستطيع كتابتها بالشكل:

$$\sqcap_i (Z) == \sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} M_i(Z) + Z^{-1} \sum_{i=1}^{m} M_i(Z) (\sqcap_i (Z) - \boldsymbol{\pi_{0_i}})$$

من أجل i=1 تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$\sqcap_1(Z) = \pi_{0_1} M_1(Z) + Z^{-1} M_1(Z)(\sqcap_1(Z) - \boldsymbol{\pi_0})$$

$$\sqcap_1(Z) = \frac{\pi_0 M_1(Z)(1-Z)}{M_1(Z) - Z}$$

ولكن استنتجنا أن:

$$\lim_{Z \to 1} \sqcap_i(Z) = \eta$$

وباستخدام قاعدة أوبيتال على $\sqcap_i(Z)$ يصبح لدينا:

$$\sqcap_i(Z) = \frac{\sum \pi_{0_i} \acute{M}(Z)(1-Z) + \sum \pi_{0_i} M(Z)(-1)}{\sum M_\iota \acute{(Z)} - 1}$$

وبتبديل كل $Z = 1$ وبتعميم العلاقة على m–نوع، تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$\sqcap_i(1) = \frac{-\sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} M(1)}{-\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \acute{M}_i(1)\right)}$$

ولكن $\rho^{-1} P_{ij} = \acute{M}_i(1)$ نبـدل في العلاقـة الأخيرة كلاً من $\sqcap_i(1)$ و $K(1)$ و $\acute{K}(1)$:

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} P_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{m} \rho_i^{-1} P_{ij} - 1\right)}$$

ولكن $\sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} P_{ij} = \pi_{0_i}$ و $\sum_{i=1}^{m} \rho_i^{-1} P_{ij} = \rho_i^{-1}$ وبالتالي:

$$\eta_i = \frac{\pi_{0_i}}{\rho_i^{-1} - 1} \Longrightarrow \quad \pi_{0_i} = \eta_i \rho_i^{-1}(1 - \rho_i) \quad ; \rho_i = \frac{\lambda_{ij}}{\mu} < 1$$

توزيع زمن المكوث Distribution of the sojourn time:[9][8]

لنفترض أن الزبون سيصل إلى النظام في حالة الاستقرار، ولنرمز للزمن الذي سيستغرقه الزبون في الخدمة (زمن المكوث) بالمتحول العشـــوائي S وبـــــــ $F_S(.)$ دالة توزيعه الاحتمـاليـة. وبفرض أن$\{L^n; n \geq 0\}$ تمثـل عـدد الزبـائن الموجودين في النظـام عنـد

الوصـول–n، وبفرض π_n احتمال أن يجد الزبون القادم n–زبون في النظام، من الواضـح أن عدد الزبائن المتبقين عند وصـــول n–زبون أي لحظة مغادرة زبون ما هو نفســـه عدد الزبائن الذين وصـــلوا خلال فترة مكوثه في النظام (باعتبار النظام في حالة اســـتقرار)، ولذلك سيكون:

$$L^n = \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^n}{n!} dA(t)$$

عندئذ زمن المكوث هو مجموع $n+1$ زمن الخدمة بالتوزيع الأسي:

$$\tilde{S}(s) = E(e^{-sS}) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\sigma)\sigma^n \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1}$$
$$= \left(\frac{\mu(1-\sigma)}{\mu+s}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu\sigma}{\mu+s}\right)^n = \frac{\mu(1-\sigma)}{\mu(1-\sigma)+s}$$

حيث:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^i}{i!} \left[P_{ij}\lambda_{ij} e^{-\lambda_{ij} t}\right] dt$$
$$= \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\mu-\mu\sigma)t} \left[P_{ij}\lambda_{ij} e^{-\lambda_{ij} t}\right] dt = \frac{P_{ij}\lambda_{ij}}{\mu - \mu\sigma + \lambda_{ij}}$$

وبالتالي أصبح لدينا:

$$\sigma = \frac{P_{ij}\lambda_{ij}}{\mu - \mu\sigma + \lambda_{ij}} \Longrightarrow \sigma(\mu - \mu\sigma + \lambda_{ij}) = P_{ij}\lambda_{ij}$$

بحل المعادلة الأخيرة نتوصل إلى قيمة σ.

مقاييس الأداء للنموذج المقترح:

1- متوسط زمن الانتظار في النظام W_s:

إن متوســط زمن المكوث أو متوســط زمن الانتظار للنظام المقترح بالاعتماد على النظام G/M/1 يحسب من العلاقة التالية:

$$W_s = E(S) = \sum_{i=1}^{m} E(L^a)\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}$$

ولكن:

$$E(L^a) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\,(1-\sigma)\sigma^n = \frac{\sigma}{1-\sigma}$$

وبالتالي نحصل على W_s:

$$W_s = \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_i}{(1-\sigma_i)\mu} + \frac{1}{\mu} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(1-\sigma_i)\mu}$$

2- متوسط زمن الانتظار في الطابور W_q:

إن متوسط زمن الانتظار في الطابور W_q يكون:

$$W_q = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_{ij}}{(1-\sigma_i)\mu} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho_{ij}}{(1-\sigma_i)} \;;\; j = 1,2,\dots,m$$

3- متوسط عدد الزبائن في الطابور L_q:

نستطيع استنتاج كل من L_q بالاعتماد على صيغة ليتيل كما يلي:

$$L_q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} W_q = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_{ij}\rho_{ij}}{(1-\sigma_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{{\lambda^2}_{ij}}{(1-\sigma_i)\mu}$$

4- متوسط عدد الزبائن في النظام L_S:

بالاعتماد على صيغة ليتيل أيضاً يكون متوسط عدد الزبائن في النظام المقترح:

$$L_s = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} W_s = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_{ij}}{(1-\sigma_i)\mu} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho_{ij}}{(1-\sigma_i)}$$

تطبيق:

نفترض أن لدينا خادم ويب يتلقى نوعين من الطلبات:

1. طلبات البيانات (Data Requests): وهي طلبات بسيطة للوصول إلى بيانات معينة (مثل صفحات الويب)، وأن معدل وصول هذا النوع من الطلبات 8 طلبات في الدقيقة.

2. طلبات المعالجة (Processing Requests): وهي طلبات تتطلب وقتًا أطول للمعالجة (مثل تحميل الملفات أو تنفيذ عمليات معقدة)، وبفرض معدل وصول الطلبات 5 طلبات في الدقيقة.

وأن معدل التخديم لكل طلب لكلا النوعين يستغرق حوالي نصف دقيقة أي 5 ثواني. نلاحظ أنه عندما يصل الطلب إلى الخادم، يتم تحديد نوع الطلب. يمكن أن تتداخل الطلبات، مما يعني أن الطلبات من كلا النوعين يمكن أن تصل في نفس الوقت، مما يدل على أن معدلات الوصول مرتبطة ببعضها البعض وغير مستقلة فزمن وصول كل طلب متعلق بزمن وصول طلب آخر حتى يتم تخديمها. والمطلوب:

1. حساب احتمال أن يكون المخدم فارغاً لكل نوع من الطلبات (لكلا النوعين البيانات والمعالجة):

أي نريد حساب π_{0_i} لدينا $\mu = 12$، $\lambda_1 = 8$، $\lambda_2 = 5$

$$\Longrightarrow \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} = \frac{8}{12} = 0.67 < 1$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} = \frac{5}{12} = 0.42 < 1$$

وبفرض مصفوفة الانتقال P:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \eta = \left(\frac{0.7}{0.7+0.6} \quad \frac{0.6}{0.7+0.6}\right) = (0.54 \quad 0.46)$$

وباستخدام العلاقة:

$$\pi_{0_i} = \eta_i \rho_i^{-1}(1-\rho_i)$$

$$i = 1 \Longrightarrow \pi_{0_1} = \eta_1 \rho_1^{-1}(1-\rho_1) = 0.54(0.67^{-1})(1-0.67) = 0.27$$

$$i = 2 \Longrightarrow \pi_{0_2} = \eta_2 \rho_2^{-1}(1-\rho_2) = 0.46(0.42^{-1})(1-0.42) = 0.63$$

$$\Longrightarrow \pi_{0_i} = (0.27 \quad 0.63)$$

أي أن احتمال أن يكون النظام فارغ بالنسبة للنوع الأول هو $\pi_{0_1} = 0.27$

واحتمال أن يكون النظام فارغ بالنسبة للنوع الثاني هو $\pi_{0_2} = 0.63$

2. احسب احتمال أن يكون النظام ممتلئ:

$$1 - \pi_{0_i} = 1 - (0.27 \quad 0.63) = (0.73 \quad 0.37)$$

3. احسب احتمال أن يكون هناك زبون من النوع الأول أو زبون من النوع الثاني:

أي نريد حساب π_{1_i}، نستخدم العلاقة التالية:

$$\pi_{0_j} = \sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} D_{0_{ij}} + \sum_{i=1}^{m} \pi_{1_i} D_{0_{ij}} \quad ; m = 2$$

لنحسب أولاً D_0، لدينا

$$D_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x}(\mu x)^k}{k!}\left[P_{ij}\lambda_{ij}e^{-\lambda_{ij}x}\right]dx$$

$$\Longrightarrow D_0 = \int_0^{\infty} e^{-\mu x}\left[P_{ij}\lambda_{ij}e^{-\lambda_{ij}x}\right]dx$$

$$= P_{ij}\lambda_{ij}\left(\int_0^{\infty} e^{-(\lambda_{ij}+\mu)x}dx\right) = \frac{P_{ij}\lambda_{ij}}{(\lambda_{ij}+\mu)}$$

$$\Longrightarrow D_{0_{ij}} = \begin{pmatrix} \frac{P_{11}\lambda_{11}}{\mu+\lambda_{11}} & \frac{P_{12}\lambda_{12}}{\mu+\lambda_{12}} \\ \frac{P_{21}\lambda_{21}}{\mu+\lambda_{21}} & \frac{P_{22}\lambda_{22}}{\mu+\lambda_{22}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(0.3)(0.13)}{0.20+0.13} & \frac{(0.7)(0.13)}{0.2+0.13} \\ \frac{(0.6)(0.08)}{0.2+0.08} & \frac{(0.4)(0.08)}{0.2+0.08} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow D_{0_{ij}} = \left(\frac{P_{ij}\lambda_{ij}}{(\lambda_{ij}+\mu)}\right)_{m*m} = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.28 \\ 0.17 & 0.11 \end{pmatrix}$$

ولإيجاد قيم المتجه π_{1_i} نشكل المعادلتين التاليتين من خلال (π_{1_j}):

$$j = 1 \Longrightarrow \pi_{0_1} = \pi_{0_1}D_{0_{11}} + \pi_{0_2}D_{0_{21}} + \pi_{1_1}D_{0_{11}} + \pi_{1_2}D_{0_{21}}$$

$$j = 2 \Longrightarrow \pi_{0_2} = \pi_{0_1}D_{0_{12}} + \pi_{0_2}D_{0_{22}} + \pi_{1_1}D_{0_{12}} + \pi_{1_2}D_{0_{22}}$$

$$\begin{cases} 0.27 = 0.27(0.12) + 0.63(0.17) + \pi_{1_1}(0.12) + \pi_{1_2}(0.17) \\ 0.63 = 0.27(0.28) + 0.63(0.11) + \pi_{1_1}(0.28) + \pi_{1_2}(0.11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.1305 = 0.12\pi_{1_1} + 0.17\pi_{1_2} \\ 0.4851 = 0.28\pi_{1_1} + 0.11\pi_{1_2} \end{cases}$$

بحل المعادلتين الأخيرتين حل مشترك ينتج لدينا:

$$\Longrightarrow \pi_{1_1} = 0.19 \quad \& \quad \pi_{1_2} = 0.63$$

$$\Longrightarrow \pi_{1_j} = \begin{pmatrix} \pi_{1_1} & \pi_{1_2} \end{pmatrix} = (0.19 \quad 0.63)$$

4. أوجد متوسط زمني الانتظار في الطابور وفي النظام للنظام المقترح:

إن متوسط زمن الانتظار في الطابور w_q يحسب من خلال العلاقة التالية:

$$W_q = \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{(1-\sigma_i)}$$

نحسب σ_i من المعادلة التالية:

$$\sigma_i(\mu - \mu\sigma_i + \lambda_{ij}) = P_{ij}\lambda_{ij}$$

من أجل i=1:

$$\sigma_1(\mu - \mu\sigma_1 + \lambda_1) = P_{11}\lambda_1 \Longrightarrow \sigma_1(0.20 - 0.20\sigma_1 + 0.13) = 0.3 * 0.13$$

$$\Longrightarrow 0.20{\sigma_1}^2 - 0.33\sigma_1 + 0.039 = 0$$

بحل هذه المعادلة نحصل على قيمة $\sigma_1 = 0.128$ (الجذر الموجب الأصغر)

أما من أجل i=2:

$$\sigma_2(\mu - \mu\sigma_2 + \lambda_2) = P_{22}\lambda_2 \Longrightarrow \sigma_2(0.20 - 0.20\sigma_2 + 0.08) = 0.4 * 0.08$$

$$\Longrightarrow 0.20{\sigma_2}^2 - 0.28\sigma_2 + 0.032 = 0$$

بحل هذه المعادلة نحصل على قيمة $\sigma_2 = 0.125$ (الجذر الموجب الصغر)

وبالتالي:

$$W_q = \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{(1-\sigma_i)} = \frac{\rho_1}{(1-\sigma_1)} + \frac{\rho_2}{(1-\sigma_2)}$$
$$= \frac{0.67}{1-0.128} + \frac{0.42}{1-0.125} = 1.159$$

متوسط زمن الانتظار في النظام W_S:

$$W_s = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(1-\sigma_i)\mu}$$

$$= \left(\frac{1}{0.2}\left(\frac{1}{1-0.128}\right) + \frac{1}{0.2}\left(\frac{1}{1-0.125}\right)\right) = 11.44$$

في هذا التطبيق، يتم التعامل مع نوعين مختلفين من الطلبات على نفس الخادم. يعكس التحليل كيف يمكن أن تؤثر الطلبات المختلفة على أداء النظام. من المهم أيضًا ملاحظة أن زيادة حجم الطلبات من نوع معين يمكن أن تؤثر على أزمنة انتظار جميع الطلبات. يمكن أن يساعد هذا النوع من التحليل في تحسين استراتيجيات إدارة الحمل على الخادم وضمان تقديم الخدمة بكفاءة.

النتائج والتوصيات:

أهم النتائج التي تم التوصل إليها والتوصيات:

1- تعميم نظام الخدمة $G/M/1$ إلى نظام الخدمة المقترح $GMR/M/1$.

2- تمثيل أزمنة الوصول البينية للنموذج المقترح باستخدام طوري تجديد ماركوف.

3- استنتاج مصفوفة الانتقال P بالاعتماد على نهاية مصفوفة كيرنل شبه ماركوف للنظام المدروس.

4- استنتاج الصيغة الرياضية لكل من π_{n_i} و π_{0_i} بالاعتماد على تعريف الدوال المولدة $\sqcap_i (Z)$.

5- مناقشة الحالة الخاصة لأزمنة وصول بينية أسية لنوعين من الزبائن وتوضيح النتائج من خلال تطبيق في أنظمة الشبكات.

6- نوصي بتطبيق النظام المقترح على أنظمة $G/M/1$ لأكثر من نوعين من الزبائن.
7- نوصي بتوسيع مفهوم البحث على أنظمة ذات n-مخدم.

المراجع:

1) Whitt, W. (1983). "Queueing Models with Markovian Arrival Processes." *Operations Research*, 31(5), 931-945.
2) Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems: Volume 1 - Theory*. John Wiley & Sons.
3) Gross, D., & Harris, C. M. (1998). *Fundamentals of Queueing Theory*. Wiley.
4) Boucherie, R. J., & van der Wal, J. (2000). *Queueing Models for Computer Networks*. Kluwer Academic Publishers.
5) Rao, K. P. S. (1990). "The Impact of Renewal Theory on Queueing Systems." *Journal of Applied Probability*, 27(1), 70-85.
6) Pyke, R.(1961a) Markov renewal processes: definitions and preliminary properties. Ann. Math. Statist., 32,1231-1242.
7) Howard M. Taylor, Samuel Karlin, An Introduction to Stochastic Modeling 3, Statistical Consultant Onancock Virginia, Department of

Mathematics Stanford University Stanford California, 1998, 1994, 1984 by Academic Press.

8) Franciszek.G,(2015), Semi Markov Processes: Application in System

Reliability and Maintenance. Polish Naval University Gdyia, Poland Elsevier.

9) Gunter Bolch,Stefan Greiner, Hermann de Meer,Kishor S. Trivedi, Queueing Networks and Markov Chains – 2nd Edition, John Wiley & Sons, 2006.

10) W. J. Stewart, Probability, Markov, Chains, Queues and Simulation, Princeton University Press, 2009.

دراسة تأثير بعض العوامل الفيزيائية على كفاءة الخلية الشمسية السيليكونية باستخدام النمذجة

صالح الدرويش[1] د. أحمد العبدو[2] د. ناصر سعد الدين[3]

ملخص:

تم في هذا البحث دراسة الدارة الالكترونية المكافئة للخلية الشمسية السيليكونية ودراسة بارامترات خرج الخلية الشمسية السيليكونية والمنحنيات المميزة لها مثل منحني (الطاقة – جهد) ومنحني (الجهد – تيار) ثم قمنا بدراسة تأثير بعض العوامل الفيزيائية مثل درجة الحرارة وشدة الإشعاع الساقط ومساحة سطح الخلية الشمسية وسماكة كل من المنطقتين n ، p وتركيز الإشابة في كل من نصفي الناقلين n و p على عمل وكفاءة الخلية الشمسية السيليكونية وذلك باستخدام برنامج PC1D .

وذلك عن طريق تثبيت بارامترات العمل وتغيير البارامتر المراد معرفة تأثيره على كفاءة الخلية الشمسية ورسم المنحنيات المميزة وحساب الكفاءة بعد إجراء كل تغيير.

كلمات مفتاحية: الخلية الشمسية السيليكونية،PC1D ، تركيز الإشابة، الكفاءة، عامل الملء.

1- طالب دكتوراه في قسم الفيزياء–كلية العلوم–جامعة حمص 2- أستاذ مساعد في قسم الفيزياء–كلية العلوم قسم الفيزياء 3- أستاذ في قسم الفيزياء–كلية العلوم–قسم الفيزياء

Studying the effect of some physical factors on the efficiency of silicon solar cells using modeling

Saleh Aldarwish
University of Al-Baath Faculty of science
Dept. of Physics –Homs-Syria

Abstract

In this research, the equivalent electrical circuit of the silicon cell was studied, and the solar thermal decomposition features and their distinctive features from silicon were studied, such as the (energy-voltage) curve and the (voltage-current) curve, then the desire to study some physical factors such as temperature, intensity of reading the effect of the solar energy surface and the thickness of each of the two regions n, p and the concentration of the ion in each of the two semiconductors n and p on the work of solar agricultural contributions was studied using the PC1D program. This was done by installing the plans of the parameters of the work of changing the parameters to know their effect on the effective solar energy and drawing the distinctive points and calculating the commitment after making each change.

Keywords: silicon solar cell, PC1D, doping concentration, efficiency, fill factor

1 – مقدمة

مع تزايد الطلب على الطاقة عالميًا وزيادة القلق بشأن الآثار البيئية السلبية الناتجة عن استخدام الوقود الأحفوري أصبح توليد الكهرباء العالمي ينمو بشكل دائم على مدى العقود الماضية [1]. حيث أصبح التحول إلى مصادر الطاقة المتجددة أمرًا ضروريًا لتحقيق التنمية المستدامة. تُعد الطاقة المتجددة الخيار الأمثل نظرًا لاستدامتها وقلة تأثيرها البيئي، حيث تتوفر مصادرها بكميات لا تنفد مثل الشمس والرياح والمياه [2].

وبحسب تقرير الوكالة الدولية للطاقة المتجددة(IRENA) ، فإن الطاقة المتجددة ساهمت بشكل متزايد في إنتاج الطاقة العالمي، حيث تضاعفت القدرات الإنتاجية للطاقة الشمسية والريحية في العقد الأخير[3] .

تُعد الطاقة الشمسية أحد أهم مصادر الطاقة المتجددة نظرًا لتوفرها الكبير في جميع أنحاء العالم ولقدرتها على توليد كميات كبيرة من الكهرباء بدون انبعاثات كربونية [4].

وتُستخدم الخلايا الشمسية السيليكونية على نطاق واسع في هذا المجال، إذ تشكل نحو 90% من سوق الخلايا الشمسية العالمية [5].

تعتبر هذه الخلايا أحد أبرز التقنيات المستخدمة في تحويل الطاقة الشمسية إلى طاقة كهربائية نظرًا لكفاءتها العالية نسبياً وتوافر مادة السيليكون بشكل جيد[6].

ومع ذلك، لا تزال كفاءة الخلايا الشمسية السيليكونية تتأثر بعدة عوامل فيزيائية، مثل درجة الحرارة، والإشعاع الشمسي، وجودة المواد المستخدمة في تصنيع وتوصيل الخلايا السيليكونية، مما يحفز الباحثين لتحسين أدائها من خلال النمذجة والمحاكاة.

تحسين كفاءة هذه الخلايا ليس فقط يزيد من قدرتها على إنتاج الطاقة ولكنه يساهم أيضًا في تقليل التكلفة الاقتصادية والطاقة المهدورة [7].

حيث يوجد دائمًا مقايضة بين تكاليف الإنتاج وكفاءة التحويل لذلك، من الضروري فهم آليات الخسارة المختلفة التي تحد من كفاءة جهاز الطاقة الكهروضوئية المطلوب لتحسين التكاليف المقابلة للإنتاج [8].

نظرًا لأن التأثيرات التكنولوجية والفيزيائية متعددة حتى على مستوى الخلية الواحدة (بما في ذلك المواد الأساسية وهندسة الخلية والعمليات الفيزيائية وتحسين الخلايا الفردية).

إن محاكاة الأجهزة الكهروضوئية تعتبر نهج ممتاز لمعالجة هذه المهمة المعقدة والصعبة. وبالتالي، فإن مفتاح النمذجة الدقيقة والتنبؤية للأجهزة هو المعرفة السليمة والفهم للفيزياء الأساسية [9].

ومن هنا، تأتي أهمية دراسة تأثير العوامل الفيزيائية المختلفة على أداء الخلايا الشمسية السيليكونية.

2 – أهداف البحث:

يهدف البحث إلى:

1 – دراسة الدارة المكافئة للخلية الشمسية السيليكونية أحادية التبلور monocrystalline.

2– نمذجة الخلية الشمسية السيليكونية أحادية التبلور monocrystalline باستخدام برنامج PC1D وفق بارامترات عمل بدائية محددة تتناسب مع تقنيات التصنيع.

2 – دراسة الميزة I-V والميزة P-V وحساب الكفاءة وعامل الملء للخلية الشمسية للخلية الشمسية الأولية.

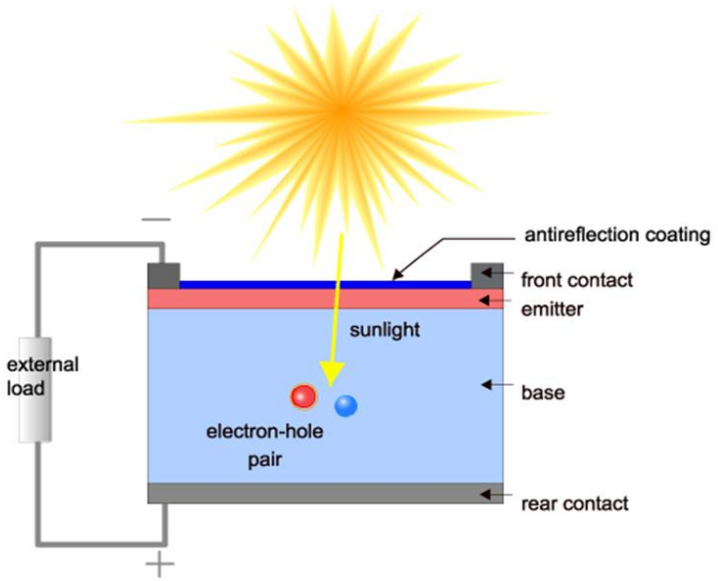
3 – تطبيق تغييرات في أحد العوامل الفيزيائية وتثبيت بقية العوامل ثم حساب الكفاءة وعامل الملء ورسم الميزتين I-V والميزة P-V لمعرفة تأثير هذا العامل على أداء الخلية الشمسية السيليكونية.

3 – مواد وطرق البحث:

الخلية الشمسية هي عبارة عن جهاز إلكتروني يحول ضوء الشمس مباشرة إلى كهرباء. ينتج الضوء الساقط على سطح الخلية الشمسية تيارًا وجهدًا لتوليد الطاقة الكهربائية [10].

تتطلب هذه العملية أولاً، مادة يرفع فيها امتصاص الضوء إلكترونًا إلى حالة طاقة أعلى، وثانيًا، نقل هذا الإلكترون ذي الطاقة الأعلى من الخلية الشمسية إلى الدارة خارجية. ثم يبدد الإلكترون طاقته في الدارة الخارجية ويعود إلى الخلية الشمسية. يمكن لمجموعة متنوعة من المواد والعمليات أن تلبي متطلبات تحويل الطاقة الكهروضوئية، ولكن في الحالة العملية، تستخدم جميع عمليات تحويل الطاقة الكهروضوئية تقريبًا مواد أنصاف النواقل مثل السيليكون والجرمانيوم في شكل وصلة p-n [11].

يبين الشكل (1) مقطع عرضي للخلية الشمسية.

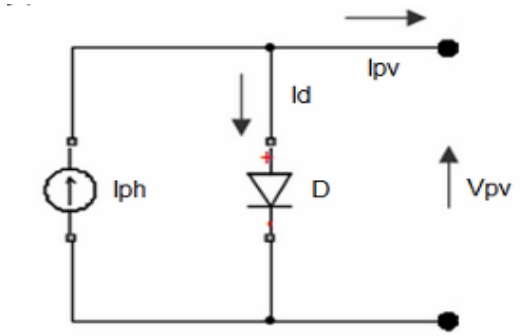


الشكل (1) مقطع عرضي للخلية الشمسية السيليكونية

حيث يمكن تمثيل الخلية الشمسية السيليكونية بواسطة متصل ثنائي PN.

وبالتالي يمكن الحصول على الدارة المكافئة للخلية الشمسية عن طريق نموذج الدايود المفرد.

حيث يبين الشكل (2) الدارة المكافئة للخلية الشمسية المثالية[12].



الشكل (2) الدارة المكافئة للخلية الشمسية المثالية

تتكون الدائرة المكافئة للخلية الشمسية من الصمام الثنائي ومنبع التيار المتصلين على التفرع.

ينتج المصدر الضوئي التيار I_{ph}، والذي يتناسب طرديًا مع الإشعاع الشمسي G.

البارامترات الرئيسية المستخدمة لتوصيف الخلية الكهروضوئية (PV) هي تيار الدائرة القصيرة وجهد الدائرة المفتوحة [13].

المعادلة التي تصف الدارة المكافئة المثالية مشتقة من قانون كيرشوف:

$$I_{PV} = I_{PH} - I_d \qquad (1)$$

$$I_d = I_0\left(e^{\frac{q.V_{PV}}{NKT}} - 1\right) \qquad (2)$$

بالتعويض بالمعادلة (1) ينتج لدينا:[14]

$$I_{PV} = I_{PH} - I_0\left(e^{\frac{q.V_{PV}}{NKT}} - 1\right) \qquad (3)$$

حيث:

I_{PH} التيار الضوئي والذي يساوي تيار الدارة القصيرة I_{SC}.

I_{PV} التيار الناتج عن الخلية الشمسية المثالية.

I_d تيار الدايود.

I_0 تيار الإشباع العكسي للدايود.

q شحنة الإلكترون.

N عامل المثالية للدايود (قيمته من أجل الخلايا الشمسية الجيدة تكون قريبة من الواحد)

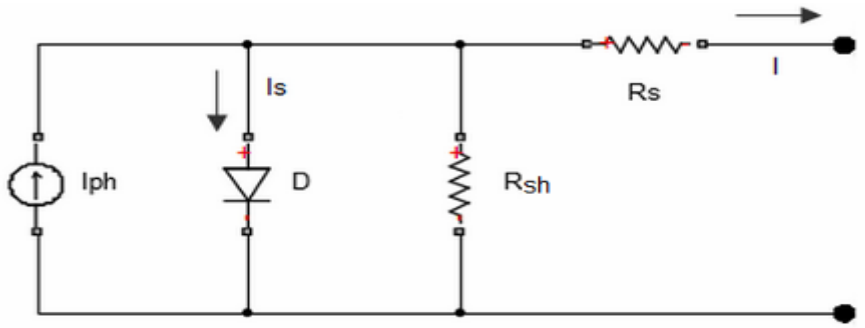
K ثابت بولتزمان.

T درجة حرارة الوصلة الثنائية.

V_{PV} الجهد عير الخلية الشمسية.

للحصول على تمثيل أفضل للسلوك الكهربائي للخلية الشمسية العملية، يأخذ النموذج الثاني في الاعتبار المقاومة التسلسلية والمقاومة التفرعية بسبب الخسائر الكهربائية في مستويات التلامس بين طبقتي الخلية الشمسية [14].

يبين الشكل (3) الدارة المكافئة للخلية الشمسية العملية والتي سوف يتم إجراء المحاكاة عليها.



الشكل (3) الدارة المكافئة للخلية الشمسية والتي سوف يتم إجراء المحاكاة عليها.

حيث يعطى التيار الناتج عن الخلية الشمسية السيليكونية بالعلاقة: [15]

$$I = I_{PH} - I_0\left(exp\ \frac{q(V + R_S.I}{NKT} - 1\right) - \frac{(V + R_S.I)}{R_{SH}} \qquad (4)$$

وحيث: R_S المقاومة التسلسلية، R_{SH} المقاومة التفرعية.

من المعادلة (4) يمكن حساب البارامترات الرئيسية التي تصف الخلية الشمسية مثل:

❖ تيار القصر I_{SC} : ويساوي التيار الناتج بواسطة الضوء عند فرق كمون معدوم أي عند قصر الدارة .

$$I_{SC} = I_{PH} \qquad (5)$$

❖ جهد الدارة المفتوحة V_{OC}: نحصل عليه عندما لا يمر تيار في الخلية أي عندما نجعل التيار في المعادلة (4) يساوي الصفر ويعطى بالعلاقة:[16]

$$V_{OC} = \frac{KT}{q} Ln\left(\frac{I_{PH}}{I_0} + 1\right) \qquad (6)$$

حيث K: ثابت بولتزمان، T: درجة الحرارة المطلقة، q: عامل المثالية، I_{PH}: التيار الناتج بالضوء، I_0: تيار الإشباع العكسي للدايود.

❖ عامل الملء FF: هو مقياس لمدى مربعية خصائص الخرج ويمثل نسبة السطح المحصور عند نقطة العمل المثلى الى السطح المحصور في المميزة I-V. الخلايا الشمسية التجارية النموذجية لها عامل تعبئة >0.70. [17].

$$FF = \frac{I_{MP}V_{MP}}{I_{SC}V_{OC}} \qquad (7)$$

I_{MP}, V_{MP} قيمة التيار والجهد الأعظمي.

❖ كفاءة تحويل الطاقة الشمسية (المردود) [18]:

$$\eta = \frac{I_{MP}V_{MP}}{P_{IN}} = \frac{I_{SC}V_{OC}FF}{P_{IN}} \qquad (8)$$

4 – النتائج والمناقشة

4 – 1 – نمذجة الخلية الشمسية السيليكونية (الدارة الأولية):

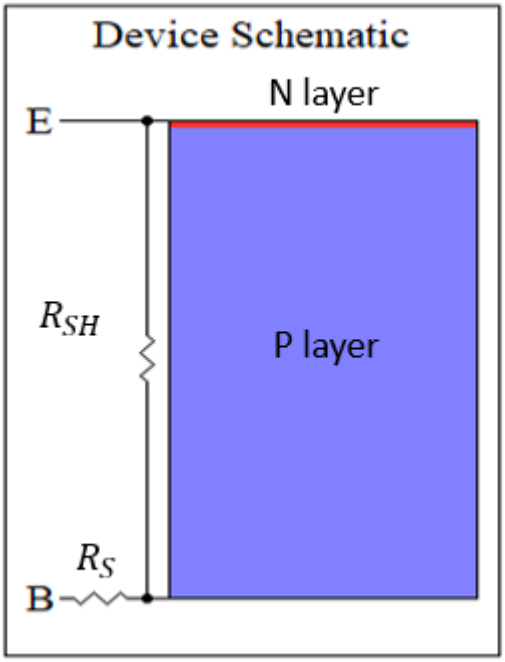
تم استخدام برنامج PC1D، الذي تم تطويره من قبل جامعة نيو ساوث ويلز، لمحاكاة خصائص الخلايا الكهروضوئية لأجهزة أنصاف النواقل البلورية، يتم إجراء محاكاة الخلية الشمسية السيليكونية عن طريق إعداد بارامترات رئيسية، والتي تشمل مساحة الجهاز، والسماكة، وعرض المجال المحظور، وما إلى ذلك. حيث يتم الحصول على العديد من الخصائص المهمة للخلايا الشمسية السيليكون عن طريق المحاكاة [19].

حيث يوضح الجدول (1) بارامترات العمل البدائية المستخدمة لنمذجة الخلية الشمسية السيليكونية أحادية التبلور mono crystalline.

الجدول (1)

مساحة الجهاز Devise area	$1\ cm^2$
المقاومة التفرعية R_{shunt}	$3.33\ \Omega$
المقاومة التسلسلية Rseries	$0.8\ \Omega$
الانعكاس عن السطح الأمامي	%5
سماكة الطبقة p	$180\ \mu m$
سماكة الطبقة n	$0.1\ \mu m$
تركيز إشابة المنطقة p	$1 \times 10^{16}\ cm^{-3}$
تركيز إشابة المنطقة n	$2 \times 10^{20}\ cm^{-3}$
المجال المحظور	1.124 eV
درجة الحرارة	25 ℃
الكتلة الهوائية	1.5 gr/space
شدة الإشعاع الشمسي	$0.1\ w/cm^2$

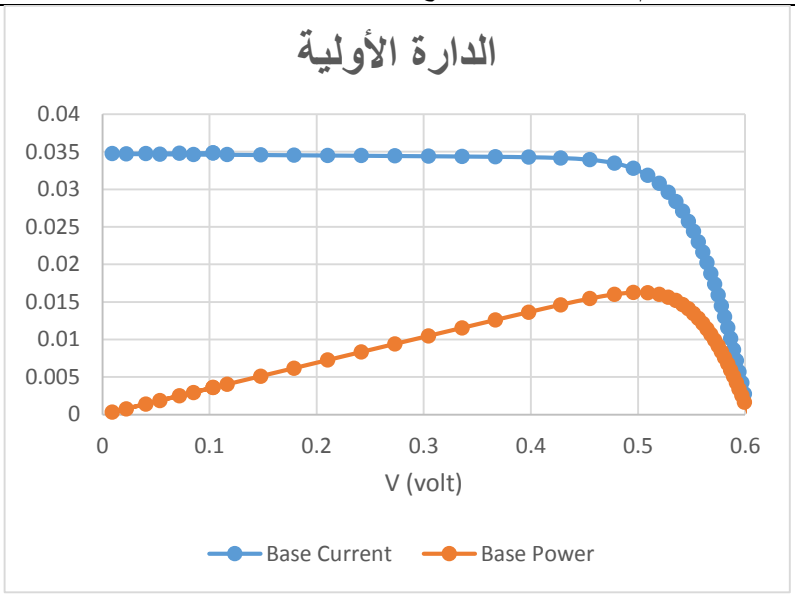
يبين الشكل (4) مخطط الدارة المكافئة للخلية الشمسية السيليكونية المنفذة وفق برنامج المحاكاة.



الشكل (4) مخطط الخلية الشمسية السيليكونية وفق برنامج المحاكاة

تم الحصول على نتائج المحاكاة ورسم الميزة I-V والميزة P-V

حيث يبين الشكل (5) الميزتين I-V, P-V للخلية الشمسية السيليكونية الأولية.



الشكل (5) الميزتين I-V, P-V للخلية الشمسية السيليكونية البدائية.

تم الحصول على قيم P_{MAX} ,V_{OC} ,I_{SC} من خلال المحاكاة وباستخدام العلاقتين 2 و3 تم حساب الكفاءة وعامل الملء وتم الحصول على النتائج المبينة بالجدول (2)

بالجدول (2)

	Isc (A)	Voc(V)	Pmax(W)	FF	□	□%
البحث الحالي	0.0347	0.603	0.0163	0.78	0.163	16.3%
المرجع [20]	0.0329	0.532	0.0178	0.79	0.164	16.4%

يعود الاختلاف بين قيم البحث الحالي والمرجع لاختلاف شروط البدء.

4 – 2 – دراسة تأثير مساحة سطح الخلية الشمسية السيليكونية على أداء الخلية:

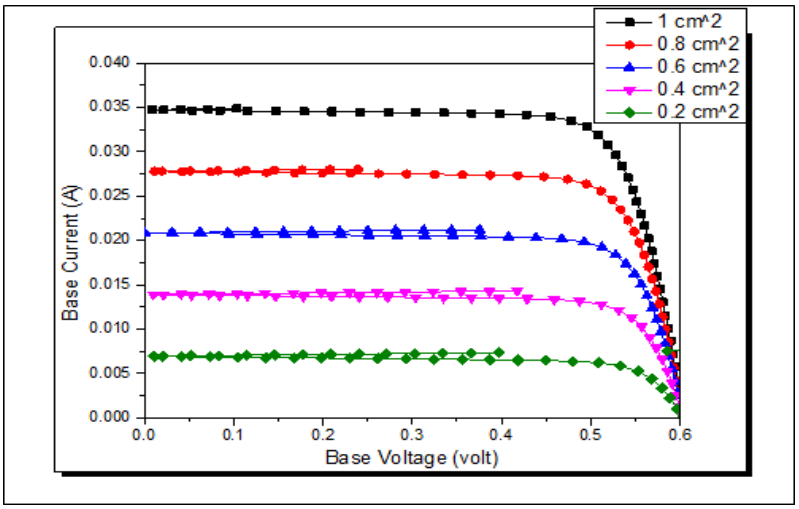
تم إجراء تغيير لمساحة سطح الخلية الشمسية السيليكونية وفق القيم (cm^2 0.2–0.4–0.6–0.8–1).

يبين الجدول (3) نتائج المحاكاة وحسابات الكفاءة وعامل الملء لحالات مساحة السطح المختلفة:

الجدول (3)

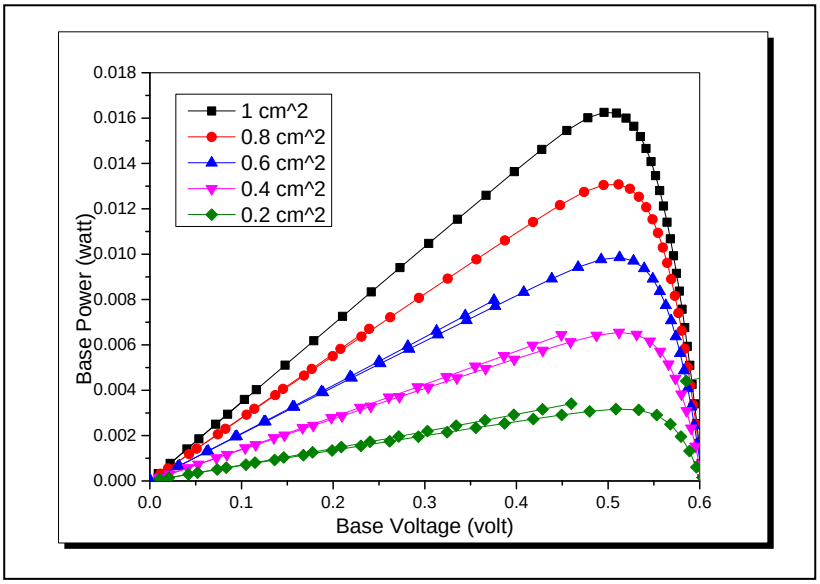
Surface area(cm^2)	Isc (A)	Voc (V)	Pmax (w)	Pin (w)	FF	?	%?
0.2	0.006947	0.6017	0.003171	0.1	0.758611	0.15855	15.855
0.4	0.0139	0.6029	0.006551	0.1	0.781713	0.163775	16.3775
0.6	0.0208	0.6033	0.009859	0.1	0.785663	0.164317	16.43167
0.8	0.0278	0.6035	0.0131	0.1	0.780817	0.16375	16.375
1	0.0347	0.6036	0.0163	0.1	0.778232	0.163	16.3

يبين الشكل (6) الميزة (I-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم السطح المختلفة.



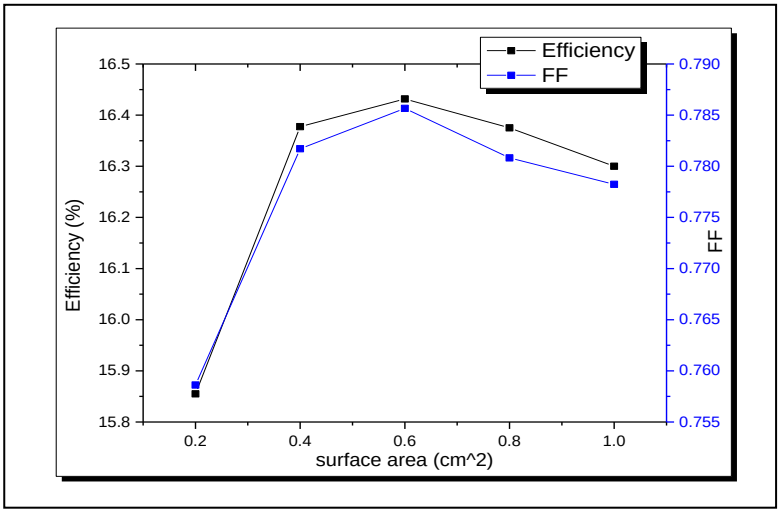
الشكل (6) الميزة (I-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم السطح المختلفة.

كما يبين الشكل (7) الميزة (P-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم السطح المختلفة.



الشكل (7) الميزة (P-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم السطح المختلفة.

يبين الشكل (8) تغيرات الكفاءة وعامل الملء بدلالة مساحة سطح الخلية الشمسية السيليكونية.



الشكل (8) تغيرات الكفاءة وعامل الملء بدلالة مساحة سطح الخلية الشمسية السيليكونية.

نلاحظ من الشكل (8) والقيم في الجدول (3) زيادة الكفاءة وعامل الملء مع زيادة سطح الخلية الشمسية السيليكونية المعرض للضوء وذلك بسبب زيادة تيار الدارة المقصورة بشكل واضح ولكن مع ازدياد السطح فإن قيمة الكفاءة وعامل الملء تتناقص على الرغم من زيادة تيار الدارة المقصورة وكمون الدارة المفتوحة وذلك يعود الى عمليات إعادة الاتحاد السطحي التي تزداد بزيادة مساحة سطح الخلية الشمسية [21].

4 – 3 – دراسة تأثير شدة الإشعاع الشمسي على أداء الخلية الشمسية السيليكونية:

من أهم البارامترات التي تؤثر على خرج وكفاءة الخلية الشمسية السيليكونية هي شدة الإشعاع الشمسي حيث يتم تحديد اعتماد الخلية الشمسية السيليكونية على شدة الإشعاع الشمسي من خلال العلاقة: [22]

$$I_{PH} = [I_{SC} + K_I(T - 298]\frac{\beta}{100}$$

حيث:

I_{PH} التيار الضوئي (A)

K_I المعامل الحراري لتيار الدارة المقصورة $A/°C$.

I_{SC} تيار الدارة المقصورة (A).

T درجة الحرارة المطلقة (K).

β شدة الإشعاع الشمسي (W/m^2)

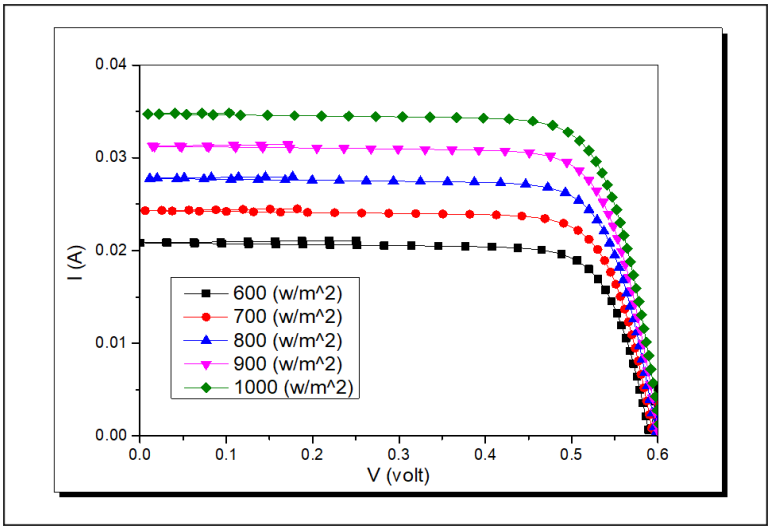
حيث نلاحظ من العلاقة زيادة شدة التيار الضوئي بزيادة شدة الإشعاع الشمسي.

يبين الجدول (4) قيم نتائج المحاكاة المأخوذة من أجل قيم شدة الإشعاع الشمسي $(600\text{-}700\text{-}800\text{-}900\text{-}1000\text{-}1100)W/m^2$

الجدول (4)

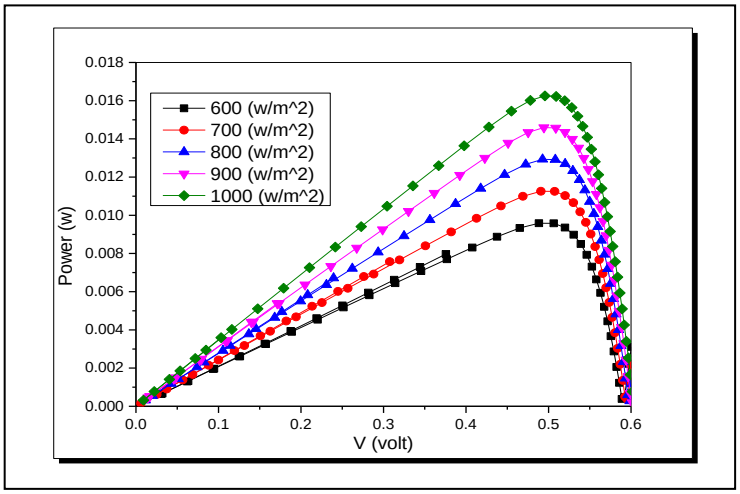
I (W/m^2)	Isc(A)	Voc(V)	P max(W)	P in(W)	FF	□	□%
600	0.0208	0.5903	0.009613	0.06	0.78293	0.160217	16.02 %
700	0.0243	0.5944	0.0113	0.07	0.782336	0.161429	16.14 %
800	0.0278	0.5979	0.013	0.08	0.782114	0.1625	16.25 %
900	0.0313	0.6009	0.0146	0.09	0.776258	0.162222	16.22 %
1000	0.0347	0.6036	0.0163	0.1	0.778232	0.163	16.30 %
1100	0.0382	0.6061	0.0179	0.11	0.773117	0.162727	16.27 %

كما يبين الشكل (9) الميزة (I-V) للخلية الشمسية السيليكونية عند قيم شدات إشعاع شمسي مختلفة.



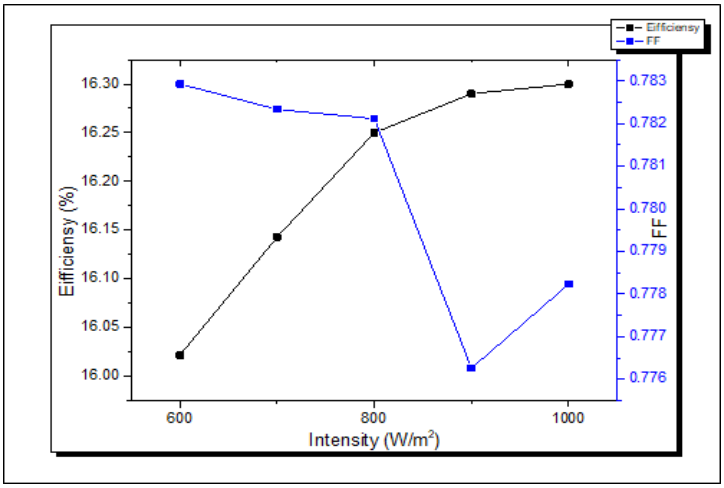
الشكل (9) الميزة (I-V) للخلية الشمسية السيليكونية عند قيم شدات إشعاع شمسي مختلفة.

كما يبين الشكل (10) الميزة (P-V) للخلية الشمسية السيليكونية عند قيم شدات إشعاع شمسي مختلفة.



الشكل (10) الميزة (P-V) للخلية الشمسية السيليكونية عند قيم شدات إشعاع شمسي مختلفة.

يبين الشكل (11) تغيرات الكفاءة وعامل الملء بدلالة قيم شدة الإشعاع الشمسي الوارد.



الشكل (11) تغيرات الكفاءة وعامل الملء بدلالة قيم شدة الإشعاع الشمسي الوارد.

نلاحظ من الشكل (11) أن الكفاءة تزداد بزيادة شدة الإشعاع الضوئي نظراً لزيادة تيار الدارة المقصورة والذي يعود الى زيادة الأزواج المتولدة ضوئياً والتي تزداد بزيادة عدد الفوتونات الساقطة مع وجود قيم مقبولة لعامل الملء عند جميع قيم الشدات الضوئية المدروسة [23].

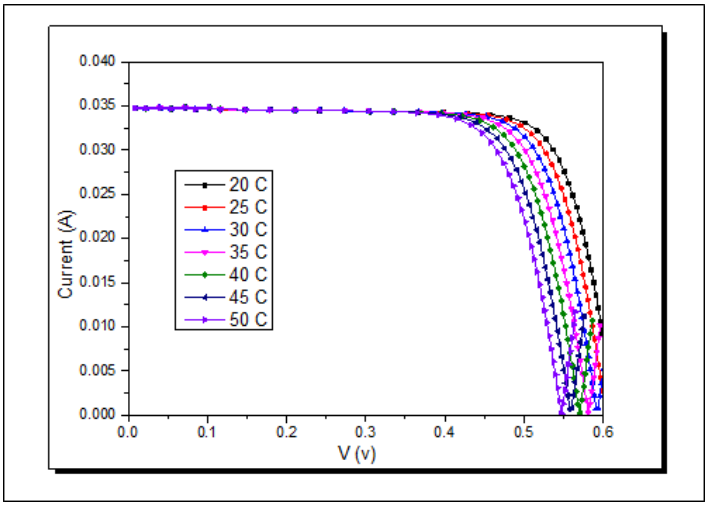
4 – 4 – دراسة تأثير درجة الحرارة على أداء الخلية الشمسية السيليكونية:

يبين الجدول (5) نتائج المحاكاة وحسابات الكفاءة وعامل الملء من أجل درجات حرارة مختلفة ضمن المجال $(20 - 25 - 30 - 35 - 40 - 45 - 50)℃$:

الجدول (5)

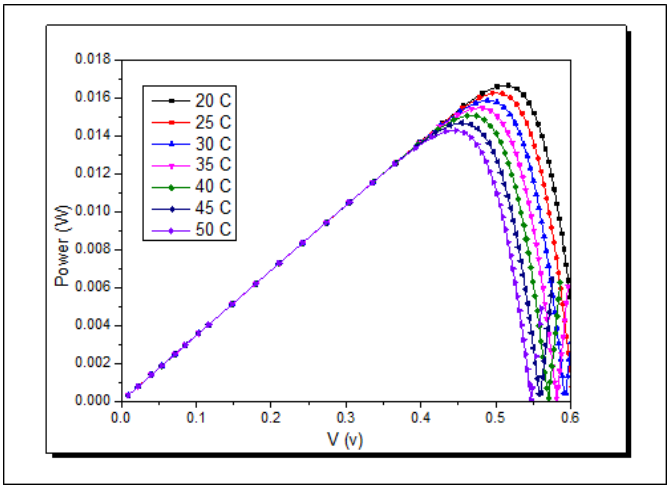
T (°C)	Isc(A)	Voc(V)	P max(W)	P in(W)	FF	□	□%
20	0.0347	0.6148	0.0167	0.1	0.782804	0.167	16.70
25	0.0347	0.6036	0.0163	0.1	0.778232	0.163	16.30
30	0.0347	0.5925	0.0159	0.1	0.773356	0.159	15.90
35	0.0347	0.5813	0.0155	0.1	0.768426	0.155	15.50
40	0.0347	0.57	0.0151	0.1	0.763436	0.151	15.10
45	0.0348	0.5588	0.0147	0.1	0.75593	0.147	14.70
50	0.0348	0.5475	0.0143	0.1	0.750538	0.143	14.30

كما يبين الشكل (12) الميزة (I-V) للخلية الشمسية السيليكونية عند قيم درجات حرارة ضمن المجال المدروس.



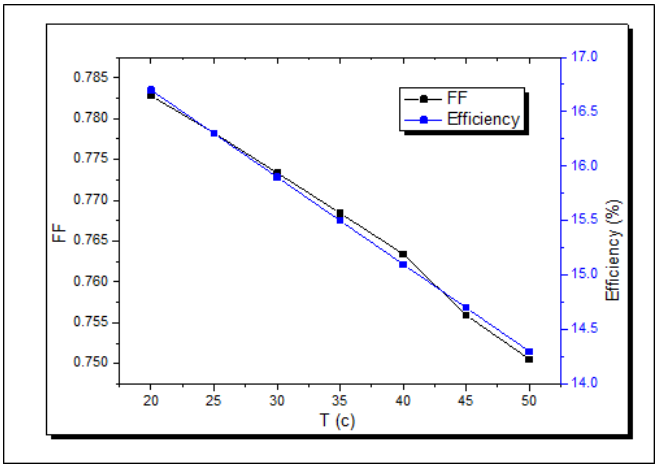
الشكل (12) الميزة (I-V) للخلية الشمسية السيليكونية عند قيم درجات حرارة ضمن المجال المدروس.

كما يبين الشكل (13) الميزة (P-V) للخلية الشمسية السيليكونية عند قيم درجات حرارة ضمن المجال المدروس.



الشكل (13) الميزة (P-V) للخلية الشمسية السيليكونية عند قيم درجات حرارة ضمن المجال المدروس.

يبين الشكل (14) العلاقة بين قيم الكفاءة وعامل الملء بدلالة درجات الحرارة ضمن المجال المدروس.



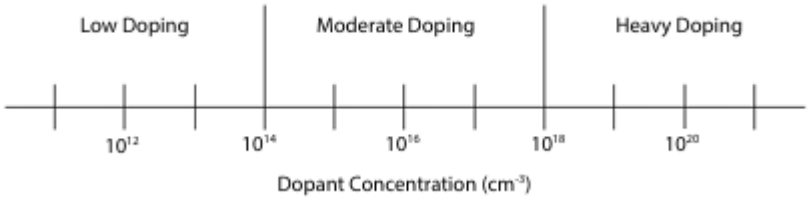
الشكل (14) العلاقة بين قيم الكفاءة وعامل الملء بدلالة درجات الحرارة ضمن المجال المدروس.

نلاحظ من الشكل (14) تناقص قيمة كفاءة الخلية الشمسية السيليكونية وعامل الملء بزيادة درجة الحرارة بالرغم من أن الخلية الشمسية السيليكونية تعتبر نصف ناقل أي تزداد ناقليته بزيادة درجة الحرارة حيث نلاحظ من الشكل (12) زيادة التيار زيادة طفيفة بزيادة درجة الحرارة ولكن الكفاءة والاستطاعة وكمون الدارة المفتوحة وعامل الملء يتناقص وهذا يتوافق مع العمل العلمي [24].

4 – 5 – دراسة تأثير تركيز الإشابات في نصفي الناقلين N,P على أداء الخلية الشمسية السيليكونية:

يتم تعديل تركيز الإلكترونات والثقوب في الخلية الشمسية المصنوعة من السيليكون وتحسينها عن طريق التشويب. يؤثر تركيز التشويب ونوع التشويب (ضحل أو عميق) على التوصيل الكهربائي لمادة أنصاف النواقل، مما يجعل الخلية الشمسية أكثر كفاءة. يعتمد التوصيل الكهربائي للخلية الشمسية المصنوعة من السيليكون بشكل أساسي على البارامترات مثل تركيز التشويب

وحركة الإلكترونات والثقوب في منطقة أنصاف النواقل للخلية الشمسية. يوضح الشكل مستويات تركيز التشويب المختلفة للخلايا الشمسية المصنوعة من السيليكون.



يتم امتصاص جزء كبير من الضوء على سطح الخلية الشمسية مما يؤدي إلى معدل توليد أزواج ضوئية مرتفع. يجب تصميم تركيز الإشابات وسمك الباعث بعناية من أجل امتصاص معظم الضوء الوارد. يمكن أن يؤدي تركيز المنشطات العالي في هذه الطبقات إلى انخفاض الكفاءة الكلية بسبب انخفاض نفاذية وامتصاص الضوء ومعدل إعادة اتحاد أكبر [25]. ولكن هناك حاجة أيضًا إلى تركيز عالٍ بما يكفي لمساعدة آلية النقل بالانجراف وتحقيق مقاومة صيحة أقل.

4 – 5 – 1– دراسة تأثير تركيز الإشابات في نصف الناقل N على أداء الخلية الشمسية السيليكونية:

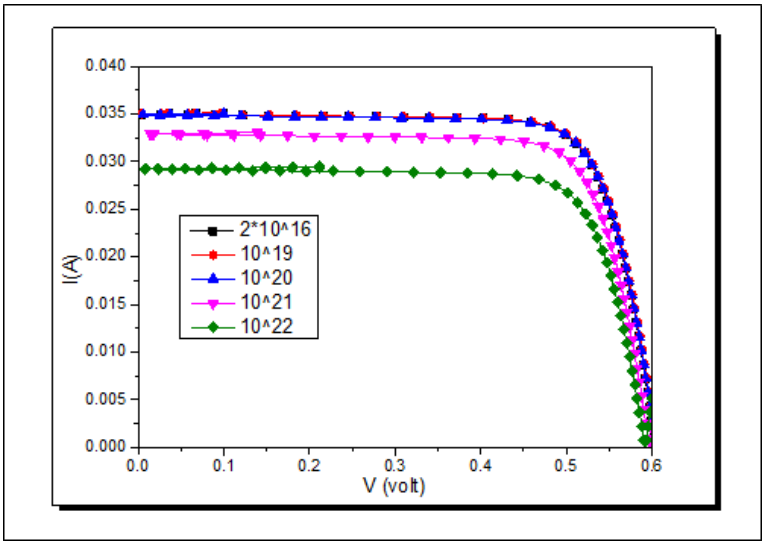
يوضح الجدول (6) تغيرات قيمة مقاومة الصفيحة (R_{sheet}) وعمق الوصلة والكفاءة وعامل الملء من أجل قيم مختلفة لتركيز الشوائب في المنطقة n.

تُعد قيمة مقاومة صفيحة الباعث (R_{sheet}) بارامتر ذو تحكم عملي كبير في عملية تصنيع خلايا السيليكون حيث لها تأثير كبير على التكلفة.

الجدول (6)

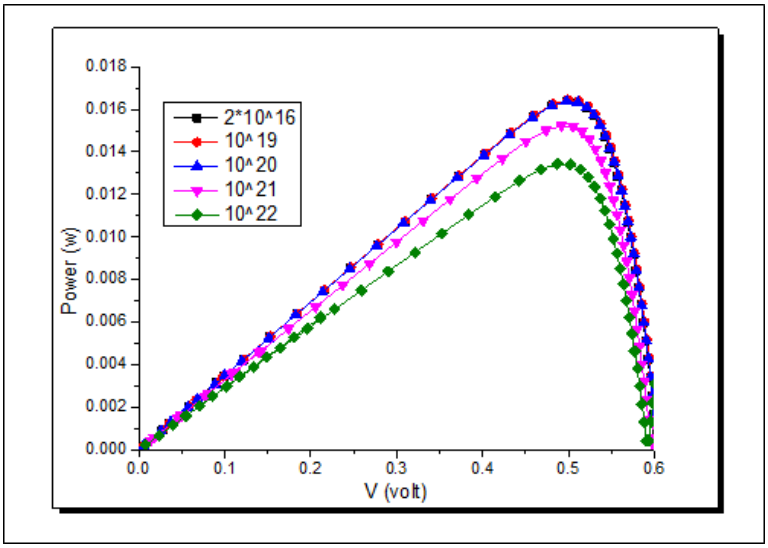
n doping (cm^{-3})	Junction depth (um)	sheet resestanse(Ω/Cm^2)	Isc(A)	Voc(V)	Pmax(W)	Pin(W)	FF	□%
10^19	0.2327	662.4	0.035	0.6057	0.0165	0.1	0.77832	16.5
10^20	0.2751	128.1	0.0349	0.6048	0.0164	0.1	0.776974	16.4
10^21	0.3123	16.76	0.0329	0.5971	0.0152	0.1	0.77375	15.2
10^22	0.3459	1.805	0.0292	0.592	0.0134	0.1	0.775176	13.4
2*10^16	0.04769	79650	0.035	0.6044	0.0164	0.1	0.775267	16.4

يوضح الشكل (15) الميزة (I-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لتراكيز الإشابة في المنطقة N.



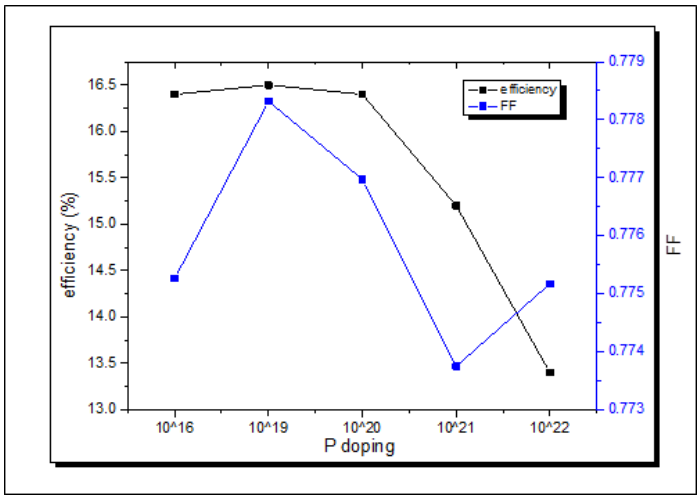
الشكل (15) الميزة (I-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لتراكيز الإشابة في المنطقة N.

يوضح الشكل (16) الميزة (P-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لتراكيز الإشابة في المنطقة N.



الشكل (16) الميزة (P-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لتراكيز الإشابة في المنطقة N.

يوضح الشكل (17) تغيرات قيمة الكفاءة وعامل الملء للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لتراكيز المنطقة N.



الشكل (17) تغيرات قيمة الكفاءة وعامل الملء للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لتراكيز المنطقة N.

نلاحظ من الجدول (6) والشكل (17) أن تركيز الشوائب المنخفض تكون الكفاءة عالية بسبب مقاومة الصفيحة العالية وعامل ملء ضعيف وتكون أعلى قيمة للكفاءة عند تركيز 10^{19} بسبب ضيق المجال المحظور لنصف الناقل وزيادة الناقلية ومع زيادة التركيز تنخفض الكفاءة بسبب نقصان مقاومة الصفيحة وزيادة عمليات إعادة الاتحاد بشكل كبير.[26]

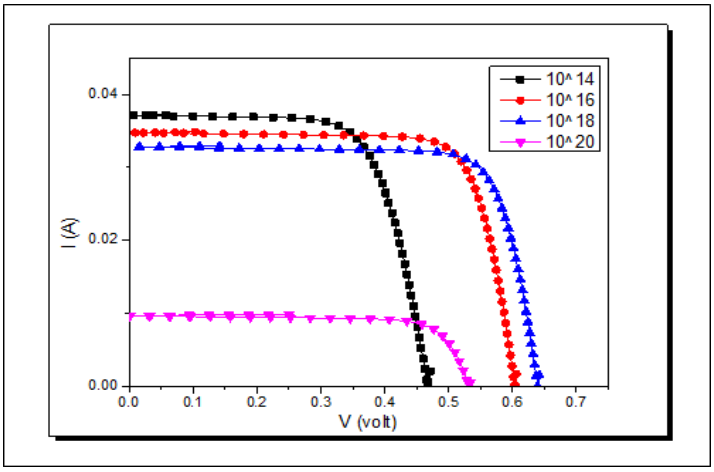
4 – 5 –2– دراسة تأثير تركيز الإشابات في نصف الناقل P على أداء الخلية الشمسية السيليكونية:

يوضح الجدول (7) تغيرات قيمة المقاومة النوعية للصفيحة والكفاءة وعامل الملء من أجل قيم مختلفة لتركيز الشوائب في المنطقة P.

الجدول (7)

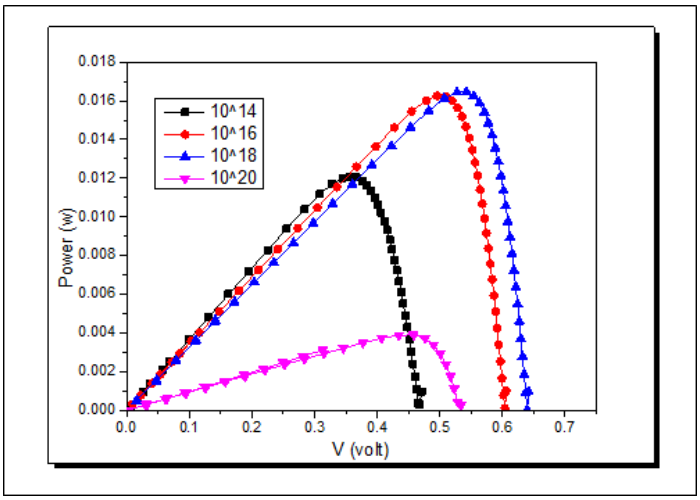
P doping(cm^{-3})	Resistivity(Ω.cm)	Isc(A)	Voc(V)	Pmax(W)	Pin(W)	FF	□%
10^14	133.5	0.0371	0.4671	0.0121	0.1	0.698235	12.1
10^16	1.47	0.0347	0.6036	0.0163	0.1	0.778232	16.3
10^18	0.03664	0.0328	0.6394	0.0165	0.1	0.786751	16.5
10^20	0.003124	0.009661	0.5318	0.003919	0.1	0.76279	3.919

يوضح الشكل (18) الميزة (I-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لتراكيز الإشابة في المنطقة N.



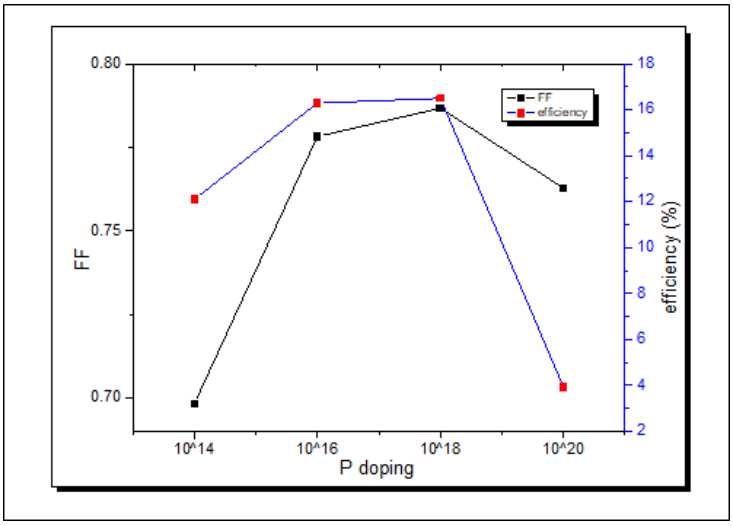
الشكل (18) الميزة (I-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لتراكيز الإشابة في المنطقة P.

يوضح الشكل (19) الميزة (P-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لتراكيز الإشابة في المنطقة P.



الشكل (19) الميزة (P-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لتراكيز الإشابة في المنطقة P.

الشكل (20) تغيرات قيمة الكفاءة وعامل الملء للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لتراكيز المنطقة P.



الشكل (20) تغيرات قيمة الكفاءة وعامل الملء للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لتراكيز المنطقة P.

نلاحظ أن زيادة تركيز الشوائب لا تزيد دائمًا من الكفاءة. وخاصةً عندما يكون تركيز الشوائب في نصف الناقل السيليكوني من النوع p أكبر من أو أقرب إلى تركيز الشوائب في نصف الناقل النوع n والتي تم تثبيتها عند قيمة $(2\times10^{20})cm^{-3}$، تنخفض الكفاءة بشكل كبير. حيث أن الإفراط في التشويب، يؤدي لتقليل عمر حوامل الشحنة الأقلية، وبالتالي يتم أيضًا تقليل طول الانتشار وبالتالي تقليل الكفاءة [27].

4 – 6 – دراسة تأثير سماكة منطقتي نصفي الناقلين N,P على أداء الخلية الشمسية السيليكونية:

أحد العوامل الرئيسية في تحديد جدوى تصنيع الأجهزة الكهروضوئية هو تكلفة المواد أنصاف النواقل. يعد الاختيار الدقيق للمواد ذات السماكة المثالية عاملاً مهمًا في تقليل النفقات مع تعظيم كفاءة الجهاز[28].

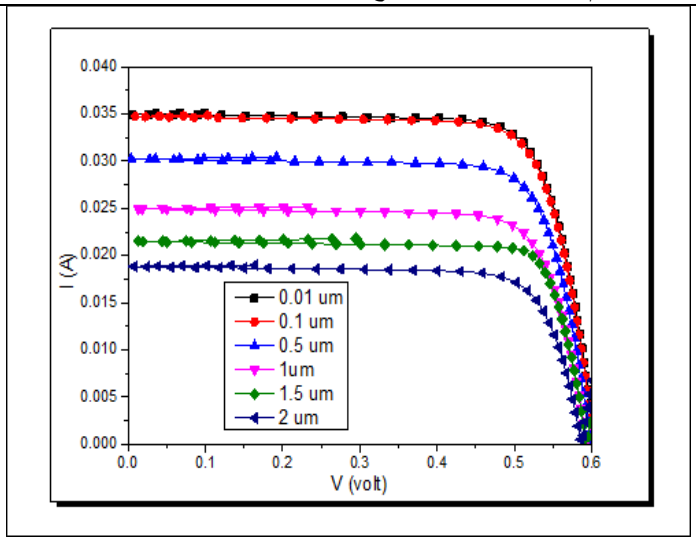
4-6-1 دراسة تأثير تركيز سماكة نصف الناقل N على أداء الخلية الشمسية السيليكونية:

يبين الجدول (8) تغيرات قيم مقاومة الصفيحة وتيار الدارة المقصورة وكمون الدارة المفتوحة وعامل الملء والكفاءة بتغير قيم سماكة نصف الناقل النوع N.

الجدول (8)

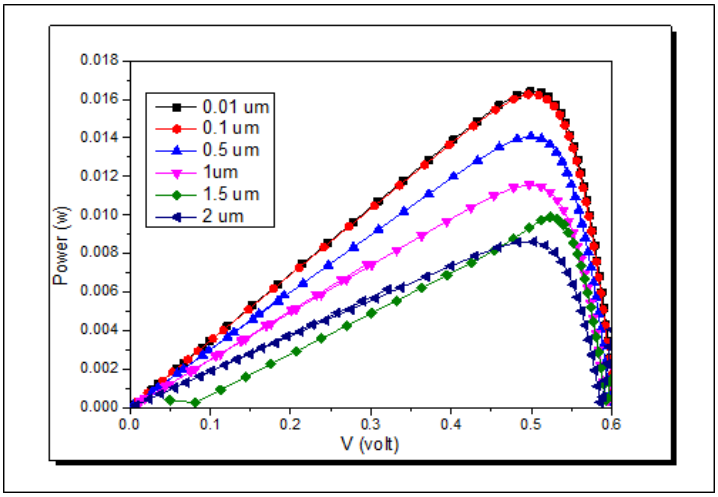
Thickness (um)	Rsh (ohm/m^2)	Isc (A)	Voc (V)	Pmax (W)	Pin (W)	FF	□ %
0.01	718.5	0.035	0.6049	0.0164	0.1	0.774626	16.4
0.1	71.85	0.0347	0.6036	0.0163	0.1	0.778232	16.3
0.5	14.37	0.0302	0.5986	0.0141	0.1	0.779966	14.1
1	7.185	0.0249	0.594	0.0116	0.1	0.784282	11.6
1.5	4.79	0.0214	0.5903	0.009883	0.1	0.782352	9.883
2	3.593	0.0188	0.5869	0.008634	0.1	0.78251	8.634

كما يبين الشكل (21) الميزة (I-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لسماكة في المنطقة N.



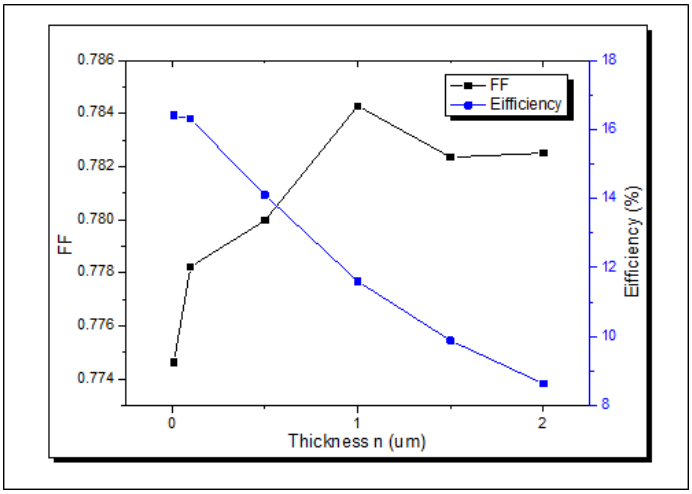
الشكل (21) الميزة (I-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لسماكة في المنطقة N.

كما يبين الشكل (22) الميزة (P-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة للسماكة في المنطقة N.



الشكل (22) الميزة (P-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة للسماكة في المنطقة N.

كما يبين الشكل **(23)** تغيرات قيمة الكفاءة وعامل الملء للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لسماكة المنطقة N.



الشكل (23) تغيرات قيمة الكفاءة وعامل الملء للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لسماكة المنطقة N.

نلاحظ انخفاض قيمة Isc و Voc مع زيادة سمك الباعث وكذلك تنخفض قيمة مقاومة الصفيحة. إن انخفاض مقاومة صفيحة الباعث أمر مرغوب فيه في الجهاز، ولكن هناك بعض العيوب في وجود باعث سميك. حيث لا يمكن أن يخترق الضوء طبقة الباعث السميكة والمشبعة بشدة، مما يؤثر على توليد حامل الشحنة، وبالتالي يؤدي إلى انخفاض كفاءة الجهاز[29].

4-6-2 دراسة تأثير تركيز سماكة نصف الناقل P على أداء الخلية الشمسية السيليكونية:

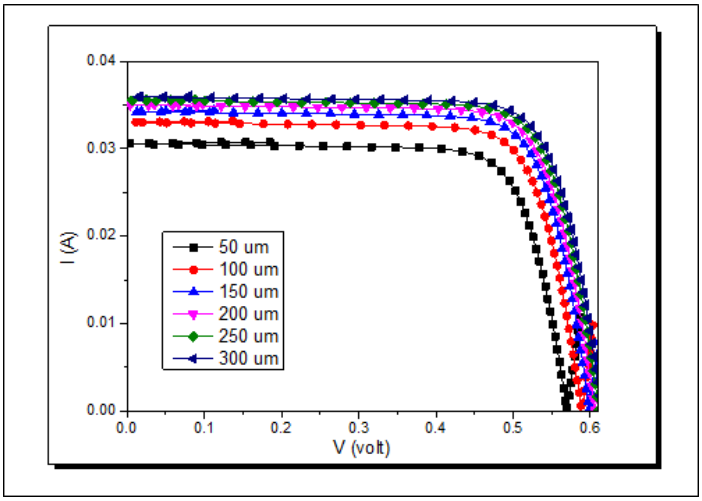
تعد طبقة الامتصاص الجزء الأكثر سمكًا في الخلايا الشمسية السيليكونية التجارية التي تمتص الضوء وتولد حاملات شحنة متحركة يتم نقلها إلى جهات الاتصال وجمعها من أجل توليد الكهرباء [30]. لا تعني طبقة الامتصاص الأكثر سمكًا كفاءة أعلى بسبب التأثيرات العكسية على V_{OC} , I_{SC} وذلك عند وجود طبقة إضافية مخملة للمنطقة P والتي تكون مرغوبة لزيادة الكفاءة.

يبين الجدول (9) تغيرات قيم تيار الدارة المقصورة وكمون الدارة المفتوحة وعامل الملء والكفاءة بتغير قيم سماكة نصف الناقل النوع P.

الجدول (9)

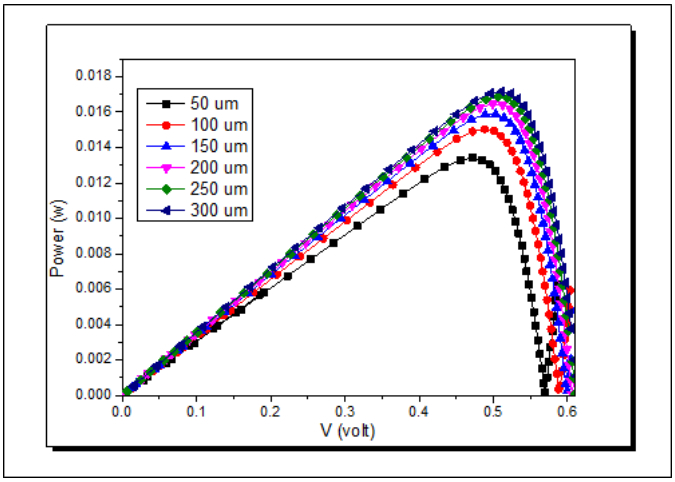
Thickness P (um)	Isc (A)	Voc (V)	Pmax (W)	Pin (W)	FF	□ %
50	0.0306	0.5698	0.0134	0.1	0.76853	13.4
100	0.033	0.5888	0.015	0.1	0.771986	15
150	0.0342	0.5992	0.0159	0.1	0.775888	15.9
200	0.035	0.6061	0.0165	0.1	0.777807	16.5
250	0.0355	0.6111	0.0169	0.1	0.779015	16.9
300	0.0359	0.6148	0.0172	0.1	0.779292	17.2

كما يبين الشكل (23) الميزة (I-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لسماكة في المنطقة P.



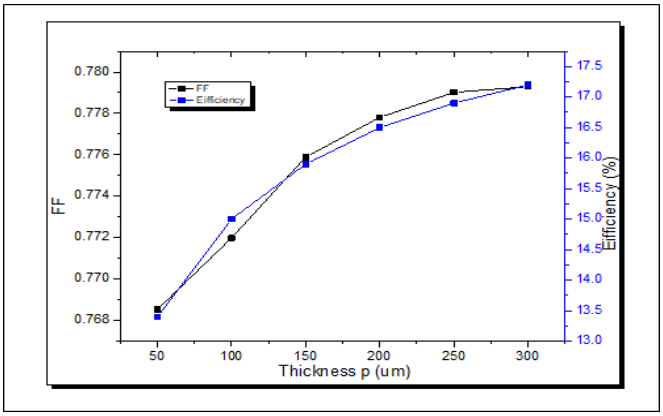
الشكل (24) الميزة (I-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لسماكة في المنطقة P.

كما يبين الشكل (25) الميزة (P-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة للسماكة في المنطقة P.



الشكل (25) الميزة (P-V) للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة للسماكة في المنطقة P.

كما يبين الشكل (26) تغيرات قيمة الكفاءة وعامل الملء للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لسماكة المنطقة P.



الشكل (26) تغيرات قيمة الكفاءة وعامل الملء للخلية الشمسية السيليكونية من أجل قيم مختلفة لسماكة المنطقة P.

نلاحظ من الشكل (26) ومن الجدول (9) زيادة الكفاءة وعامل الملء بزيادة سمك المنطقة P وذلك بزيادة قيم تيار الدارة المقصورة وقيم كمون الدارة المفتوحة نتيجة توليد حاملات شحنة ضوئياً حيث أن زيادة السمك يعزز امتصاص الضوء بشرط أن يكون سماكة المنطقة P أكبر

من طول الانتشار الضوئي في البلورة السيليكونية الذي يبلغ بين 100 –300 um في السيليكون وهذا ما يفسر زيادة الكفاءة [31].

5 – الاستنتاجات والتوصيات

1. تم نمذجة الدارة المكافئة للخلية الشمسية السيليكونية باستخدام برنامج PC1Dووضع البارامترات المبدئية للعمل.
2. تم دراسة تأثير درجة الحرارة على عمل الخلية الشمسية السيليكونية والتي تبين أن لها تأثير سلبي على الكفاءة.
3. تم دراسة تأثير شدة الإضاءة على أداء الخلية الشمسية ولوحظ التناسب الطردي بين الكفاءة وشدة الإشعاع الساقط.
4. تم دراسة تأثير زيادة سماكة المنطقة n والتي تبين أنها تؤدي دور سلبي في كفاءة اللوح الشمسي
5. تم دراسة زيادة سمك المنطقة p وتبين أن زيادة سمك هذه المنطقة يلعب دور إيجابي بزيادة الكفاءة
6. كما تم دراسة زيادة تركيز الإشابات في كل من المنطقتين n,p وتبين أنها تزيد من الكفاءة

نوصي بـ :

1. دراسة تأثير العوامل الفيزيائية الأخرى المؤثرة على أداء وكفاءة الخلية الشمسية السيليكونية مثل زمن استرخاء حوامل الشحنة والمقاومة التسلسلية والمقاومة التفرعية وعامل السطح وتأثير إضافة الطبقات المانعة للإنعكاس.
2. الاستفادة من الدراسة النظرية بتحسين كفاءة اللوح الشمسي السيليكوني وذلك عن طريق تطبيق التعديلات بشكل عملي أثناء عملية التصنيع.

6 – المراجع

1. International Energy Agency, Paris, France. Key World Energy Statistics, 2015.

2. Twidell, J., & Weir, T. (2015). *Renewable Energy Resources*. Routledge.
3. Nikolina, S. A. J. N. (2016). International renewable energy agency (IRENA)..
4. Luque, A., & Hegedus, S. (2011). *Handbook of Photovoltaic Science and Engineering*. Wiley.
5. Green, M. A. (2020). Silicon Solar Cells: Evolution and Current Performance. *IEEE Journal of Photovoltaics*.
6. Rastogi, A., Yadav, S., Hussain, S., Kataria, S., Hajihashemi, S., Kumari, P., ... & Brestic, M. (2021). Does silicon really matter for the photosynthetic machinery in plants…?. *Plant Physiology and Biochemistry*, *169*, 40-48.
7. Alonso-Abella, M., et al. (2014). Enhancing the Efficiency of Silicon Solar Cells by Using Advanced Photovoltaic Techniques. *Renewable Energy*.
8. Szlufcik, J., Sivoththaman, S., Nlis, J. F., Mertens, R. P., & Van Overstraeten, R. (1997). Low-cost industrial technologies of crystalline silicon solar cells. *Proceedings of the IEEE*, *85*(5), 711-730.
9. Kowsar, A., Billah, M., Dey, S., Debnath, S. C., Yeakin, S., & Farhad, S. F. U. (2019, December). Comparative study on solar cell simulators. In *2019 2nd International Conference on Innovation in Engineering and Technology (ICIET)* (pp. 1-6). IEEE.
10. Zouak, B. (2012). *Etude de l'évolution des caractéristiques des matériaux thermoélectrique des anciennes et nouvelles générations et applications photovoltaique-thermoélectricité* (Doctoral dissertation, Université Mouloud Mammeri).
11. Bagher, A. M., Vahid, M. M. A., & Mohsen, M. (2015). Types of solar cells and application. *American Journal of optics and Photonics*, *3*(5), 94-113.
12. Panchal, R., & Jolly, L. (2013). Optimization of Silicon solar cell in MATLAB/SIMULINK for improved efficiency. *International Journal of Management & Information Technology5*, *3*, 576-85.
13. T. Markvart, L. Castaner, 2003 Practical Handbook of Photovoltaics: Fundamentals and Applications, Elsevier.
14. M. Marcu, F. Popescu, I. R. Slusariuc, 2013 Simulation of a solar cell with simple diode model, Analele Universității din Petroșani.

15. M. A. Hamdy, R. L. Cell, 1987 The effect of the diode-ideality factor on the experimental determination of series resistance of solar cells Sol cells.
16. Ankaiah, B., & Nageswararao, J. (2013). Enhancement of solar photovoltaic cell by using short-circuit current MPPT method. *International Journal of Engineering Science Invention*, *2*(2), 45-50.
17. Emery, K. A., & Osterwald, C. R. (1986). Solar cell efficiency measurements. *Solar Cells*, *17*(2-3), 253-274.
18. Blakers, A., Zin, N., McIntosh, K. R., & Fong, K. (2013). High efficiency silicon solar cells. *Energy Procedia*, *33*, 1-10.
19. . Haug, J. Greulich, A. Kimmerle, E. S. Marstein. PC1Dmod 6.1 - state-ofthe-art models in a well-known interface for improved simulation of Si solar cells. Solar Energy Materials and Solar Cells, 142: 47–53, 2015.
20. ALIa, K., Tariq, Z., Khan, H., Javed, Y., Sultan, M., Anmol, M., ... & Alia, A. (2019). Analysis of Non-Uniform Doping in Silicon Solar Cell and Optimization Using PC1D. *J. Ovonic Res*, *15*, 215-220.
21. Belarbi, M., Benyoucef, A., & Benyoucef, B. (2014). Simulation of the solar cells with PC1D, application to cells based on silicon. *Advanced Energy: An International Journal (AEIJ)*, *1*(3).
22. Salmi, T., Bouzguenda, M., Gastli, A., & Masmoudi, A. (2012). Matlab/simulink based modeling of photovoltaic cell. *International journal of renewable energy research*, *2*(2), 213-218.
23. Kachhiya, K., Lokhande, M., & Patel, M. (2011, May). MATLAB/Simulink model of solar PV module and MPPT algorithm. In *National Conference on Recent Trends in Engineering & Technology* (Vol. 13).
24. Muhfidin, R., & Yu, S. (2021, October). Temperature Effects on the Performance of Silicon Solar Cells using PC1D.

In *Proceedings of the 2nd International Conference on Industrial and Technology and Information Design, ICITID 2021, 30 August 2021, Yogyakarta, Indonesia*.

25. M. Wolf, "The Influence of Heavy Doping Effects on Silicon Solar Cell Performance", Solar .
26. Cuevas, A.; Sinton, R.A. Characterisation and diagnosis of silicon wafers and devices. In Practical Handbook of Photovoltaics; Elsevier Science: Amsterdam, The Netherlands, 2005; pp. 163–188.
27. Brendel R (2011) Thin-film crystalline silicon solar cells. Wiley, Weinheim.
28. B. Liu, S. Zhong, J. Liu, Y. Xia and C. Li ،Silicon nitride film by inline PECVD for black silicon solar cells," International Journal of Photoenergy, vol. 2012, pp. 2–7, 2012.
29. Shwan, Y. H., & Ghafoor, B. N. (2024). Study the Effect of Doping and Thickness on IV characteristic of Silicon Solar Cells Using PC1D Simulation. *Tikrit Journal of Pure Science*, *29*(1), 128-135.
30. C.-T. Sah, K.A. Yamakawa, R. Lutwack ،Effects of Thickness on Silicon Solar Cell Efficiency", IEEE Transactions on Electron Devices, vol. 29, no. 5, 1982.
31. Solanki, C.: Solar Photovoltaics: Fundamentals, Technologies and Applications, 3rd edn. PHI Learning Private Limited, Delhi (2015).

تحديد الترددات البلازمونية وتعيين زمن الاسترخاء والكتلة الفعالة للإلكترون الحر في أفلام النحاس الرقيقة

أ. د. رياض العبد الله* عبد المعين محمد العلص**

الملخص:

تم ترسيب أفلام رقيقة من النحاس النقي بتقنية الحزمة الالكترونية على ركائز زجاجية شفافة مسخنة مسبقاً في الخلاء حتى الدرجة $200C^{\circ}$ ومن ثم لدنت في نفس الخلاء لمدة نصف ساعة حتى الدرجة $300C^{\circ}$، تم أيضا ترسيب أفلام رقيقة على ركائز من السيليكون لدراسة طبوغرافية السطح للفلم المرسب باستخدام مجهر القوى الذرية. استخدمت قياسات النفاذية الضوئية والانعكاسية في تعيين الثوابت الضوئية، تم تعيين تردد البلازمون السطحي لأفلام النحاس وكان حوالي $2.58ev$، استخدمت نظرية درود في تعيين زمن الاسترخاء والكتلة الفعالة للإلكترون الحر من قياسات ε_1 و ε_2 في المجال تحت الأحمر وجميعها كانت قريبة من القيم المرجعية.

كلمات مفتاحية: فلم رقيق، حزمة الكترونية، تردد البلازمون السطحي، زمن الاسترخاء، الكتلة الفعالة

* أستاذ في قسم الفيزياء–كلية العلوم–جامعة حمص–اختصاص: ضوء فيزيائي

** طالب دكتوراه–كلية العلوم–جامعة حمص– اختصاص: فيزياء المادة الكثيفة

Determination of Plasmon Oscillations, Relaxation Time, and Effective Mass of Free Electron in Copper Thin Films

* Pof.Dr. Reiad Al Abdallah ** Abdalmoaen Mohammad Alales

Abstract:

Thin films of pure copper were deposited using the electron beam evaporation technique onto pre-heated transparent glass substrates in a vacuum at a temperature of $200C^{\circ}$ The films were then annealed in the same vacuum for half an hour at a temperature of $300C^{\circ}$. Thin films were also deposited on silicon substrates to investigate the surface topography of the deposited film using atomic force microscopy (AFM). Optical transmittance and reflectance measurements were employed to determine the optical constants of the films. The surface plasmon frequency of the copper films was determined and found to be approximately $2.58ev$. The Drude theory was utilized to calculate the relaxation time and effective mass of the free electrons from measurements $\varepsilon_2 \text{and } \varepsilon_1$ in the infrared (IR) region. The obtained values were all in close agreement with the reference values.

Key words: Thin Film, Electron beam, Surface Plasmon Frequency, Relaxation Time, Effective Mass.

*Professor in the Physics Department- Faculty of Science- Homs University- Specialization: Physical Optics

1.مقدمة:

غالبا ما يعتقد أن المعادن أحادية التكافؤ (Cu, Ag, Au) بسيطة من حيث أن عدداً من خصائصها الفيزيائية المهمة يتم تفسيرها بما يُعرف بنموذج الإلكترون الحر وأنه من السهل أيضاً التعامل مع هذه المعادن في التطبيقات العلمية لهذا السبب تم اجراء العديد من الدراسات حول خصائصها الضوئية والكهربائية، تعتبر خصائصها الضوئية أكثر أهمية في المجالين المرئي وتحت الأحمر لأنها تنسب بالكامل تقريباً لإسهام الإلكترونات الحرة [1]من المعروف جيداً أن الخصائص الضوئية وخاصة امتصاص المعادن للضوء بطبقات نانوية قد تختلف اختلافاً جذرياً عن المعادن في حالتها الحجمية (Bulk)، فجوهر امتصاص الضوء بواسطة الجسيمات النانوية المعدنية هو إثارة اهتزازت جماعية لإلكترونات منطقة الناقلية، تعرف هذه الاهتزازت وهي اهتزازات طولية بنوعها بالبلازمونات السطحية Surface Plasmon (SP) والتي يمكن ملاحظتها بسهولة في حالة الجسيمات النانوية والموزعة على مساحة محددة واسعة [2]. يعتبر النحاس مادة واعدة لتصنيع الوصلات البينية في الدارات الالكترونية التكاملية على أساس الأفلام الرقيقة المستوية أي أن أهم الأسباب التي دفعت التوجه نحو النحاس هي الخصائص الفيزيائية الممتازة التي يتمتع بها [3] كالمقاومة المنخفضة وسهولة الترسيب والناقلية الكهربائية والحرارية والانعكاسية الضوئية العالية خاصة في المجالين المرئي وتحت الأحمر [4]، مما اكسب افلامها الكثير من الاهتمام فعلى سبيل المثال تُستخدم في مجال الخلايا الكهروضوئية والالكترونيات الدقيقة لارتفاع ناقليها وحساسيتها العالية للضوء [5]. يمكن تضمين جسيمات النحاس النانوية في الطبقة الفعالة للخلايا الشمسية العضوية Organic Solar Cells (OSCs) مما ينتج عنه انخفاض في تكلفتها وبالتالي مزيد من تطبيقاتها [6]. كما أن لأفلام النحاس الرقيقة تطبيقات بلازمونية أخرى فقد جذبت مستشعرات

**Ph.D. Student- Faculty of Science- Homs University- Specialization: Condensed Matter Physics

البلازمونات السطحية الضوئية القائمة على الجسيمات النانوية النحاسية اهتماما كبيراً لدى الباحثين بسبب استجابتها الأسرع ودقتها الأفضل كما أنها مفيد في الكشف البيولوجي [7].

2. موجز نظري:

2.1. البلازمونات السطحية والحجمية:

يملك تابع العزل الكهربائي العقدي للغاز الالكتروني $\varepsilon(\omega,k)$ نتائج هامة جداً للخصائص الفيزيائية للجسم الصلب ويصف في أحد أشكاله $\varepsilon(\omega,0)$ الإثارات الجماعية للغاز الالكتروني أي البلازمونات السطحية والبلازمونات الحجمية، عُرِفَتْ اهتزازات البلازما بأمواج لانغمور والتي اكتشفها الأمريكيان (Irving Langmuir) و (Lewi Tonks) كان ذلك في العام 1920 [9] ,[8] تعرف هذه الاهتزازات بأنها اهتزازات سريعة لكثافة الالكترونات في وسط ناقل كالمعادن وهي أبسط أنواع الاهتزازات الطولية، تظهر هذه الاهتزازات الطولية عندما تُستَقطب المادة أي عندما تنزاح طبقة مستوية من الالكترونات ككل عن وضع توازنها مسافة x. فإذا كان عزم ثنائي القطب الكهربائي لإلكترون واحد هو $(-ex)$ فإن عزم ثنائي القطب في واحدة الحجم لـ N إلكترون هو الاستقطاب P حيث $\mathrm{P}=-Nex$ و (e−) تمثل شحنة الإلكترون، عندئذ حقل الاستقطاب يعطى بالعلاقة: $\mathrm{E}=4\pi\mathrm{P}=-4\pi Nex$ [10].

والذي يؤدي إلى وجود القوة المرجعة التي تعطى بالعلاقة: $F=e\mathrm{E}$

والتي بفعلها تهتز الالكترونات جماعيا باهتزازات طولية، عندئذ يكون:

$$F=eE=-4\pi e^2Nx=m\frac{\partial 2x}{\partial t^2} \qquad (1)$$

إن E تتغير دوريا عندئذ x تعتمد على الزمن دوريا من الشكل $e^{-i\omega t}$ أي أن:

$$x=x_0e^{-i\omega t}$$

بالاشتقاق والتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$\frac{dx}{dt}=-i\omega x_0e^{-i\omega t}=-i\omega x$$

$$\frac{d2x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 e^{-i\omega t} = -\omega^2 x$$

$$\Longrightarrow m\frac{d2x}{dt^2} = -m\omega^2 x$$

ومن المعادلة (1) نجد:

$$-4\pi Ne^2x = -m\omega^2x$$

أي أن:

$$\omega^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}$$

الذي يدعى التردد البلازموني

وفقاً لنظرية الغاز الالكتروني والتي تعطي تابع العزل الكهربائي بالعلاقة [10]:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad (2)$$

عندما ندخل في الاعتبار تأثير خلفية لب الايون الموجب مميزة ب ε_{cor} فإن المعادلة (2) تصبح من الشكل:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\text{cor}} - \frac{\widehat{\omega}_p^2}{\omega^2} \qquad (3)$$

حيث أن: $$\widehat{\omega}_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m\varepsilon_{\text{cor}}} \qquad (4)$$

عندما يحدث التجاوب البلازموني أي عندما $\omega^2 = \omega_p^2$ للاهتزازات الطولية البلازمونية فإن شرط وجود البلازمونات في الغاز الالكتروني من المعادلة (2):

$$\varepsilon(\omega_p) = 0$$

أي أن الاهتزازات الطولية للإلكترونات الحرة (البلازمونات) تظهر عند أصفار ε.

تفيد الدراسات المرجعية أنه عند الحد الفاصل بين وسطين أحدهما فلم معدني سماكته مثلا ($\cong 50nm$) والوسط الثاني خلاء يمكن أن تنتشر موجات بلازمونية سطحية، كم هذه الاهتزازات يدعى بالبلازمون السطحي Surface Plasmon(SP) ترددهω$_{\text{sp}}$، أما في حالة البلازمون الحجمي فتنتشر الاهتزازات البلازمونية بتردد ω_p والذي يعرف بكم اهتزاز البلازما كما هو موضح بالشكل (1) [11] .

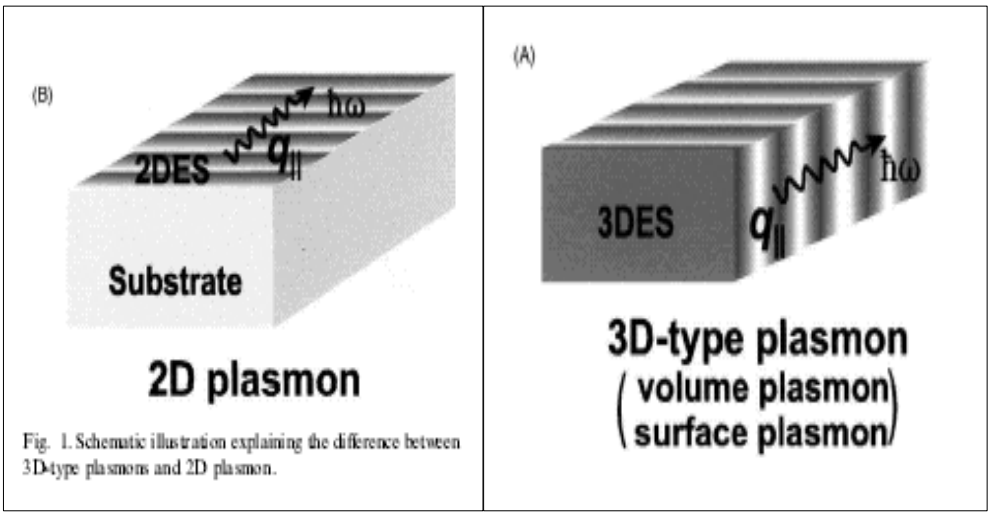


Fig. 1. Schematic illustration explaining the difference between 3D-type plasmons and 2D plasmon.

الشكل (1): يوضح انتشار البلازمونات الحجمية والسطحية على الحد الفاصل بين معدن–عازل [11] .

من المعروف لدينا أنه يمكن إثارة البلازمونات بعدة طرق نذكر منها: إمرارا الالكترون بطاقة معينة خلال فيلم معدني رقيق أو يمكن ملاحظته بانعكاس الإلكترون أو الفوتون عن الفلم [10]، تعتبر أنماط الإثارة السطحية نسخة مطابقة للإثارة في الحالة الحجمية للجسم الصلب Bulk Solid [11]. في بحثنا الحالي قمنا بتأكيد وجود البلازمون السطحي (بعد أثارته) في أفلامنا المحضرة بالطرق الضوئية المتوفرة لدينا من خلال أطياف الانعكاسية والنفاذية في حالة الورود الناظمي.

2.2. تابع العزل الكهربائي العقدي والتردد البلازموني وفقا لنظرية درود:

بما أن فكرة البلازمون كغيره من أشباه الجسيمات فكرة كلاسيكية فقد حظيت النظريات الكلاسيكية والكلاسيكية المطورة انتشارا أكبر في تفسير سلوك الاهتزازات البلازمونية ومازالت هذه النظرية هي الوحيدة تقريبا حتى وقتنا الحالي. من أهم هذه النماذج النظرية والتي تعطي تفسيرا لسلوك البلازمونات هي نموذج الإلكترون الحر ونموذج درود Drude المُحَسنْ والذي يأخذ بعين الاعتبار

مساهمة الانتقالات الإلكترونية المرتبطة في تابع العزل الكهربائي العقدي وما يتعلق به من مقادير فيزيائية ضوئية كالانعكاسية والنفاذية.

في حالة الأفلام الرقيقة يتضمن نموذج درود النظري [10]، [12]، [13] حلولاً لمعادلات شبه كلاسيكية مطورة ينتج عنها تابع العزل الكهربائي العقدي والذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_{cor} + \frac{4\pi i}{\omega}\frac{Ne^2\tau}{m^*(1-i\omega\tau)} = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 = (n+ik)^2 \qquad (5)$$

حيث تمثل n و k الجزئين الحقيقي والتخيلي لقرينة الانكسار العقدية، $\tilde{n} = n + ik$.

أما ε_{cor}: تمثل مساهمة الالكترونات المرتبطة أو إلكترونات اللب (أي الانتقالات الالكترونية ما بين السويات الطاقية)، في حين أن (τ) زمن الاسترخاء في تابع العزل الكهربائي العقدي $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ يشير إلى وجود التخامد.

بعد فصل الجزئين الحقيقي والتخيلي لتابع العزل الكهربائي العقدي نجد:

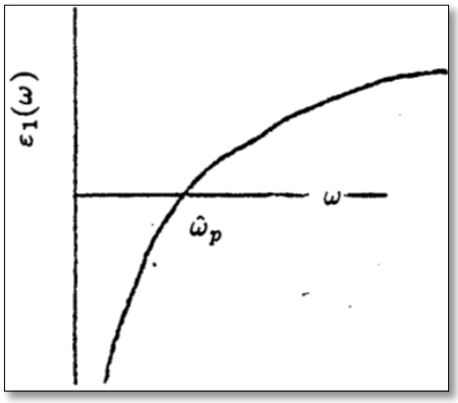
$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_{cor} + \frac{4\pi i}{\omega}\frac{Ne^2\tau}{m^*(1-i\omega\tau)}\cdot\left(\frac{1+i\omega\tau}{1+i\omega\tau}\right)$$

$$\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_{core} - \frac{4\pi Ne^2\tau^2}{m^*(1+\omega^2\tau^2)} = \varepsilon_{core} - \frac{4\pi Ne^2}{m^*\left(\omega^2+\frac{1}{\tau^2}\right)} \qquad (6)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{4\pi}{\omega}\frac{Ne^2\tau}{m^*(1+\omega^2\tau^2)} \qquad (7)$$

تمثل m^* : الكتلة الفعالة للإلكترون الحر.

يتعين التردد البلازموني ω_p عند أصفار الجزء الحقيقي لتابع العزل الكهربائي العقدي أي $\varepsilon_1(\omega_p) = 0$ كما هو موضح من الشكل (2) [12].



الشكل (2): تعيين التردد البلازموني ω_p من أصفار الجزء الحقيقي لتابع العزل الكهربائي العقدي ε_1

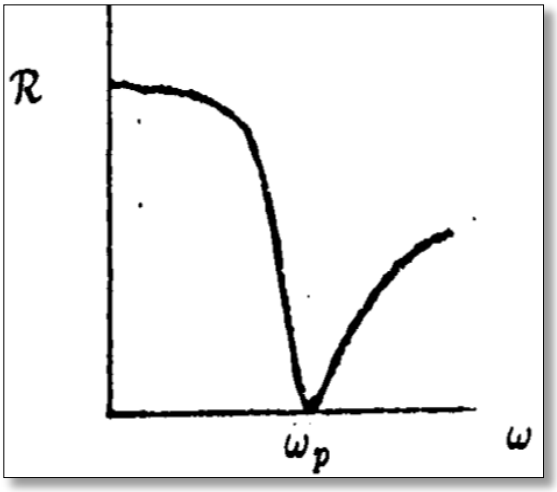
من المعادلة (6) عندما $\omega = \hat{\omega}_p$ و $\varepsilon_1(\omega_p) = 0$ يصبح لدينا:

$$\hat{\omega}_p^2 + \frac{1}{\tau^2} = \frac{4\pi N e^2}{m^* \varepsilon_{core}} \qquad (8)$$

وبما أن الحد $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\tau^2}}$ عادة ما يكون صغيراً بالمقارنة مع $\hat{\omega}_p^2$ يصبح عندها التردد البلازموني من الشكل:

$$\hat{\omega}_p^2 \approx \frac{4\pi N e^2}{m^* \varepsilon_{core}} \qquad (9)$$

وهو مطابق لقيمة $\hat{\omega}_p^2$ من العلاقة (4) بحسب نظرية الغاز الإلكتروني بعد إدخال ε_{core}. من الجدير ذكره أن الانعكاسية المقاسة تظهر بانخفاض حاد عند التردد البلازموني كما هو موضح بالشكل (3) [12] .



الشكل(3) : يوضح الانعكاسية R بدلالة التردد والتي يظهر فيها التردد البلازموني ω_p عند النهاية الصغرى لR.

الانخفاض الشديد عند التردد البلازموني محكوم بزمن الاسترخاء، وإن زمن استرخاء أطول مع بنية بلازمونية أكثر حدة. هذا ما نلمحه في المعادن النبيلة والعديد من أنصاف النواقل أما بالنسبة لدراستنا الحالية لأفلام النحاس الرقيقة سيبدو انخفاض الانعكاسية واضحاً بشكل جلي في جميع الاطياف وانزياح نحو الأطوال الموجية الأقل مع زيادة السماكة.

3. أهداف البحث:

من المعروف أن النحاس يأتي بالمرتبة الثانية بعد الفضة من حيث الوفرة في عدد الالكترونات الحرة مما جعله يتمتع بالعديد من الخواص التي شجعت على دراسته ودراسة خواص أفلامه الرقيقة لما لها العديد من التطبيقات وخاصة البلازمونية منها لذلك يهدف البحث إلى:

1. تحضير أفلام رقيقة من النحاس النقي بسماكات مختلفة وباستخدام تقنية الحزمة الالكترونية $(Electron - Beam)$.

2. دراسة طبوغرافية السطح لمعرفة التشكيل انطلاقا من صور مجهر القوى الذرية AFM.

3. تعيين التردد البلازموني السطحي من أصفار الجزء الحقيقي لتابع العزل الكهربائي العقدي والتردد البلازموني الحجمي.

4. تعيين زمن الاسترخاء والكتلة الفعالة للإلكترون الحرمن قياسات (ε_1, ε_2) في المجال تحت الأحمر.

4. مواد وطرق البحث:

1. منظومة ترسيب الأفلام الرقيقة بتقنية الحزمة الالكترونية (Electron–Beam).

2. مقياس طيف Spectrophotometer نوع Jasco (V-570) Double Beam للحصول على أطياف النفاذية والانعكاسية .

3. مجهر قوى ذرية AFM.

4. جهاز تنظيف الركائز بالأمواج فوق صوتية نوع Transonic T700/H.

5. شرائح من الزجاج نوع Microscopic Slide وشرائح من السيليكون Si، ومواد كيميائية (حمض كلور الماء الممدد –كحول إيتيلي – ماء مقطر) لتنظيف الركائز وحجرة الترسيب.

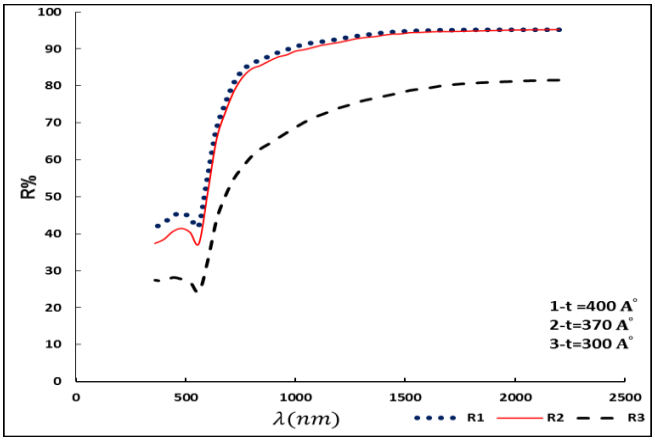
4.1. الجزء العملي:

تم استخدام الركائز الزجاجية الشفافة من أجل القياسات الضوئية وشرائح السيليكون لدراسة طبوغرافية السطح، بعد الانتهاء من تنظيف الركائز وحجرة الترسيب بشكل جيد بالمواد الكيميائية المخصصة لهذا الغرض وضعت كمية من حبيبات النحاس ذات نقاوة (99.99%) في بوتقة من الموليبدنوم، تمت تخلية الحجرة للوصول للخلاء المناسب لعملية الترسيب (5×10^{-6}mbar) ومن ثم تسخين الحبيبات لوصول لدرجة الانصهار ليتشكل الفلم على الركائز المسخنة مسبقاً في الخلاء، جميع عيناتنا تم تحضيرها بنفس الشروط التجريبية من تسخين قبل وأثناء الترسيب في الدرجة $(200)C^{\circ}$ بمعدل ترسيب $(2nm/sec)$ أما الخلاء $(5 \times 10^{-6}mbar)$، تم تلدين العينات بعد الترسيب في نفس الخلاء السابق لمدة نصف

ساعة في الدرجة$(300C^{\circ})$. من خلال لوحة تحكم جهاز الترسيب وضمن الشروط السابقة كانت سماكة عيناتنا على التوالي $(t_1 = 400, t_2 = 370, t_3 = 300)A^{\circ}$

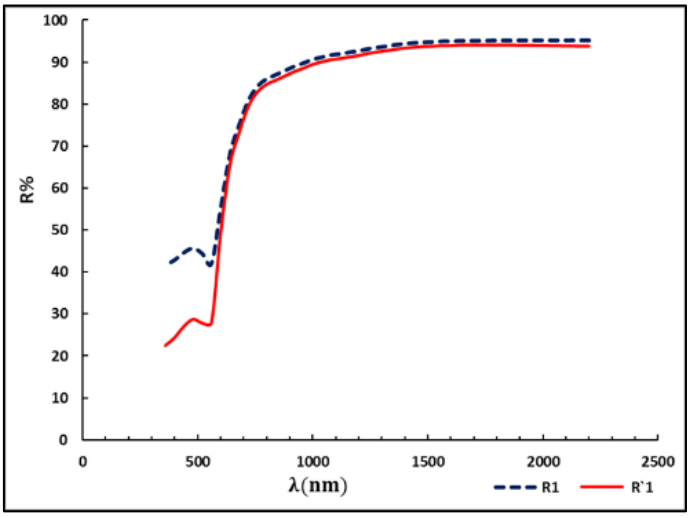
4.2. قياس الانعكاسية R والنفاذية الضوئية Tللعينات المحضرة:

لتعيين التردد البلازموني الحجمي والسطحي بالإضافة لزمن الاسترخاء والكتلة الفعالة للإلكترون الحر لابد من إيجاد الجزئين الحقيقي والتخيلي لتابع العزل الكهربائي العقدي لأفلامنا انطلاقا من مقادير ضوئية قابلة للقياس وسهلة التعيين مخبريا هي R و `R و T واستخدام علاقات نظرية وأخرى (نظرية–تجريبية)، استخدمنا مقياس الطيف لإيجاد أطياف الانعكاسية R و ´R ضمن المجال الطيفي $(360 - 2200)nm$ لعيناتنا الثلاث حيث أن R هي الانعكاسية من جهة (الفلم–الركيزة) أما ´R فهي الانعكاسية من جهة (الركيزة – الفلم).



الشكل (4): أطياف الانعكاسية لعيناتنا الثلاث مختلفة السماكة كتابع لطول الموجة $(t_1 = 400, t_2 = 370, t_3 = 300)A^{\circ}$.

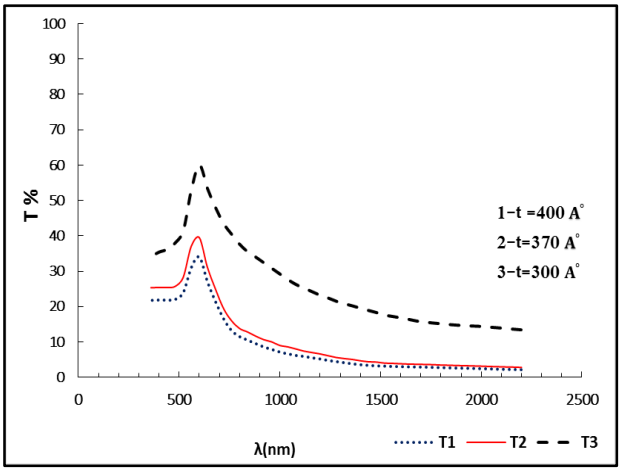
إن أطياف الانعكاسية لعيناتنا الشكل (4) تكاد تتطابق بالسلوك مع الأطياف المماثلة لأفلام النحاس المقاربة بسماكتها لعيناتنا كما في المرجع [14] بالرغم من اختلاف طرق التحضير والقياس، من الجدير ذكره أن الانعكاسية R` تقارب في سلوكها الانعكاسية R كما في الشكل(5) لأحدى عيناتنا خاصة في المجال تحت الأحمر حيث يسيطر هنا تأثير الإلكترونات الحرة وسنستخدم نتائجها في حساباتنا اللاحقة من أجل تعيين ε_2 والذي يمثل الجزء التخيلي لتابع العزل الكهربائي العقدي.



الشكل (5): يوضح طيفي الانعكاسية عن الوجه الاماميR والوجه الخلفي R` للعينة الأولى ذات السماكة $(t = 400A^{\circ})$ حيث يشير الخط المنقط لانعكاسية الوجه الأمامي أما الخط المستمر فيمثل انعكاسية الوجه الخلفي.

عند سقوط الضوء على جهة (فلم–ركيزة) R يكون الانعكاس مباشرة عن سطح الفلم أما سقوطه من جهة (ركيزة–فلم) R` سوف يعاني الضوء المنعكس عن الفلم من ضياعات بسبب الزجاج بالتالي سوف تكون الانعكاسية R أكبر بقليل من الانعكاسية R`. أما النفاذية الضوئية فقد تم

قياسها في نفس المجال الطيفي $(360 - 2200)nm$ وهي كما يعرضها الشكل (6)، وكانت مشابهة في سلوكها لما عرضه البحث [14] المرجعي.



الشكل:(6) أطياف النفاذية لعيناتنا الثلاث مختلفة السماكة كتابع لطول الموجة $(t_1 = 400, t_2 = 370, t_3 = 300)A^{\circ}$

تشير قمم أطياف النفاذية بوضوح إلى مواقع ظهور البلازمونات السطحية الظاهرة بانخفاض أطياف الانعكاسية.

5.3. العلاقات المستخدمة في إيجاد الثوابت الضوئية: $\varepsilon_2, \varepsilon_1, k, n$.

يرتبط معامل التخامد بمعامل الامتصاص بالعلاقة التالية [15]:

$$k(\omega) = \frac{c\,\alpha(\omega)}{2\omega} = \frac{\alpha\lambda}{4\pi} \qquad (10)$$

حيث أن $c = \lambda\upsilon$ هي سرعة الضوء في الخلاء و $\omega = 2\pi\upsilon$ و υ تردد موجة الضوء.

لإيجاد طيف الامتصاص نستخدم العلاقة التالية [16]:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{t} Ln(\frac{1}{T}) \qquad (11)$$

حيث أن t سماكة الفلم الرقيق.

لقد سعينا في بحثنا هذا استخدام علاقة (نظرية–تجريبية) لتعيين التابع $\varepsilon_2(\omega)$ للنحاس نعتمد في إيجادها على قيم ضوئية سهلة التعيين مخبريا وهي R و R´ و T والتي تعطى بالعلاقة التالية:

$$\varepsilon_2 = \frac{\lambda n_c}{2\pi t} \cdot \frac{1-R-T}{T} = \frac{\lambda n_0}{2\pi t} \cdot \frac{1-R`-T}{T} \qquad (12)$$

هذه العلاقة (نظرية_تجريبية) في جوهرها وهي علاقة زومر– فولتير [17] وتسمى العلاقة التقريبية وهي تكون قريبة جدا من القيم الحقيقية لε_2 ودقتها من دقة الشرطين:

الشرط الأول: $t \ll \lambda$ ، الشرط الثاني: $n_c \frac{1-R-T}{T} \approx n_0 \frac{1-R´-T}{T}$

حيث n_0: تمثل قرينة انكسار الهواء أما n_c: فهي قرينة انكسار الركيزة (زجاج نقي)

λ: طول موجة الضوء المستخدم، إن سماكة عيناتنا $t = (300,370,400)A^{\circ}$ فهي محققة سلفاً للشرط الأول$(t \ll \lambda)$ ولقد قمنا بالتحقق من الشرط الثاني على طول المجال الطيفي في عملية القياس، حيث كانتا متطابقان إلى حد كبير على كامل المجال الطيفي.

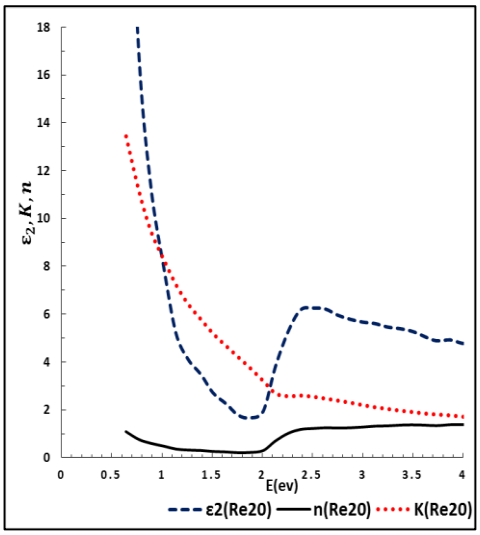
بعد أن حسبنا k و ε_2 يمكننا أن نستنتج قرينة الانكسار n من العلاقة التالية [18] ، [19]:

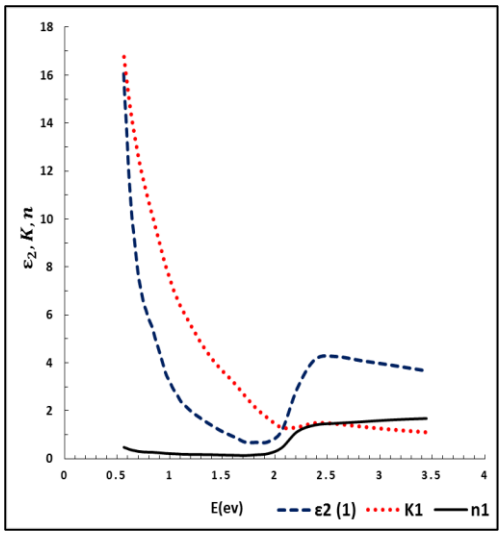
$$\varepsilon_2 = 2nk \qquad (13)$$

وعليه فإن n تعطى بالعلاقة التالية:

$$n = \frac{\varepsilon_2}{2k} \qquad (14)$$

ندرج في الشكل (7) قيم كلا من (n, ε_2, k) لأحدى عيناتنا ذات السماكة $(t_1 = 400,)A^{\circ}$ والمحسوبة من العلاقات (10)، (12)، (14) على التوالي وللمقارنة أدرجنا الشكل (8) لنفس المقادير من المرجع [20].





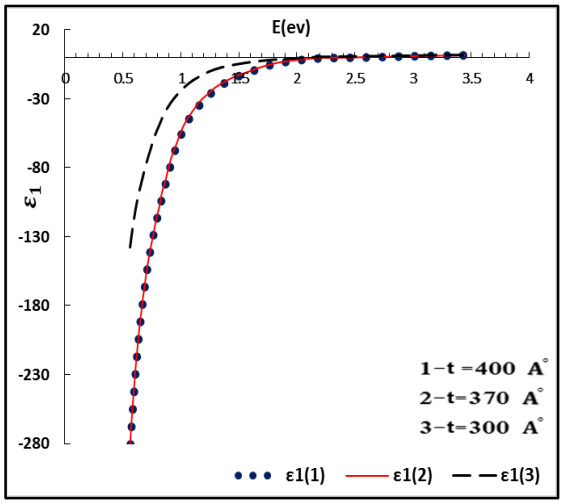
الشكل (7): قيم (n, ε_2, k) لعيناتنا ذات السماكة $(t_1 = 400)A^\circ$.

الشكل (8): قيم (n, ε_2, k) للمرجع [20] من أجل المقارنة

الجزء الحقيقي لتابع العزل الكهربائي العقدي $\varepsilon_1(\omega)$ يعطى بالعلاقة التالية [18] ، [19]: :

$$\varepsilon_1(\omega) = n^2(\omega) - k^2(\omega) \qquad (15)$$

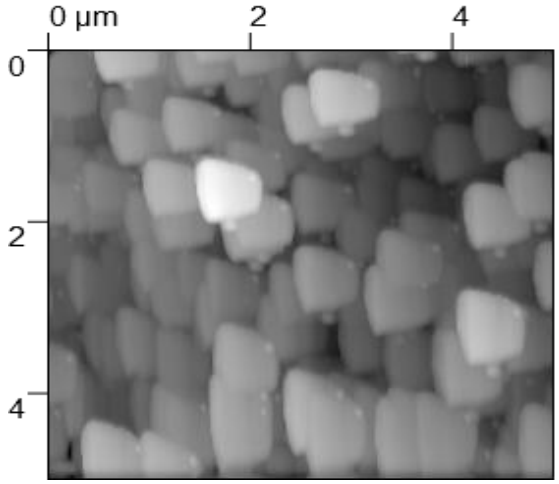
من قيم n و k لعيناتنا حسبنا قيم ε_1 للعينات الثلاث والتي أدرجناها في الشكل (9).



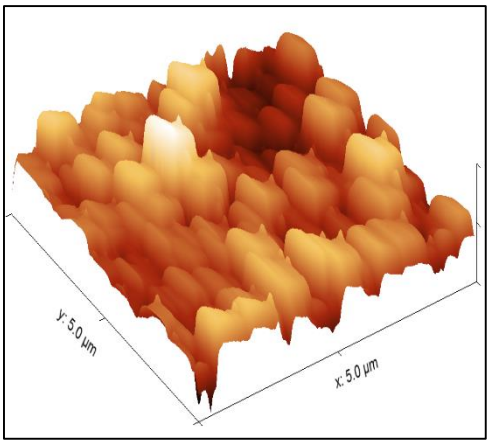
الشكل (9): قيم ε_1 لعيناتنا ذات السماكة $(t_1 = 400, t_2 = 370, t_3 = 300)A^\circ$ والمحسوبة من العلاقة (15)

6. مناقشة النتائج:

6.1. دراسة طبوغرافيا السطح لمعرفة تشكيل الفلم:



الشكل (10): صورة 3D للعينة الأولى ذات السماكة $(t = 400A^{\circ})$



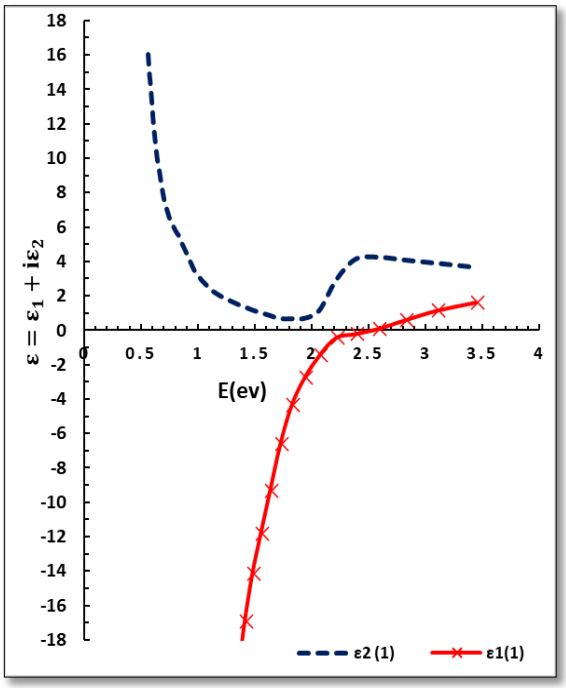
الشكل (11): صورة 2D للعينة الأولى ذات السماكة $(t = 400A^{\circ})$

للتعرف على شكل السطح لعيناتنا أجرينا صور AFM لإحدى عيناتنا ذات السماكة $(t = 400A^{\circ})$ شكل (10) وشكل (11). نستدل من الشكلين على أن النحاس توضع على شكل مكعبات أو على شكل متوازي مستطيلات متلاصقة مع بعضها البعض لتؤلف طبقة مستمرة من الحبيبات المتراصة دون وجود جزر متباعدة عن بعضها البعض، أي على شكل تجمعات بلورية متصلة لتشكل فلم نحاسي من طبقة رقيقة مستمرة

6.2. التردد البلازموني The Plasma frequency:

كما ذكرنا أنه تظهر اهتزازات طولية (الاهتزازات البلازمونية) عند تلاشي $\varepsilon_1(\omega)$ وذلك عندما $\omega = \omega_p$ التردد البلازموني، أما البلازمونات فهي كم الاهتزازات البلازمونية ويمكن أن تثار في المادة بواسطة الموجة الضوئية العرضانية ويتحقق ذلك بسهولة في المعادن النبيلة كالنحاس حيث أن كثافة الإلكترونات الحرة عالية كما يمكن أن تثار البلازمونات الحجمية بتردد بلازموني قدره $\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m^*\varepsilon_{core}}$ أو بلازمونات سطحية ω_{sp} وفي كلا الحالتين تقترب $\varepsilon_1(\omega)$

من الصفر [12] . من العلاقة (6) وعند $\varepsilon_1(\omega) \approx 0$ تكون عندها كما في العلاقة (9) $\widehat{\omega}_p^2 \approx \frac{4\pi N e^2}{m^* \varepsilon_{core}} \approx \omega_p^2$ و تصبح $\varepsilon_1(\omega)$ موجبة إذا كان ε_{core} أكبر من الحد الثاني في $\varepsilon_1(\omega)$ المتعلق بتركيز الإلكترونات الحرة، ففي جوار التردد البلازموني حيث $\varepsilon_1(\omega)$ حكماً صغيرة فإن $\varepsilon_2(\omega)$ هي أيضا صغيرة حيث يصبح حد امتصاص الإلكترونات الحرة عند $\omega =$ ω_p مقارباً ل $\varepsilon_{cor}(\omega_p)$ و $\varepsilon_{cor}(\omega)$ صغيرة نسبياً مما يجعل $\varepsilon_2(\omega_p)$ هي أيضا صغيرة وهذا ما نلاحظه في الشكل (12) .



الشكل(12) : قيم $\varepsilon_1(\omega)$ و $\varepsilon_2(\omega)$ لعينتنا ذات السماكة $(t = 400A^{\circ})$.

نشير هنا إلى أن الشكل (12) يبين سلوك ε_1 الناتج من تكبير الشكل (9) لمشاهدة نقطة تقاطع الخط البياني مع محور الطاقة. يلاحظ من الشكل (12) تقاطع $\varepsilon_1(\omega)$ مع محور الطاقة الموافق لظهور بلازمون سطحي يكافئ طاقة $\hbar\omega_{sp} \approx 2.258(ev)$ بقرب هذه النقطة المميزة كانت النهاية الصغرى للانعكاسية والتي يقابلها النهاية العظمى للنفاذية مع وجود ازاحة

طفيفة بينهما ناشئة عن فرق المسير الضوئي بين الشعاع المنعكس والشعاع النافذ والذي تسببه سماكة الفلم، كما نلاحظ أيضا بقرب هذه النقطة تبدو ε_2 بقيم صغيرة. ولقد رأينا في بحث سابق [21] أنه من أجل العينة ذات سماكة $(t = 300A^{\circ})$ كانت قيمة التردد البلازموني السطحي $\hbar\omega_{sp} \approx 2.21(ev)$ هناك أزاحة طفيفة باتجاه الطاقات الأعلى مع زيادة السماكة) أي أنه بازدياد السماكة يميل الفلم الرقيق إلى الاقتراب من الBulk حيث قيمة التردد البلازموني الحجمي للنحاس $\hbar\omega_p \approx 9.3\ (ev)$ [22] ، هذه القيمة خارج نطاق قياساتنا الطيفية التي كانت ضمن المجال ev (0.5 – 3.5) مما يؤكد ويدل بالضرورة على أن البلازمون الظاهر في عيناتنا والناتج عن تقاطع $\varepsilon_1(\omega)$ مع محور الطاقة هو بلازمون سطحي وليس بلازمون حجمي.

6.2. تعيين الكتلة الفعالة m^* و زمن الاسترخاءτ:

كما رأينا أن $\tilde{\varepsilon}$ تتعين بزمن الاسترخاء τ والكتلة الفعالة m^* للإلكترونات الحرة، وفقاً لنظرية درود Drude من المعادلة (5) وإذا أهملنا تأثير الانتقالات الالكترونية واعتبرنا أن $\varepsilon_{core(\omega)=1}$ في المجال تحت الأحمر يكون عندها ω_p التردد البلازموني في حالة الالكترونات الحرة من الشكل $\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m^*}$ كما في حالة نموذج الالكترون الحر.

تصبح علاقتا درود (6) و (7) من الشكل:

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \qquad (6)`$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{\omega_p^2\tau}{\omega(1+\omega^2\tau^2)} \qquad (7)`$$

نشير إلى أن نظرية درود تفترض وجود قيمة لε_{cor} بالرغم من التعامل مع المجال تحت الأحمر حيث تكون مساهمة الإلكترونات الحرة هي الغالبة. من أجل المعادن عند ترددات المجال تحت الأحمر القريب وحيث ماتزال $\boldsymbol{\omega > 1/\tau}$ وفي حالة خاصة وبتقريب جيد نهمل (1) بالمقارنة مع$\omega^2\tau^2$ نكتب (6)` و(7)` بدلالة التردد ω و ω_p

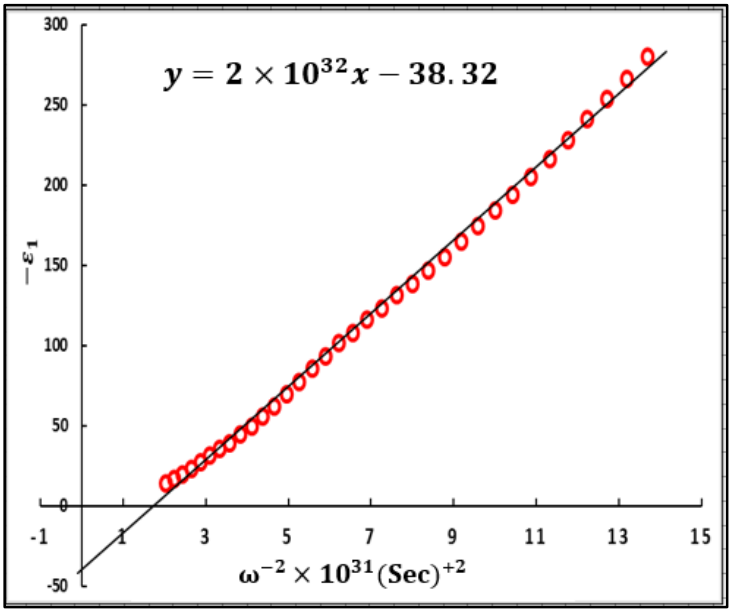
$$\boldsymbol{\varepsilon_1(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \qquad (8)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega^3 \tau} \qquad (9)$$

حيث أنه $\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m^*.}$ وواضح أنه برسم $\varepsilon_1(\omega)$ بدلالة ω^{-2} نستطيع تعيين الكتلة الفعالة m^* ومن ثم يمكن تعيين زمن الاسترخاء τ وذلك من رسم $\varepsilon_2(\omega).\omega$ بدلالة ω^{-2} .

إن تعبير الإلكترونات الحرة $\hat{\varepsilon}(\omega)$ هو مفيد فقط لأجل طاقات الفوتون الأخفض من طاقة حدية موافقة لظهور الانتقالات ما بين السويات الطاقية وفق هذه الطاقة الحدية فإن شكل منحني ε_2 تحديدا يعتمد على البنية الالكترونية للمادة.

نجري هذه الخطوط البيانية على نتائجنا في المجال تحت الأحمر المدروس لدينا. من المعادلة (8) نرسم خط بياني $(\frac{1}{\omega^2}) \rightarrow (-\varepsilon_1)$ نجد:



الشكل (13): خط بياني $(\frac{1}{\omega^2}) \rightarrow (-\varepsilon_1)$ للعينة ذات السماكة $(t = 400A^{\circ})$.

نرمز لميل الخط البياني ب M_1 والذي يعطى:

$$M_1 = \omega_p^2 = 2 \times 10^{32}\ Sec^{-2}$$

ومنه نحسب:

التردد البلازموني الحجمي $\omega_p = \sqrt{\omega_p^2} = 1.41 \times 10^{16}\ Sec^{-1}$

طاقة البلازمون الحجمي $\hbar.\omega_p = 9.31\ ev$

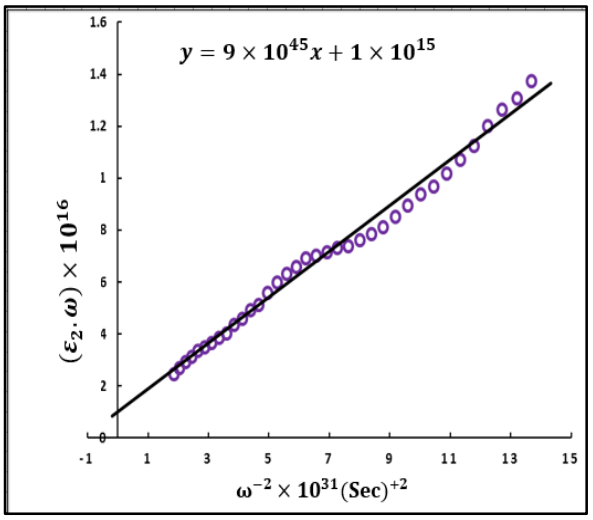
طول موجة البلازمون الحجمي $\lambda_p = \frac{1240}{\hbar\omega_p(ev)} = 133.06\ nm$

لمقارنة نتائجنا مع المراجع العلمية الأخرى ندرج الجدول التالي:

	$\omega_p \times 10^{16}(Sec^{-1})$	$\hbar.\omega_p(ev)$	$\lambda_p(nm)$
عينة البحث	1.414	9.319	125.061
Re [23]	1.31	8.634	143.618
Re [20]	1.34	8.832	140.398
Re [1]	1.37	9.029	137.335
Re [24]	1.5	9.886	125.429
Re [22]	1.41	9.29	133.34
Re [25]	1.64	10.83	114.49

من الواضح أنه لا يمكن إهمال مساهمة إلكترونات اللب (المرتبطة) في ثابت العزل الكهربائي العقدي وهذا واضح عند نهاية الترددات المرتفعة $\omega \longrightarrow \infty$ حيث ينعدم دور الإلكترونات الحرة ويصبح لـε_{cor} قيمة أكبر من الواحد ففي الشكل (13) واضح أن $\varepsilon_{cor} \approx 38$ وذلك من تقاطع الخط المستقيم مع محور $-\varepsilon_1(\omega)$ وذلك عندما $\frac{1}{\omega^2} \longrightarrow 0$ في نهاية الترددات المرتفعة.

من المعادلة (9) نرسم خط بياني $\varepsilon_2.\omega \rightarrow \frac{1}{\omega^2}$ فنجد



الشكل (14): خط بياني $\varepsilon_2.\omega \rightarrow \frac{1}{\omega^2}$ للعينة ذات السماكة $(t = 400A^{\circ})$.

نرمز لميل الخط البياني بM_2 والذي يعطى:

$$M_2 = \varepsilon_2.\omega = \frac{\omega_p^2}{\omega^2.\tau} \Longrightarrow M_2 = \frac{\omega_p^2}{\tau} = 9 \times 10^{45} Sec^{-3}$$

يمكننا أن نحسب زمن الاسترخاء من M_2 وبملاحظة M_1:

$$M_2 = \frac{\omega_p^2}{\tau} = \frac{M_1}{\tau} \Longrightarrow \tau = \frac{M_1}{M_2}$$

$$\tau = 2.22 \times 10^{-14} Sec$$

لمقارنة نتائجنا مع المراجع العلمية الأخرى ندرج الجدول التالي:

$\tau \times 10^{-14}$ (Sec)	البحث	Re [23]	Re [20]	Re [1]	Re [24]	Re26]
	2.22	1.38	0.69	3.48	2	2.4

يمكننا الآن حساب الكتلة الفعالة من علاقة التردد البلازموني الحجمي والذي يعطى بجملة الواحدات الغوصية بالعلاقة [23]، [10]:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m^*.} \qquad (10)$$

وبالانتقال إلى جملة الوحدات الدولية (SI) يصبح التردد البلازموني من الشكل [10]:

$$\omega_p^2 = \frac{N e^2}{\varepsilon_0 m^*.} \qquad (11)$$

وتصبح الكتلة الفعالة

$$m^* = \frac{N e^2}{\varepsilon_0 \omega_p^2} \qquad (12)$$

نعوض الثوابت بالعلاقة (12) حيث أن ε_0 تمثل السماحية النسبية الكهربائية للخلاء أما N فتمثل عدد الإلكترونات الحرة في واحدة الحجوم:

$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} F/m$ [26] $\mathrm{N} = 8.465 \times 10^{28}/m^3$

$\mathrm{e} = 1.6 \times 10^{-19} C$ $\mathrm{m}_e = 9.1 \times 10^{-31} Kg$

فنحصل على الكتلة الفعالة للإلكترون الحر:

$$\frac{\mathrm{m}^*}{\mathrm{m}_e} = 1.34$$

لمقارنة نتائجنا مع المراجع العلمية الأخرى ندرج الجدول التالي:

$\frac{\mathrm{m}^*}{\mathrm{m}_e}$	البحث	Re [22]	Re [20]	Re [27]
	1.344	1.42	1.49	1.01

6. الاستنتاجات:

- ✓ ضرورة تسخين الركائز قبل البدء بعملية الترسيب للحصول على أفضل تجانس لطبقة مستمرة من حبيبات النحاس للفلم المرسب.
- ✓ أعطت صور مجهر القوى الذرية AFM شكلا واضحا لتشكل الفلم الرقيق فكان عبارة عن طبقة مستمرة من الحبيبات المتراصة.
- ✓ لوحظ أنه بعد سماكة معينة كانت بالنسبة لعيناتنا ($\cong 400A^{\circ}$) لا يوجد تأثير لزيادة السماكة على الخصائص الضوئية حيث يقترب الفلم الرقيق من الBulk.
- ✓ تم تعيين تردد البلازمون السطحي والحجمي الذي يقع خارج نطاق قياساتنا.
- ✓ انزاحت قيم التردد البلازموني السطحي مع زيادة سماكة الفلم باتجاه الطاقات الأعلى حيث يصبح أقرب للتردد البلازموني الحجمي.
- ✓ أعطت نتائج حسابتنا لتقدير الكتلة الفعالة للإلكترون الحر وزمن الاسترخاء اعتمادا على قياسات ε_1 وε_2 في المجال تحت الأحمر مصداقية عالية لما كانت عليه في توافقها مع المراجع العلمية.

7.التوصيات:

- ✓ العمل على تحضير أفلام رقيقة من النحاس بطرق و سماكات مختلفة وعلى شرائح غير الزجاج كالكوارتز مثلا ومقارنتها مع نتائج العمل.
- ✓ أكسدة أفلام النحاس وأضافه بعض الشوائب إليه ومقارنة النتائج مع نتائج البحث.
- ✓ استخدام الأفلام الرقيقة من النحاس في مجال التطبيقات البلازمونية.
- ✓ استخدام علاقات نظرية وأخرى (نظرية–تجريبية) لإيجاد الثوابت الضوئية لمعادن أخرى ومقارنتها مع قيم مرجعية مقاسة بطرق أليبسومترية.
- ✓ الاستفادة من قياسات تابع العزل لكهربائي العقدي في المجال تحت الأحمر لتقدير الكتلة الفعالة للإلكترون الحر وزمن الاسترخاء لمعادن أخرى كالفضة والذهب مثلاً ومقارنتها مع المراجع العلمية الخاصة بها.

المراجع العلمية :

[1] S. ROBERTS, 1960- Optical Properties of Copper- PHYSICAL REVIEW, Vol 118, NUMBER 6, p1509-1518.

[2] O. YESHCHENKO, I. DMITRUK, A. DMYTRUK, A. ALEXEENKO, 2007 -Influence of annealing conditions on size and optical properties of copper nanoparticles embedded in silica matrix-Journal of Materials Science and Engineering B, Vol 137, P247-254.

[3] D. RAJESH, C. SUNANDANA, M. KRISHNA, 2015 -Structural and Optical properties of Brominated Cu thin films- Materials Science and Engineering, Vol 73, P1-6.

[4] D. ALLRED, N. BRIMHALL, 2009- Measured Optical Constants of Copper from 10 nm to 35 nm- journal of Brigham Young University, Vol.17, Issue.26, p23873-23879.

[5] C. MELO, M. JULLIEN, Y. BATTIE, A. NACIRI, J. GHANBAJA, F. MONTAIGNE, J. PIERSON, F. RIGONI, N. ALMQVIST, A. VOMIERO, 2021- Tunable Localized Surface Plasmon Resonance and Broadband Visible Photo response of Cu Nanoparticles/ZnO Surfaces- HAL, P1-16.

[6] A. Chingsungnoen, T. Dasr,2018- Theoretical Calculation of Optical Properties of Copper NANO PARTICLES،Indian Journal of Science and Technology، *Vol11(1)*,P 1-9

[7] T.Ghodselahi, M.Vesaghi, A Shafiekhani, 2009-Study of surface plasmon resonance of Cu@Cu2O core–shell nanoparticles by Mie

theory –JOURNAL OF PHYSICS D: APPLIED PHYSICS *,VOL42,*p1-6,2009

[8] R.Al Abdallah, N.S.Adeen,2010- Excitation of Surface Plasma Oscillations in Continuous Ag Thin Films, Journal of AL Baath University, VOL31,NO12, In Arabic

[9] Physical Encyclopedia . Moscow 1965-1966

[10] C. KITTEL, 1996-Introduction to Solid State Physics, Jon Wilg 17, New York, P270-280.

[11] D.JAN, K.CHINGLEE, 1991- Excitation Of Surface Plasma Surface Wave In Layered Structure Of Au/Ag Thin Films- CHINESE JOURNAL OF PHYSICS, VOL. 29, NO.1, P1-8.

[12] M. DRESSELHAUS, 2001- Solid State Physics Part II. Optical Properties of Solids.P 2-57.

[13] J. singh, J. Wiley,2006- optical properties of condensed matter and applications. Darwin University, Australia,P1-441

[14] E. VALKONEN, B. KARLSSON ,C-G. RIBBING, 1983- Solar Optical Properties of Thin Films of Cu, Ag, Au, Cr, Fe, Co, Ni And Ai- Solar Energy, Vol. 2, No. 2. pp. 211-222.

[15] R. KADHIM, 2016- Study of Some Optical Properties of Polystyrene – Copper Nano composite Films- Journal of World Scientific News, WSN 30,P 14-25

[16] S. TAHA, A. ABDUL- HAMEAD, A. MEHSIN, R.MAHMOOD, 2015- Study Some Structural and Optical Properties of Copper Nano Film-IJAIEM, Vol 4, Issue 1, P1-6.

[17] R. AL-ABDELLAH, 1980- Plasma resonance of granular thin films- Ph. D. thesis.USSR . Ckarkov.

[18] M.ORDAL, R. BELL, R. ALEXANDER, JR, L. LONG, M. QUERRY ,1985-Optical properties of fourteen Metals in the infrared: Al, Co, Cu, Au, Fe, Pb, Mo, Ni, Pd, Pt, Ag, Ti, V, and W- Optical Society of America ,Vo. 24, No.24, P 4493-4499.

[19] W. WERNER, K. GLANTSCHING, C. DRAXL, 2009- Optical constants and inelastic electron scattering Data for 17 Elemental Metals- Journal of phys. chem, vol. 38, No. 4, P1013-1061.

[20] P. JONSON, R. CHRISTY, 1972-Optical Constants of the Noble Metals- Physical Review B, Vol 6. No12, P1-10.

[21] R.Al-ABDALLAH, A.MOLHEM, A.Alales, 2023-A Study of Optical Properties of Copper Thin Films and Processing Their Results According to Droude's Theory, Journal of Al-Baath University, Vol 45.No17, pp71-104 In Arabic

[22] H. EHRENREICH, H. PHILIPP, 1962- Optical Properties Of Ag and Cu-Generl Electrical Research Laboratory Physical Review,V 128,NO4,P 1622-1629.

[23] D. NASH, J. SAMBLES, 1985 –Surface plasmon polariton study of the optical dielectric function of copper– JOURNAL OF MODERN OPTICS, Vol. 42, No.8 P 1639-1647.

[24] M. Otter,1961- Temperaturabh/ingigkeit der optischen Konstanten massiver Metalle Zeitschrift fur Physik, Vol.161,P539-549

[25] A. Rakic , A. Djurisic´ , J.Elazar, M. Majewski,1998-Optical properties of metallic films for vertical-cavity optoelectronic devices, Journal Optical Society of America APPLIED OPTICS ، Vol. 37, No. 22,pp. 5271-5283

[26] A. Seaver ,2008-Some Comments on the Charge Decay Paradox in Metals ,Proc. ESA Annual Meeting on Electrostatics ،pp. 1-11

[27] S. Kasap ,2002-Principles of Electronic Materials and Devices ،