

مجلة جامعة حمص

سلسلة العلوم الأساسية



مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 47 . العدد 9

1447 هـ - 2025 م

الأستاذ الدكتور طارق حسام الدين رئيس جامعة حمص

المدير المسؤول عن المجلة

أ. د. وليد حمادة	رئيس تحرير مجلة جامعة حمص للعلوم الإنسانية
أ. د. درغام سلوم	رئيس تحرير مجلة جامعة حمص للعلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية

عضو هيئة التحرير	د. محمد فراس رمضان
عضو هيئة التحرير	د. مضر سعود
عضو هيئة التحرير	د. ممدوح عبارة
عضو هيئة التحرير	د. موفق تلاوي
عضو هيئة التحرير	د. طلال رزوق
عضو هيئة التحرير	د. أحمد الجاعور
عضو هيئة التحرير	د. الياس خلف
عضو هيئة التحرير	د. روعة الفقس
عضو هيئة التحرير	د. محمد الجاسم
عضو هيئة التحرير	د. خليل الحسن
عضو هيئة التحرير	د. هيثم حسن
عضو هيئة التحرير	د. أحمد حاج موسى

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها
الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة حمص

سورية . حمص . جامعة حمص . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : 2138071 31 963 ++

. موقع الإنترنت : www.homs-univ.edu.sy

. البريد الإلكتروني : journal.homs-univ.edu.sy

ISSN: 1022-467X

شروط النشر في مجلة جامعة حمص

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + word / CD
من البحث منسق حسب شروط المجلة.
- طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
- إذا كان الباحث طالب دراسات عليا:
يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقة
على النشر في المجلة.
- إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:
يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده
حسب الحال.
- إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :
يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله
حتى تاريخه.
- إذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :
يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس
عمله.
- يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية
والتطبيقية):
عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
 - 1- مقدمة
 - 2- هدف البحث
 - 3- مواد وطرق البحث
 - 4- النتائج ومناقشتها .
 - 5- الاستنتاجات والتوصيات .
 - 6- المراجع.

- يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (الآداب - الاقتصاد - التربية - الحقوق - السياحة - التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):
- عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1. مقدمة.
- 2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
- 3. أهداف البحث و أسئلته.
- 4. فرضيات البحث و حدوده.
- 5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
- 6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
- 7. منهج البحث و إجراءاته.
- 8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
- 9. نتائج البحث.
- 10. مقترحات البحث إن وجدت.
- 11. قائمة المصادر والمراجع.
- 7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:
 - أ- قياس الورق 25×17.5 B5.
 - ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 - يمين 2.5- يسار 2.5 سم
 - ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8
 - ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20
 - كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي - العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.
 - ج. يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.
- 8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.
- 9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.

10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة
11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة - الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة - سنة النشر - وتتبعها معترضة (-) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة - دار النشر وتتبعها فاصلة - الطبعة (ثانية . ثالثة) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة . وفيما يلي مثال على ذلك:

MAVRODEANUS, R1986- Flame Spectroscopy. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

— بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة — المجلد والعدد (كتابة مختزلة) وبعدها فاصلة — أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة . مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases Clinical Psychiatry News , Vol. 4. 20 – 60

ج . إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد بالبنود (أ و ب) ويكتب في نهاية المراجع العربية: (المراجع In Arabic)

رسوم النشر في مجلة جامعة حمص

1. دفع رسم نشر (50000) ل.س أربعون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.
2. دفع رسم نشر (200000) ل.س مئة ألف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .
3. دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .
4. دفع مبلغ (15000) ل.س ستة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.

المحتوى

الصفحة	اسم الباحث	اسم البحث
40-11	د.علي الدود	دراسة تطبيقية لحساب المقطع العرضي لتشتت النيوترونات الحرارية في الحديد من أجل تعيين طول الانتشار لها
54-41	ورود محمد إبراهيم د.حامد عباس	استخدام مبدأ غاوس لحساب التكاملات المضاعفة اللانهائية
70-55	د.مرام ناظور	تأثير المستخلص المائي لأوراق نبات الجوز <i>Juglans regia L</i> في منع وضع البيض عند إناث حافرة أوراق البندورة <i>Tuta absoluta</i> (Meyrick, 1917) (Lepidoptera: Gelechiidae)
86-71	د.فاطمة شلاف	استخدام الشبكات العصبونية لترميم قواعد البيانات عبر تقدير المدخلات اعتماداً على قيم المخرجات بأقل نسبة خطأ ممكنة
102-87	ورود محمد إبراهيم د.حامد عباس	حساب التكاملات المضاعفة بالاعتماد على كثيرات حدود تشبيبيشيف

130-103	ايمان أحمد حسين د.سامح العرجه	استقرار حل جملة معادلات تفاضلية عشوائية من مرتبة كسرية
---------	----------------------------------	---

دراسة تطبيقية لحساب المقطع العرضي لتشتت النيوترونات الحرارية في الحديد من أجل تعيين طول الانتشار لها

د. علي الدود¹

المخلص

يُعدّ الحديد من المعادن المهمة في صناعة المفاعلات النووية، حيث يُستخدم في صناعة العديد من المكونات النووية. وتُعدّ أهمية استخدام الحديد في المفاعلات النووية كبيرة، حيث يساعد في تحسين السلامة النووية وزيادة كفاءة المفاعل النووي وتقليل التكاليف.

في هذا البحث، قمنا بتقديم طريقة جديدة لحساب طول الانتشار للنيوترونات الحرارية، من خلال تطبيق علاقة تم إيجادها تعطي تدفق حزمة النيوترونات العابرة بصورة مباشرة من عينة كبيرة سماكتها x . حيث قمنا بتعيين طول انتشار النيوترونات الحرارية للحديد Fe^{56} من خلال تعيين المقطع العرضي للتشتت لها.

الكلمات المفتاحية: المقطع العرضي للتشتت، معامل الانتشار، طول الانتشار للحديد.

¹ دكتوراه في الفيزياء النظرية.

An Applied Study to Calculate the Scattering Cross Section Iron of Thermal Neutrons in order to Determine their Diffusion Length

Ali Al-Doud²

Abstract

Iron is an important metal in the nuclear reactor industry, as it is used in the manufacture of many nuclear components. The importance of using iron in nuclear reactors is significant, as it helps ncy, and reduce costsimprove nuclear safety, increase reactor efficie.

In this research, we present a new method for calculating the diffusion length of thermal neutrons, by applying an equation that -directly gives the flux of the neutron beam passing through a large thick sample. We determined the diffusion length of thermal neutrons in iron by determining their scattering cross section.

Keywords: scattering cross section, diffusion coefficient, iron diffusion length.

² PhD in Theoretical Physics.

1. مقدمة

عندما يتم تتبع مسيرة الدراسات المجراة على النيوترونات منذ اكتشافها ومعرفة خصائصها نلاحظ أنه إضافة إلى التحليل بالتنشيط النيوتروني NAA للعناصر كان انتشارها أيضاً هو أداة هامة جداً في دراسة بنية المواد؛ أي في تعيين معامل الانتشار ومن ثم طول الانتشار. من هنا وجدنا أنه من المفيد جداً أن نقوم بحساب احتمال تشتت النيوترون على نواة الحديد، التي تمكننا من تعيين المقطع العرضي للتشتت لها، نظراً لأن المقطع العرضي للتشتت يرتبط بمعامل الانتشار. فإذا ما استطعنا تعيين المقاطع العرضية لنظائر عنصر ما في عينة، فإنه سيمكننا تعيين معاملات الانتشار، وهذه أداة قيمة لإحدى أهم الدراسات التي يمكن إجراؤها على تطور الوقود النووي للمفاعل في أثناء التشغيل.

2. هدف ومشكلة البحث

إن الهدف من هذا البحث حساب المقطع العرضي للتشتت من أجل الحديد Fe^{56} ، الذي بدوره يقود إلى تعيين معامل الانتشار وطول الانتشار. ولهذا فإن مشكلة وهدف البحث هي الاستفادة من حساب المقطع العرضي للتشتت وربط حسابه بمعامل الانتشار ومن ثم طول الانتشار، حيث أن دراسة انتشار النيوترونات ذات أهمية كبيرة من أجل تقييم أداء المفاعلات النووية، مثل تحديد كفاءة الطاقة المنتجة والمخاطر الممكنة. كما يستخدم طول انتشار النيوترونات الحرارية لتحديد تصميم الوقود النووي، مثل حجم الحبيبات والتركيب الكيميائي.

3. دراسة مرجعية

إن استخدام الحديد في المفاعلات النووية له تاريخ طويل يمتد إلى عدة عقود، ولكن استخدامه كعنصر أساسي في بناء المفاعلات النووية بدأ في النصف الثاني من القرن العشرين. تم تقديم نظرة تاريخية على استخدام الحديد في المفاعلات النووية.

الفترة الأولى (1940-1950)

في أوائل الأربعينيات، بدأ العلماء في تجربة استخدام مواد مختلفة في بناء المفاعلات النووية، بما في ذلك الحديد. وفي عام 1942، تم بناء أول مفاعل نووي، "شيكاغو بايل" The Chicago Pile، والذي استخدم الجرافيت كوسيط لتهدة النيوترونات والحديد كغلاف للوقود النووي [1].

تطوير المفاعلات النووية (1950-1960)

في الخمسينيات، بدأ استخدام الحديد بشكل أكبر في بناء المفاعلات النووية، خاصة في تصميم المفاعلات المائية (pressurized water reactors (PWRs ومفاعلات boiling water reactors (BWRs). في عام 1957، تم تشغيل أول مفاعل نووي تجاري، "شيبينغسبورت"، والذي استخدم الحديد في بناء وعاء الضغط [2].

استخدام الحديد في المفاعلات النووية الحديثة (1970-حتى الآن)

في السبعينيات والثمانينيات، تم تطوير استخدام الحديد في بناء المفاعلات النووية بشكل أكبر، مع التركيز على تحسين السلامة والكفاءة. تم استخدام الحديد في بناء وعاء الضغط، والغلاف، والأنابيب، وغيرها من المكونات الرئيسية للمفاعلات النووية [3].

يمكن القول إن استخدام الحديد في المفاعلات النووية له تاريخ طويل وتطور كبير على مر العقود. يتم البحث المستمر في تقنيات جديدة لتحسين أداء الحديد في المفاعلات النووية وتطوير مفاعلات نووية متقدمة.

4. أهمية استخدام الحديد في المفاعلات النووية

تعدّ المفاعلات النووية من أهم المصادر لتوليد الطاقة الكهربائية في العالم، وتستخدم في العديد من الدول لتوليد الكهرباء والطاقة النووية. وفي هذا السياق، يلعب الحديد دورًا مهمًا في صناعة المفاعلات النووية، حيث يُستخدم في صناعة العديد من المكونات النووية.

4.1. استخدامات الحديد في المفاعلات النووية

يُستخدم الحديد في صناعة العديد من المكونات النووية في المفاعلات النووية، بما في ذلك:

1. قضبان التحكم في التفاعل النووي: يُستخدم الحديد في صناعة قضبان التحكم في التفاعل النووي، والتي تساعد في التحكم في سرعة التفاعل النووي وتقليل خطر التفاعلات النووية غير المرغوبة [4].

2. الحواجز النووية: يُستخدم الحديد في صناعة الحواجز النووية، والتي تساعد في حماية الناس من الإشعاع النووي وتقليل خطر تسرب المواد النووية [5].

3. الأسطوانات النووية: يُستخدم الحديد في صناعة الأسطوانات النووية، والتي تحتوي على الوقود النووي وتستخدم في المفاعل النووي [6].

4. الأنابيب النووية: يُستخدم الحديد في صناعة الأنابيب النووية، والتي تستخدم لنقل الوقود النووي والمواد النووية الأخرى في المفاعل النووي [7].

4.2. خصائص الحديد في المفاعلات النووية

يتميز الحديد بعدد من الخصائص التي تجعله مناسباً للاستخدام في المفاعلات النووية، بما في ذلك:

1. القدرة على امتصاص النيوترونات: يُعدّ الحديد من المعادن التي يمكنها امتصاص النيوترونات، مما يجعله مفيداً في التحكم في التفاعل النووي [8].

2. القدرة على تحمل الإشعاع: يُعدّ الحديد من المعادن التي يمكنها تحمل الإشعاع النووي، مما يجعله مفيداً في صناعة الحواجز والستائر لحماية الناس من الإشعاع [9].

3. القدرة على تحمل الضغط العالي: يُعدّ الحديد من المعادن التي يمكنها تحمل الضغط العالي، مما يجعله مفيداً في صناعة الأسطوانات النووية والأنابيب النووية [10].

4.3. أهمية استخدام الحديد في المفاعلات النووية

تُعدّ أهمية استخدام الحديد في المفاعلات النووية كبيرة، حيث يساعد في:

1. تحسين السلامة النووية: يساعد الحديد في تحسين السلامة النووية من خلال التحكم في التفاعل النووي وتقليل خطر التفاعلات النووية غير المرغوبة [11].

2. زيادة كفاءة المفاعل النووي: يساعد الحديد في زيادة كفاءة المفاعل النووي من خلال تحسين تصميم المفاعل وتقليل الخسائر الحرارية [12].

3. تقليل التكاليف: يساعد الحديد في تقليل التكاليف من خلال استخدام مواد محلية الصنع وتقليل الحاجة إلى مواد مستوردة [13].

5. نظرية الانتشار النيوتروني

يؤدي نموذج نظرية الانتشار لانتقال النيوترونات دوراً مهماً في نظرية المفاعلات نظراً لأنها بسيطة إلى حدٍ يكفي للسماح بالتحقق العلمي منها، وهي واقعية كفايةً لدراسة العديد من مشاكل التصميم المهمة للمفاعل. ونظراً لكون النيوترونات المعتبرة أحادية الطاقة أو السرعة، فإنه يمكن أن تقدم نموذجاً أو تصوراً أولياً عن التصميم. إن الطرق الرياضية المستخدمة في تحليل مثل هذا النموذج هي نفسها المطبقة في أساليب أكثر تطوراً مثل نظرية انتشار المجموعة المتعددة، ونظرية الانتقال.

يعتمد استخراج معادلة الانتشار أثناء العبور على قانون فيك Fick's law، بالإضافة لذلك يمكن استخراج معادلة الانتقال بشكل مباشر أيضاً. تتم مناقشة استخراج معادلة هيلمهولتز

Helmholtz، والقيود المفروضة على معادلة الانتشار وكذلك الشروط الحدية المستخدمة المطبقة على الهندسة الواقعية والمسائل الفيزيائية [14].

5.1. المقطع العرضي للانتقال

يتم أخذ تأثير التوزيع الزاوي للتشتت بناءً على حركة النيوترونات التي يمكن وصفها باستخدام المقطع العرضي للانتقال. بفرض أن:

1. الوسط لانهائي.
2. ولا يوجد امتصاص في وسط التشتت.
3. ولا تتغير طاقة النيوترونات نتيجة للتصادم مع نوى الوسط.
4. وتقطع الجسيمات بعد كل تصادم مسافة تدعى المسار الحر الوسطي للتشتت λ_s والذي يتأثر بزاوية التشتت θ .

بعد إدخال النيوترونات في المنظومة، تتحرك مسافة تعطى بالعلاقة:

$$\text{إن} \quad \overline{Z_0} = \lambda_s \quad (1)$$

المسافة المتوقعة قطعها بعد الاصطدام الأول على طول المحور Z ، كما هو مبين في الشكل (1) تعطى بالعلاقة:

$$Z_1 = \lambda_s \cos(\theta_1)$$

القيمة المتوسطة لـ Z_1 هي:

$$\overline{Z_1} = \lambda_s \overline{\cos(\theta_1)} = \lambda_s \bar{\mu} \quad (2)$$

حيث إن:

$$\bar{\mu} = \frac{2}{3A}$$

و A العدد الكتلي للنواة في وسط التشتت.

وإن المسافة المقطوعة بعد الاصطدام الثاني تكون:

$$Z_2 = \lambda_s \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2)$$

حيث إن θ زاوية السميت للتشتت متماثل المناحي.

إن القيمة المتوسطة لـ Z_2 عطى بالعلاقة:

$$\overline{Z_2} = \lambda_s \overline{\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2)} \approx \lambda_s \overline{\cos(\theta_1)^2} = \lambda_s \bar{\mu}^2 \quad (3)$$

بشكل عام من أجل $(n - 1)$ تصادم:

$$\overline{Z_n} = \lambda_s \bar{\mu}^n ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

حيث $\overline{Z_n} \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$ ، وهذا يعني أن النيوترونات يمكن أن تشتت في كافة الاتجاهات بنفس الاحتمال، في التصادم التالي (التصادم $(n + 1)$). وهذا يعني أن النيوترون يفقد الاتجاه الأصلي للحركة بعد سلسلة من التصادمات التي تميز سلاسل ماركوف Markov، والتي تتناول مسافة ما تعبره الجسيمة خلال وحدة الزمن λ_{tr} :

$$\begin{aligned} \lambda_{tr} &= Z_0 + Z_1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_s \bar{\mu}^n \\ &= \lambda_s (1 + \bar{\mu} + \bar{\mu}^2 + \dots) \\ &= \frac{\lambda_s}{1 - \bar{\mu}}, \quad \forall \quad \bar{\mu} < 1 \end{aligned} \quad (5)$$

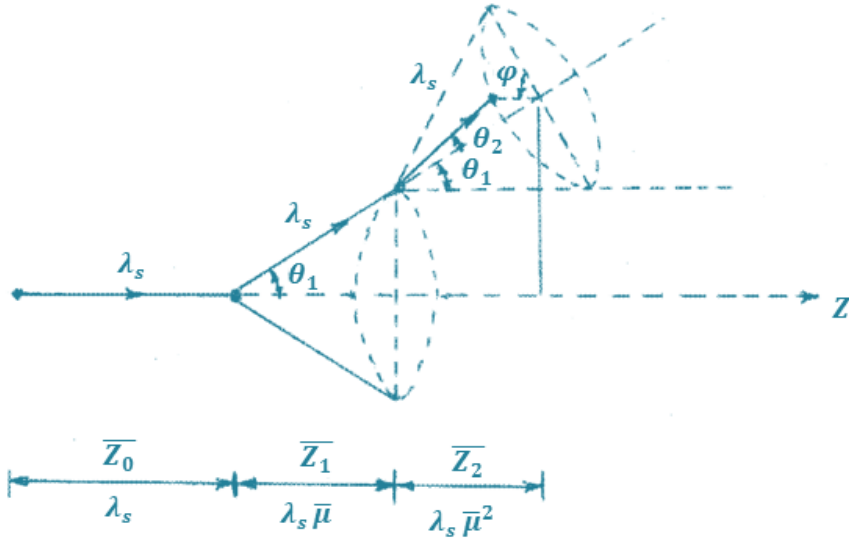
يعرف المقطع العرضي للانتقال كما يأتي:

$$\Sigma_{tr} = \frac{1}{\lambda_{tr}} = \Sigma_s (1 - \bar{\mu}) \quad (6)$$

لكن إذا حدث امتصاص، يُعمم تعريف المقطع العرضي للعبور بالشكل [15]:

$$\Sigma_{tr} = \Sigma_a + \Sigma_s (1 - \bar{\mu}) = \Sigma_t - \Sigma_s \bar{\mu} \quad (7)$$

حيث إن Σ_t المقطع العرضي الماكروسكوبي الكلي، Σ_a المقطع العرضي الماكروسكوبي للامتصاص، Σ_s المقطع العرضي الكلي الماكروسكوبي للتشتت.



الشكل (1): هندسة انتقال الجسيمات على امتداد ثلاث تصادمات.

5.2. قانون فيك (FICK) وتقريب الانتشار

يتم ربط تدفق النيوترونات Φ وكثافة تيار النيوترونات $\vec{J}$ بطريقة بسيطة في شروط محددة. إن العلاقة بين Φ و $\vec{J}$ تكون مماثلة من حيث الشكل للقانون المستخدم في دراسة ظواهر الانتشار في السوائل والغازات أو ما يعرف بقانون فيك³ Fick.

كي يتم استخدام هذا القانون في نظرية المفاعل والذي يقود إلى تقريب الانتشار. تم الأخذ بالافتراضات الآتية:

1. اعتبار الوسط لانهائياً.
2. إن المقاطع العرضية تكون ثابتة، بغض النظر عن الموضع، مما يعني أن الوسط متجانس.

³ إن قانون فيك في الكيمياء الفيزيائية ينص على أن: "إذا كان تركيز المادة المذابة في منطقة معينة أكبر من أخرى في المحلول، ينتشر المذاب من منطقة ذات التركيز الأعلى إلى منطقة ذات التركيز الأقل".

3. الانتشار متماثل المناحي في الجملة المخبرية (L).
 4. إن تدفق النيوترونات يتغير ببطء مع الموضع.
 5. يتم استخدام منظومة سرعة حيث تكون كثافة النيوترونات غير تابعة للزمن.
 6. لا يوجد منبع للانشطار في المنظومة.
- سيتم تطبيق بعض هذه الافتراضات في وقت لاحق. على سبيل المثال، سيتم أخذ وسط الانتشار باعتباره متناهيًا في الحجم، أكثر من أنه لانهائي.
- يتوجب محاولة حساب كثافة التيار الجسيمات (النيوترونات) في مستوي الإحداثيات في الشكل (2). يعطى المتجه $\vec{J}$ بالعلاقة:

$$\vec{J} = J_x \hat{i} + J_y \hat{j} + J_z \hat{k} \quad (8)$$

لذلك يتوجب حساب المركبات J_x , J_y , J_z .

يمكن أن تكتب هذه المركبات من أجل كثافة التيارات المحورية الجزئية على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} J_x &= J_x^+ - J_x^- \\ J_y &= J_y^+ - J_y^- \\ J_z &= J_z^+ - J_z^- \end{aligned} \quad (9)$$

سيتم التركيز على العبور من أجل مركبة واحدة J_z ، عبر عنصر المساحة dS_z في مركز احداثيات الجملة وفقاً للاتجاه السالب لـ z ، كما هو مبين في الشكل (2).

إن كل نيوترون مار خلال dS_z في المستوي xy ، يأتي من تصادمات التشتت. وإن تشتت النيوترونات في المستوي xy يجعلها تتدفق إلى الأسفل من خلال عنصر المساحة dS_z .
لنعتبر أن عنصر الحجم يعطى بالعلاقة:

$$dV = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \quad (10)$$

وبالتالي عدد تصادمات التشتت التي تحدث في وحدة الزمن من أجل عنصر الحجم dV

هو:

$$\sum_s \Phi(\vec{r}) dV = \sum_s \Phi(\vec{r}) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \quad (11)$$

$\Phi(\vec{r})$ تمثل تدفق النيوترونات.

إن التشتت يكون متماثل المناحي في الجملة L ، من أجل الجزء الذي يصل إلى dS_z المقابل

للزاوية المجسمة $d\Omega$:

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{\frac{ds}{r^2}}{4\pi} = \frac{dS_z \cos(\theta)}{4\pi r^2} \quad (12)$$

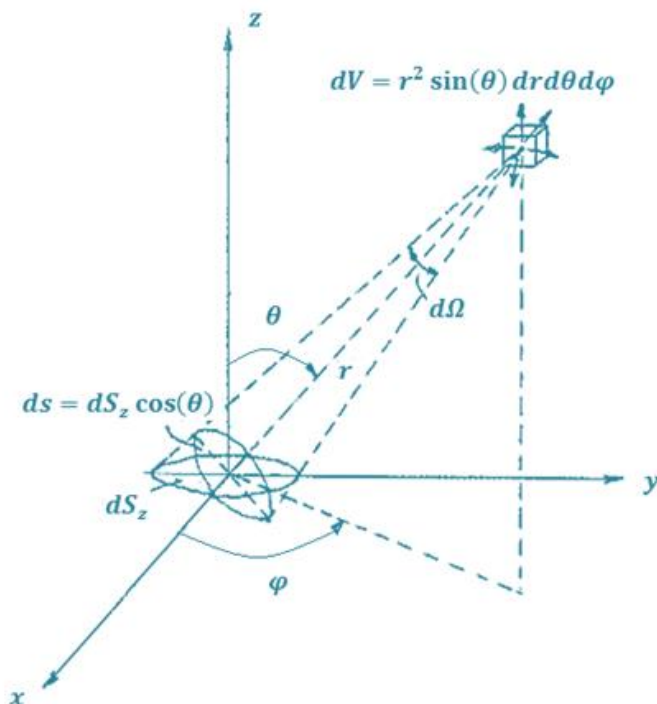
بذلك يكون عدد النيوترونات المتشتتة في واحدة الزمن في عنصر الحجم dV الممتد على

dS_z ، بعد أن تنوهن في الوسط، متناسباً مع العامل الأسّي $e^{-\Sigma t r}$:

$$dN = e^{-\Sigma t r} \sum_s \Phi(\vec{r}) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \frac{dS_z \cos(\theta)}{4\pi r^2}$$

يمكن كتابة كثافة التيار الجزئي J_z^- بالشكل:

$$J_z^- = \frac{\int dN}{dS_z} = \frac{\sum_s}{4\pi} \iiint_{000}^{\infty \pi / 22\pi} e^{-\Sigma t r} \sum_s \Phi(\vec{r}) r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) dr d\theta d\varphi \quad (13)$$



الشكل (2): الهندسة الكروية من أجل استخراج تيار النيوترونات وقانون فيك.

إن $\Phi(\vec{r})$ يمثل تابعاً غير معلوم، تم نشره بسلسلة تايلور Taylor بفرض أن التغير بسيط مع الموضع:

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0 + x \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_0 + y \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_0 + z \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_0 + \dots$$

بكتابة كل من x و y و z في الإحداثيات الكروية:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) = \Phi_0 + r \sin(\theta) \cos(\varphi) \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_0 + r \sin(\theta) \sin(\varphi) \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_0 \\ + r \cos(\theta) \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_0 \end{aligned} \quad (14)$$

بالتعويض في المعادلة (13) نحصل على:

$$\begin{aligned}
 J_z^- &= \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} e^{-\Sigma_t r} \left[\Phi_0 + r \sin(\theta) \cos(\varphi) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_0 \right. \\
 &\quad + r \sin(\theta) \sin(\varphi) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_0 \\
 &\quad \left. + r \cos(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_0 \right] \sin(\theta) \cos(\theta) dr d\theta d\varphi \quad (15)
 \end{aligned}$$

إن العلاقة السابقة تحتوي على $\cos(\varphi)$ و $\sin(\varphi)$ اللذين ينتهيان إلى الصفر من أجل حدود التكامل من 0 وحتى 2π ، لذلك:

$$\begin{aligned}
 J_z^- &= \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} e^{-\Sigma_t r} \left[\Phi_0 \right. \\
 &\quad \left. + r \cos(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_0 \right] \sin(\theta) \cos(\theta) dr d\theta d\varphi \quad (16)
 \end{aligned}$$

يمكن إيجاد الحد الأول على النحو الآتي:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{\Sigma_s}{4\pi} \Phi_0 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-\Sigma_t r} \sin(\theta) \cos(\theta) dr d\theta d\varphi \\
 &= \frac{\Sigma_s}{4\pi} \Phi_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{\Sigma_t} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \frac{\Sigma_s}{\Sigma_t} \Phi_0
 \end{aligned}$$

ومن أجل الحد الثاني:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{\Sigma_s}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_0 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r e^{-\Sigma_t r} \sin(\theta) \cos^2(\theta) dr d\theta d\varphi \\
 &= \frac{\Sigma_s}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{\Sigma_t^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \frac{\Sigma_s}{\Sigma_t^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_0
 \end{aligned}$$

وبالتالي تصبح العلاقة (16) بالشكل:

$$J_z^- = \frac{1}{4} \frac{\sum_s}{\sum_t} \Phi_0 + \frac{1}{6} \frac{\sum_s}{\sum_t^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_0 \quad (17)$$

بشكل مشابه، يمكن إيجاد:

$$J_z^+ = \frac{1}{4} \frac{\sum_s}{\sum_t} \Phi_0 - \frac{1}{6} \frac{\sum_s}{\sum_t^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_0 \quad (18)$$

بتعويض العلاقة (17) و (18) في (9) نجد:

$$\begin{aligned} J_x &= -\frac{1}{3} \frac{\sum_s}{\sum_t^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_0 \\ J_y &= -\frac{1}{3} \frac{\sum_s}{\sum_t^2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_0 \\ J_z &= -\frac{1}{3} \frac{\sum_s}{\sum_t^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_0 \end{aligned} \quad (19)$$

بالتعويض في المعادلة (8)، نحصل على العلاقة المعبرة عن كثافة التيار، وذلك بعد

الإسقاط على جملة محاور الأصل، حيث أن جملة المحاور اختيارية:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= -\frac{1}{3} \frac{\sum_s}{\sum_t^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{k} \right) \\ \vec{J} &= -\frac{1}{3} \frac{\sum_s}{\sum_t^2} \vec{\nabla} \Phi = -\frac{1}{3} \frac{\sum_s}{\sum_t^2} \overrightarrow{grad} \Phi \end{aligned} \quad (20)$$

نعرف معامل الانتشار:

$$D = \frac{\sum_s}{3 \sum_t^2} \quad (21)$$

لذلك يعطى قانون فيك للانتشار النيوتروني بالعلاقة:

$$\vec{J} = -D \nabla \Phi \quad (22)$$

وينص على أن متجهة كثافة التيار تتناسب مع تدرج التدفق السالب. لاحظ أن اتجاه متجه التدرج يشير إلى تدفق النيوترونات، الذي هو مقدار متدرج لتيار النيوترونات، وهو مقدار متجه (أي أن النيوترونات تنتقل من التراكيز العالية إلى التراكيز المنخفضة) [15].

5.3. قيود نظرية الانتشار

يعبر قانون فيك عن أنه إذا كان تدرج التدفق سالباً، فإن كثافة التيار تكون موجبة. هذا يعني أن الجسيمات سوف تنتشر من المنطقة ذات التدفق الأعلى إلى المنطقة ذات التدفق الأخفض خلال التصادمات في الوسط. كما إن قانون فيك يفرض بعض القيود لحل المسائل، بسبب الافتراضات الموضوعة، والتي تصبح غير صالحة، وتحتاج إلى تصحيح، وفقاً للشروط الآتية [15,16]:

a. قربها من الحدود

يفترض الاشتقاق السابق أن الوسط لانهائي. من أجل وسط محدود، يكون قانون فيك صحيحاً فقط في النقاط التي تبعد أكثر من بضع مسارات حرة عن حواف الوسط. وهذا محقق لأن تناقص الحد الأسّي يتم بسرعة كبيرة مع المسافة، وبالتالي فإن النقاط التي تبعد بضع مسارات حرة عن النقطة التي تم حساب التدفق فيها تساهم بشكل كبير في التكامل.

b. القرب من المصادر أو المصارف

يفترض أن تكون المساهمة في التدفق معظمها من تصادمات التششت. إلا إن المصادر يمكن أن تكون موجودة. بسبب عامل التوهين، إضافة لذلك، هناك عدد قليل من مصادر النيوترونات ستساهم في التدفق إذا كان هناك أكثر من بضع مسارات حرة من المصادر.

c. تباين خواص جملة التششت L

يظهر التشتت متماثل المناحي في الجملة المخبرية L من أجل الطاقات المنخفضة، ولكن ذلك ليس صحيحاً بشكل عام. لكن يبقى قانون فيك ساري المفعول مع تباين متوسط في التشتت، إذا تم تعديل معامل الانتشار، على أساس نظرية العبور الذي يعبر عنه بـ D ويعطى بالشكل:

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s(1 - \bar{\mu}) \left(1 - \frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma_t} + \dots\right)} \quad (23)$$

إذا كان $\Sigma_a \ll \Sigma_t$ ، ينتج عن العلاقة (23) أن:

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s(1 - \bar{\mu})} = \frac{1}{3\Sigma_{tr}} = \frac{\lambda_{tr}}{3} \quad (24)$$

حيث إن:

$$\Sigma_s(1 - \bar{\mu}) = \Sigma_{tr} = \frac{1}{\lambda_{tr}}$$

و λ_{tr} المسار الحر الوسطي للانتقال المعرف سابقاً.

d. الوسط عالي الامتصاص

تم نشر التدفق بسلسلة تايلور، حيث إنه يتغير ببطء في الأوساط ضعيفة الامتصاص. في حين أنه يتغير التدفق بسرعة في الوسط عالي الامتصاص. لذلك سيتم تطبيق قانون فيك في الجمل ضعيفة الامتصاص:

$$\Sigma_a \ll \Sigma_t$$

e. القرب من الواجهات

تم افتراض أن الوسط متجانس عند استخراج قانون فيك. عند الحد الفاصل بين وسطين مختلفين من حيث خصائص التشتت، ويبقى قانون فيك صالحاً، شريطة ألا يؤدي التغير الحاد إلى تغير سريع للتدفق، مما يجعل منشور سلسلة تايلور غير صالح في استخراج التدفق. في الحقيقة، إن المشتقات من المرتبة الثانية إما تنتهي إلى الصفر، أو تلغى مساهمتها في J_z . كما لا تسهم

المشتقات الثالثة في التكامل من أجل J_z . لذلك يكون قانون فيك صحيحاً إذا لم يتغير المشتق الثاني للتدفق بشكل ملحوظ.

f. تغيير التدفق مع الزمن

يفترض أن يكون التدفق مستقلاً عن الزمن. يمكن الاستغناء عن هذا الشرط إذا كان تغيير التدفق Φ صغيراً خلال زمن صغير من مرتبة مغادرة النيوترون لبضعة مسارات حرة. إذا كان للنيوترونات البطيئة في المفاعل سرعة $v \approx 10^5$ cm/sec، وقطعت أكثر من ثلاث مسارات حرة للتشتت، فإنه يمكن القول إن اختلاف الزمن من أجل التدفق يجب أن يحقق الشرط:

$$\frac{\Phi}{d\Phi/dt} \gg \frac{3\lambda_s}{10^5} [\text{sec}]$$

الذي ينص على أن الزمن اللازم للنيوترون لقطع ثلاث مسارات حرة أصغر بكثير من الزمن المميز لتغيير تدفق النيوترونات.

5.5. استخراج معادلة انتشار النيوترونات الحرارية

لاستخراج معادلة انتشار النيوترونات نستخدم الفرضيات الآتية:

1. نأخذ نيوترونات متماثلة الطاقة.
2. نصنف توزع النيوترونات في المفاعل باستخدام الكثافة النيوترونية $n(\vec{r}, t)$ التي هي عدد النيوترونات في وحدة الحجم عند الموضع $\vec{r}$ في اللحظة t . وتكون علاقتها بالتدفق هي:
$$\Phi(\vec{r}, t) = vn(\vec{r}, t)$$
بفرض أن الحجم V اختياري ويكتابة معادلة التوازن:
(المعدل الزمني لتغيير عدد النيوترونات في V) = (معدل إنتاج النيوترونات في V) - (معدل امتصاص النيوترونات في V) - (معدل تسرب النيوترونات الشبكي من السطح من أجل V)
يعبر عن الحد الأول رياضياً بالشكل:

$$\frac{d}{dt} \left[\int \frac{1}{v} \Phi(\vec{r}, t) dV \right] = \frac{d}{dt} \left[\int \frac{1}{v} n(\vec{r}, t) dV \right] = \frac{1}{v} \left[\int \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) dV \right]$$

يكتب معدل الإنتاج بالشكل: $\int S(\vec{r}, t) dV$

ويكتب حدّ الامتصاص بالشكل: $\int \Sigma_a(r) \Phi(\vec{r}, t) dV$

ويكتب حدّ التسرب بالشكل: $\int \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} ds = \int \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dV$

تم الاعتماد على نظرية غاوس (نظرية التقرق).

باستبدال الحدود المختلفة في معادلة التوازن نحصل على:

$$\int \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} dV = \int S(\vec{r}, t) dV - \int \Sigma_a(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, t) dV - \int \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dV$$

أو

$$\int \left(\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} - S + \Sigma_a \Phi + \nabla \cdot \vec{J} \right) dV = 0 \quad (25)$$

حيث إن الحجم V اختياري، ويمكن أن نكتب:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J} - \Sigma_a \Phi + S \quad (26)$$

باستخدام العلاقة بين $\vec{J}$ و Φ (قانون فيك) في كتابة معادلة الانتشار:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\vec{r}) \nabla \Phi(\vec{r}, t)] - \Sigma_a(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t) \quad (27)$$

هذه المعادلة هي الأساس الأكثر تطوراً في نظرية المفاعل المستخدمة لنظرية الانتشار [16].

5.6. معادلة هيلمهولتز

معادلة الانتشار (27) هي معادلة تفاضلية جزئية من نوع قطع مكافئ. إنها أيضاً، تصف

الظواهر الفيزيائية مثل توصيل الحرارة، انتشار الغاز، وانتشار المواد. تبسط هذه المعادلة في حالة

وسط متجانس حيث أن D و Σ_a لا تعتمد على الموضع على النحو الآتي:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} - D \nabla^2 \Phi(\vec{r}, t) + \sum_a (\vec{r}) \Phi(\vec{r}, t) = S(\vec{r}, t) \quad (28)$$

في حالة استقلالية التدفق عن الزمن، تُستخدم معادلة الحالة المستقرة للانتشار، أو معادلة هيلمهولتز Helmholtz المتدرجة:

$$D \cdot \nabla^2 \Phi - \sum_a \Phi + S = 0 \quad (29)$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية تمثل إهليجا.

يمكن كتابة معادلة هيلمهولتز بالشكل:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) - \frac{1}{L^2} \Phi(\vec{r}) = -\frac{S(\vec{r})}{D} \quad (30)$$

حيث:

$$L^2 = \frac{D}{\sum_a} \quad (31)$$

و L هو طول الانتشار ويعرف بأنه متوسط المسافة التي يجتازها النيوترون من نقطة انبعائه إلى النقطة التي يتم في نهاية المطاف امتصاصه.

من ناحية أخرى، تكون كثافة النيوترونات مستقلة عن الموضع والتدفق أيضاً، يمكن أن نكتب من العلاقة (28)؛ مع مراعاة $\text{div} \vec{J} = 0$:

$$\frac{1}{v} \frac{d\Phi(t)}{dt} = S(t) - \sum_a \Phi(t) \quad (32)$$

وهي معادلة التدفق التابعة للزمن [14-16].

5.7. الشروط الحدية لمعادلة انتشار الحالة المستقرة

رياضياً، في معادلة هيلمهولتز هناك حاجة إلى الشروط الحدية نظراً لأنه: لا يمكن تعيين كل من Φ أو المشتق الطبيعي $\partial \Phi / \partial n$ ، بشكل مستقل من أجل كل منها. لذلك، تُعتمد الشروط الحدية الآتية عند المناقشة الفيزيائية [15,16].

a. شروط حدية الفراغ

إن المسار الحر الوسطي للنيوترونات في الهواء أكبر بكثير مما هو عليه في المفاعل، إلا أنه من الممكن التعامل مع النيوترونات على أنها في الفراغ في حسابات المفاعل. إذا تم اعتبار أنه لا يوجد انعكاس للنيوترونات من الفراغ إلى قلب المفاعل **الشكل (3)**، فإن المعادلة (19) تكتب بالشكل:

$$J_z^- = \frac{1}{4} \frac{\sum_s}{\sum_t} \Phi_0 + \frac{1}{6} \frac{\sum_s}{\sum_t^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_0 = 0 \quad (33)$$

بالعودة إلى استخراج قانون فيك:

$$D = \frac{\sum_s}{3 \sum_t^2}$$

يمكن كتابة:

$$J^-(x) = \frac{1}{4} \frac{\sum_s}{\sum_t} \Phi_0 + \frac{D}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_0 = 0 \quad (34)$$

حيث:

$$\frac{1}{\Phi_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_0 = -\frac{1}{2D} \frac{\sum_s}{\sum_t} \quad (35)$$

إذا كانت المواد أكثر تشتتاً عند الحدود ($\sum_s \ll \sum_t$)، فإن $\sum_s / \sum_t \approx 1$ ، وبالإمكان أن استبدال من أجل:

$$D = \frac{\lambda_{tr}}{3} \quad (36)$$

$$\frac{1}{\Phi_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_0 \approx -\frac{1}{2D} \approx -\frac{3}{2} \frac{1}{\lambda_{tr}} \quad (37)$$

لكن من هندسة **الشكل (3)**، يمكن أن نكتب إذا تم استقراء نظرية الانتشار خطياً:

$$\frac{\Phi_0}{d} = \tan(\theta) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_0 \quad (38)$$

حيث d هو الطول بالاستقراء الهندسي⁴.

بمقارنة العلاقتين (37) و (38)، نحصل على:

$$\frac{1}{\Phi_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_0 \approx -\frac{3}{2} \frac{1}{\lambda_{tr}} = -\frac{1}{d}$$

حيث:

$$d \approx \frac{2}{3} \lambda_{tr} \quad (39)$$

إن التحليلات الأكثر تفصيلاً تعطي تعبيرات أكثر تعقيداً لـ d في الحالة الحدية المنحنية.

على سبيل المثال، من أجل الهندسة المستوية، تعطى بالشكل:

$$d = 0.7104 \lambda_{tr} \quad (40)$$

الشروط الحدية المنصوص عليها هي: (يزول التدفق عند مسافة مستقرة أبعد من حافة سطح

المفاعل)، أو:

$$\Phi(R + d) = 0 \quad (41)$$

حيث R نصف قطر المفاعل.

b. الشروط الحدية للواجهة

التدفق مستمر من خلال الحدود بين وسطين مختلفين A و B:

$$\Phi_A|_{\text{interface}} = \Phi_B|_{\text{interface}} \quad (42)$$

إن المكونات القياسية لكثافة التيار عند الحدود يجب أن تساوي:

$$J_{An}|_{\text{interface}} = J_{Bn}|_{\text{interface}} \quad (43)$$

⁴ الطول المقدر بالاستقراء وهو يستخدم لتقدير المسافة التي يمكن عندها تطبيق معادلات الانتشار بشكل دقيق، كما يُستخدم في تصميم المفاعلات النووية وتحليل سلوكها.

c. المتطلبات الفيزيائية للشروط الحدية

إن حل معادلة الانتشار يجب أن يكون حقيقياً، موجباً، وله قيمة واحدة:

$$\Phi \geq 0 \quad (44)$$

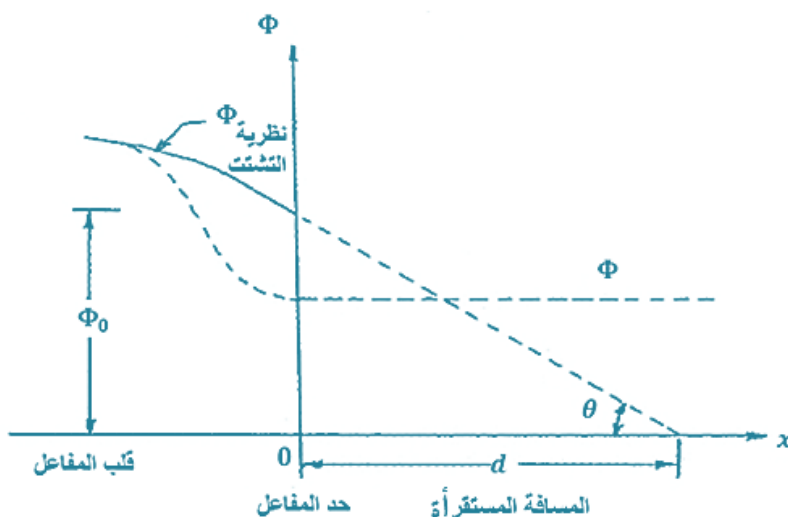
ويجب أن يكون حل معادلة الانتشار محدداً أيضاً في تلك المناطق التي تكون فيها المعادلة

غير متوقعة، ولكن ليس بالضرورة، في نقطة شاذة لتوزع المنبع:

$$\Phi < \infty \quad (45)$$

يمكن استخدام هذه الشروط للتخلص من التوابع غير الضرورية في الحلول. وهذا يمهد

الطريق لحسابات التدفق وقوة التوزيعات في تصميم مفاعل عملي.



الشكل (3): طول الاستقراء الهندسي (المسافة المستقرأة) في نظرية الانتشار.

6. الدراسة التحليلية

في الحقيقة لقد جرى استنتاج العلاقة التي تعطي تدفق حزمة النيوترونات التي تخرج بصورة

مباشرة من العينة من أجل عينة صغيرة الحجم (السماكة) [17]، مما يجعل احتمال تفكك

النيوترون في أثناء مروره خلال العينة مهماً، ومما يجعل احتمال تشتت النيوترون في أثناء عبوره للعينة مهماً أيضاً. وبالتالي فإن تدفق الحزمة التي تخرج بصورة مباشرة من العينة يتعلق إلى حد كبير جداً فقط باحتمال أن يتفاعل النيوترون تفاعل أسر (امتصاص) في أثناء مروره في العينة. وبناء على ذلك، فقد وجد أن احتمال أن لا يتفاعل نيوترون حر تفاعل أسر في أثناء عبوره لعينة سماكتها x بصورة مباشرة يعطى بالعلاقة:

$$P_{r'}(x) = e^{-n\sigma_c x} \quad (46)$$

حيث n هو تركيز النوى في العينة، و σ_c هو المقطع العرضي الفعال للأسر⁵ أو (الامتصاص).

لكن في الحقيقة من أجل عينة كبيرة حيث لا يجوز إهمال تأثير احتمال أن لا يتفكك النيوترون الحر في أثناء اجتيازه لعينة سماكتها x على تدفق الحزمة العابرة بصورة مباشرة، على الأقل من أجل نيوترونات ليست حرارية. ففي بحث سابق [18,19] تم إيجاد أن احتمال التفكك يعطى بالعلاقة:

$$P_{d'}(x) = e^{-\frac{\lambda}{v}x} = e^{-\lambda t} \quad (47)$$

حيث λ هو احتمال أن يتفكك نيوترون خلال وحدة الزمن. والزمن $t = x/v$ هو الزمن اللازم للنيوترون لكي يجتاز عينة سماكتها x (بمسار مستقيم)، و v هي سرعة النيوترون في العينة.

إن احتمال عدم تشتت النيوترون في عينة سماكتها x [20,21]:

$$P_{s'}(x) = e^{-n\sigma_s x} \quad (48)$$

حيث n هو تركيز النوى في العينة، و σ_s هو المقطع العرضي الفعال للتشتت.

⁵ وهنا يفترض ضمناً بأن أسر النيوترون يقود إلى امتصاص فقط للنيوترون من غير أن يؤدي ذلك إلى حدوث انشطار النواة الأسرة.

بناء على ما سبق يكون احتمال خروج النيوترون بصورة مباشرة من العينة بعد اجتيازه مسافة قدرها x هو احتمال مركب من ثلاث احتمالات: هي احتمال أن لا يتفاعل النيوترون تفاعل أسر مضروب باحتمال أن لا يتفكك النيوترون مضروب باحتمال أن لا يتشتت النيوترون؛ أي:

$$P_{r,d,t,s}(x) = e^{-(n\sigma_c + \frac{\lambda}{v} + n\sigma_s)x}$$

وبالتالي فإن تدفق الحزمة العابرة بصورة مباشرة من أجل عينة كبيرة سيكون:

$$\Phi(x) = \Phi(0)e^{-(n\sigma_c + \frac{\lambda}{v} + n\sigma_s)x} \quad (49)$$

حيث $\Phi(x)$ هو تدفق حزمة النيوترونات العابرة بصورة مباشرة من عينة كبيرة سماكتها x .

7. الدراسة التطبيقية

سنقوم بتعيين معامل الانتشار ومن ثم طول الانتشار وطول الاستقراء الهندسي (المسافة المستقراة) من خلال تعيين المقطع العرضي للتشتت. من أجل عينة سماكتها $x = 1 \text{ m}$ ، تحتوي على نظير الحديد Fe^{56} ، بالتحليل بالتشيط النيوتروني للعينات الكبيرة غالباً ما تستخدم فيه عينات أسطوانية ذات سماكة (ارتفاع) حوالي $x = 1 \text{ m}$ [22]. حيث قمنا بحساب المقطع العرضي للتشتت من العلاقة (49)، من أجل الطاقة الحرارية $E_n = 0.025 \text{ eV}$ ، والتي توافق مقطعاً عرضياً للأسر $\sigma_c = 2.56 \times 10^{-28} \text{ m}^2$ [23]. وعند تعريض العينة لتدفق نيوتروني حراري قدره $\Phi(0) = 2 \times 10^{11} \frac{\text{neut}}{\text{sec.m}^2}$ [24]، فإن التدفق ينخفض إلى $\Phi(1 \text{ m}) = 6.64 \times 10^{-37} \frac{\text{neut}}{\text{sec.m}^2}$ [20]، بعد اجتياز عينة ذات سماكة قدرها $x = 1 \text{ m}$. ومن أجل تركيز للنظير Fe^{56} قدره $n = 7.77 \times 10^{28} \frac{\text{nuclei}}{\text{m}^3}$.

بالتعويض في العلاقة (49) نجد:

$$6.64 \times 10^{-37} = 2 \times 10^{11} e^{-(7.77 \times 10^{28} \times 2.56 \times 10^{-28} + 7.77 \times 10^{28} \sigma_s)} 1$$

$$\Rightarrow \sigma_s = 11.51 \times 10^{-28} \text{ m}^2$$

ويمكن حساب معامل الانتشار من العلاقة (24):

$$D = \frac{1}{3 \times 7.77 \times 10^{28} \times 11.51 \times 10^{-28} \times \left(1 - \frac{2}{3 \times 56}\right)}$$
$$= 3.46 \text{ mm}$$

ويمكن حساب طول الانتشار من العلاقة (31):

$$L^2 = \frac{3.46 \times 10^{-3}}{7.77 \times 10^{28} \times 2.56 \times 10^{-28}} = 176.89 \times 10^{-6} \Rightarrow L = 13.3 \text{ mm}$$

بمقارنة القيمة السابقة مع القيمة الموجودة في المرجع $L = 12.7 \pm 1.3 \text{ mm}$ [25] نجد

هناك تطابق كبير في النتائج.

إن التطبيق الأكثر أهمية هو استخدام طول الانتشار في تقييم أداء المفاعلات النووية، مثل تحديد كفاءة الطاقة المنتجة والمخاطر الممكنة. كما يستخدم طول انتشار النيوترونات الحرارية لتحديد تصميم الوقود النووي، مثل حجم الحبيبات والتركيب الكيميائي.

حسبنا الطول d من العلاقة (39):

$$d \approx \frac{2}{3} \lambda_{tr} \approx 2D = 2 \times 3.46 = 6.92 \text{ mm}$$

وهو أداة مهمة جداً في تصميم أبعاد الخرسانة النووية، حيث يتم أخذه بعين الاعتبار في بناء المفاعلات النووية والمرافق النووية الأخرى.

8. الاستنتاجات

1. أوجدنا طريقة جديدة لحساب معامل انتشار النيوترونات ومن ثم حساب طول الانتشار لها من خلال تعيين المقطع العرضي للتشتت.
2. قمنا بتعيين المقطع العرضي للتشتت من أجل نظير Fe^{56} من أجل النيوترونات الحرارية.

3. إن تعيين المقطع العرضي للتشتت يمكننا من حساب معامل الانتشار ومن ثم طول الانتشار الموافق للنظير المدروس.

4. تتيح لنا الدراسة السابقة استخدامها في تطبيقات مهمة وكثيرة، حيث يساهم انتشار النيوترونات الحرارية في تحليل السلامة النووية، وزيادة كفاءة المفاعل النووي وتقليل التكاليف. وهذه أداة قيمة لإحدى أهم الدراسات التي يمكن إجراؤها على تطور الوقود النووي للمفاعل في أثناء التشغيل.

9. التوصيات

نوصي بإجراء دراسة تطبيقية لحساب طول انتشار النيوترونات للمواد المستخدمة في المفاعلات النووية كالألومنيوم والزركونيوم والكادميوم من أجل طاقات مختلفة.

10. المراجع العربية

- [19] د. عبدالله رستناوي، د. سليمان ديبو، علي الدود، دراسة تحليلية لتأثير تفكك النيوترونات على تدفق حزمة نيوترونية عابرة لعينة ذات سماكة كبيرة، مجلة جامعة حمص، المجلد 39، سوريا، 2017.
- [20] د. عبدالله رستناوي، د. سليمان ديبو، علي الدود، دراسة تحليلية لاحتمال تشتت نيوترون على نواة من أجل تعيين طول التشتت لها، مجلة جامعة حمص، المجلد 41، سوريا، 2019.
- [24] د. عبدالله رستناوي، د. جمال العرجة، استخدام مطياف أشعة غاما للنشاطات المنخفضة لتعيين تدفق منبع نيوتروني نظائري، مجلة جامعة حمص للعلوم الأساسية، المجلد 29، العدد 5، 1428هـ، 2007م.

11. Reference

- [1] Enrico Fermi, The Chicago Pile, Physical Review Journal, vol. 45, 1944.
- [2] J. M. Harrington, The Shippingport Atomic Power Station, Transactions of the American Nuclear Society Journal, vol. 1, 1958.
- [3] J. F. Kelly, Materials for Nuclear Power Plants, Nuclear Engineering and Design Journal, vol. 63, 1981
- [4] J. Smith, actors A Comprehensive Overview Nuclear Re, Wile 2019.
- [5] K. Radiation Protection in Nuclear Power Plants ,Johnson, CRC Press, 2020.
- [6] Lee, S. Nuclear Fuel Cycles, A Review of the Current Status. Springer, 2018.
- [7] J. Kim, Nuclear Reactor Design, Current Status. A Review of the Elsevier, 2017.

- [8] C. Williams, Neutron Interactions with Matter, Cambridge University Press, 2016.
- [9] Y. Chen, Radiation Effects on Materials, Taylor & Francis , 2015.
- [10] R. Pressure Engineering-Patel, High, atus. A Review of the Current St ASME, 2014.
- [11] IAEA, Nuclear Safety, A Review of the Current Status, International Atomic Energy Agency, 2019.
- [12] OECD, Nuclear Energy, A Review of the Current Status. Organisation operation and Development-for Economic Co, 2020.
- [13] NEA, ear Energy and the EnvironmentNucl , A Review of the Current Status, Nuclear Energy Agency , 2018.
- [14] M. Ragheb, "Lecture Notes on Fission Reactors Design Theory," FSL-33, University of Illinois, 1982.
- [15] J. R. Lamarsh, "Introduction to Nuclear Engineering," Addison-Wesley Publishing Company, 1983.
- [16] M. Ragheb, NEUTRON DIFFUSION THEORY, University of Illinois, 2014.
- [17] Л. Митрани, Атомна Физика, държавно издателство наука и изкуство, София 1957.
- [18] Abdullah Rastanawi, Soleiman Dibo, Ali Al-Doud, An Applied Study of the Effect of Decay of Fast Neutron in Concrete, Chemistry and material Journal, vol.9 No 10, 2017, USA.
- [21] Abdullah Rastanawi, Soleiman Dibo, Ali Al-Doud, AN APPLIED STUDY OF THE EFFECT OF SCATTERING OF THERMAL

NEUTRON THROUGH A SAMPLE CONATION'S ARSENIC
ELEMENT, Ally-Since.ru Journal, vol. 45, Russia, 2020.

- [22] Hendrik Willem BAAS, Neutron Activation Analysis of Inhomogeneous Large Samples, op maandag 11 oktober 2004 om 13:00 uur.
- [23] Harl'O M. Fisher, A Nuclear Cross Section Data Handbook, Los Alamos, New Mexic, Jan 1991.
- [25] Mirza, Nasir & Mirza, Sikander & Gasmelbari, A. & Bhuiyan, M., A METHOD TO DETERMINE DIFFUSION COEFFICIENT AND DIFFUSION LENGTH. FOR THERMAL NEUTRONS FROM ALBEDO MEASUREMENTS. Nuclear Science Journal, 1994. 31. 101-110.

استخدام مبدأ غاوس لحساب التكاملات المضاعفة اللانهاية

بإشراف : أ.د. حامد عباس

إعداد الباحثة : ورود محمد ابراهيم

ملخص البحث:

يهتم هذا البحث بدراسة التكاملات المضاعفة اللانهاية للدوال اعتمادا على مبدأ غاوس، والذي يعتمد على جذور كثيرات الحدود المتعامدة لهرميت في الفضاء R^n ، ودالة الوزن $\omega(x) = e^{-r^2}$ ؛ حيث $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ أوجدنا كثيرات الحدود المتعامدة من نوع هرميت في الفضاء R^n :

$$H_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x) = (-1)^\alpha e^{r^2} \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^{\alpha_i}}{dx^{\alpha_i}} e^{-x_i^2} \right), \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i, r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

ثم أوجدنا جذورها وعددها N ، وفرضنا بأن هذه الجذور هي النقاط التكاملية للعلاقات التكعيبية، والتي من خلالها حسبنا القيم التقريبية للتكاملات المضاعفة اللانهاية، وأوجدنا المبرهنات اللازمة مع الاثبات، التي أعطتنا ثوابت العلاقات التقريبية التكاملية التالية:

$$C_j = 2^{\alpha+n} \beta \pi^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\partial^n H_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(x^j)}{\prod_{i=1}^n \partial x_i} \right)^{-2}; \beta = \prod_{i=1}^n (\alpha_i!), j = 1, 2, \dots, N$$

التي كانت تحسب من خلال حل جمل من المعادلات غير الخطية، حيث إن لكل منطقة تكاملية ثوابت خاصة بها .

الكلمات المفتاحية: العلاقات التكعيبية، دوال هرميت المتعامدة، التكاملات المضاعفة اللانهائية التقريبية.

Using Gauss's principle To Calculate Infinite Iterated Integrals

Abstract

This research is concerned with the study Of infinite iterated integrals of functions based on Gauss's principle, which is based on the roots of orthogonal Hermite polynomials in space R^n , the weight function $\omega(x) = e^{-r^2}$; $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, we found the orthogonal Hermite polynomials in space R^n :

$$H_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x) = (-1)^\alpha e^{r^2} \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^{\alpha_i}}{dx^{\alpha_i}} e^{-x_i^2} \right), \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i, r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

then we found its roots and their number is N , and assumed that they are the integration points of the cubic relations, through which we calculated the approximate values of the infinite repeated integrals, and we found the necessary theorems with proof, which gave us the constants of the following approximate integration relations:

$$C_j = 2^{\alpha+n} \beta \pi^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\partial^n H_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(x^j)}{\prod_{i=1}^n \partial x_i} \right)^{-2}; \quad \beta = \prod_{i=1}^n (\alpha_i!), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

which were calculated by solving sets of nonlinear equations, where each integral region has its own constants.

keywords: Cubic relations, orthogonal Hermite functions, approximate infinite iterated integrals.

1- مقدمة البحث:

تعريف: [2,5]

نقول عن الدالتين $f(x), g(x)$ الحقيقيتين المعرفتين والقابلتين للمكاملة على المنطقة Ω أنهما متعامدتان على تلك المنطقة إذا كان:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{\Omega} \omega(x) f(x) g(x) dx = 0 \quad (1)$$

بدالة وزن $\omega(x)$.

تم حساب التكاملات التقريبية الاحادية للدوال بطرائق متعددة أخرى [3,6]، حيث استخدم غاوس الطرائق التقريبية لحساب التكاملات على المجال $[-1, +1]$ واعتبر كثيرات حدود ليجنر بدالة وزن $\omega(x)$ ، حيث إن علاقة غاوس التربيعية من الصيغة الآتية [4,7]:

$$\int_{-1}^{+1} \omega(x) f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) \quad (2)$$

سُميت النقاط x_i عقد العلاقة التربيعية، أو نقاط استكمال العلاقة التربيعية، وأحيانا تدعى نقاط ارتكاز العلاقة التربيعية، و C_i هي الثوابت الموافقة لتلك النقاط x_i ، و $\omega(x)$ دالة الوزن. يتم تحديد الثوابت C_i $i = 1, 2, \dots, n$ ، حيث تتحول العلاقة (2) الى مساواة مضبوطة (صحيحة تماما) من أجل كل كثيرة حدود جبرية درجتها لا تتجاوز $2n-1$ ، أي من أجل: $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}$ حيث إن المجال التكاملي هو $[-1, +1]$ ولدينا $2n$ من المجاهيل هي: C_i, X_i ; $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

1-1- استخدام كثيرات حدود ليجنر في التكاملات الأحادية:

يعتمد مبدأ غاوس في التكامل التقريبي على أن النقاط x_i هي جذور كثيرات حدود ليجنر $p_n(x)$ ، والتي تعرف بالصيغة الآتية [4,8]:

$$p_n(x) = \frac{1}{n! \cdot 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3)$$

يمكن حساب الثوابت C_i بطريقة الأمثال غير المعينة، على اعتبار أن العلاقة (2) صحيحة تماما من أجل كل كثيرة حدود درجتها لا تتجاوز $2n-1$ ، فينتج لدينا جملة من المعادلات غير الخطية، بحلها نحصل على الثوابت المطلوبة، ولكن جملة المعادلات (غير الخطية) الناتجة قد تكون أحيانا معقدة وصعبة الحل من أجل ذلك تم اثبات المبرهنة التالية:

مبرهنة 1: [9] بفرض أن $P_n(x)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $[-1, +1]$ ، وكانت x_i ; $i = 1, 2, 3, \dots, n$ هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $P_n(x) = 0$ ، فعند ذلك ثابِت العلاقة التربيعية (2) تكتب بالصيغة الآتية:

$$C_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[p'_n(x_i)]^2} \quad (4)$$

ملاحظة: كما هو واضح من خلال العلاقة (4) أن الثوابت C_i مرتبطة فقط بكثيرات حدود ليجندر ، ولا علاقة لها بالدالة المكاملة $f(x)$ ، وتم الوصول الى الحالة العامة لطريقة غاوس التربيعية ، أي عندما يكون المجال اختياري من الشكل $[a, b]$ ودالة وزن $\omega(x) = 1$ ، وفي هذه الحالة اصبح

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{بالإمكان حساب التكاملات التقريبية ضمن الشكل التالي:}$$

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u \quad \text{حيث تم اجراء التحويل الاتي :}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u\right) du \quad \text{وتم الحصول على :}$$

استناداً إلى العلاقة (2) ، نجد:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) \quad (5)$$

حيث إن: $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u_i$ و u_i هي جذور كثيرات حدود ليجندر الموافقة ل n .

2-1 استخدام كثيرات حدود هرميت:

تعريف:

نرمز لكثيرات حدود هرميت من الدرجة n بمتحول واحد بالرمز $H_n(x)$ وهي كثيرات حدود متعامدة على المجال $(-\infty, +\infty)$ ودالة وزن $\omega(x) = e^{-x^2}$ ، وتعطى وفق صيغة رودريغ الآتية:

[1,2]

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (6)$$

تم اعتبار x_j هي جذور كثيرات حدود هرميت وبناءً على ذلك تم التوصل الى العلاقة التقريبية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx \cong \sum_{j=1}^N C_j f(x_j) \quad (7)$$

حيث الثابت هي: [9]

$$C_j = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_j)]^2}, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (8)$$

2- هدف البحث وطريقته:

يهدف هذا البحث الى:

- حساب التكاملات المضاعفة اللانهائية بشكل تقريبي اعتماداً على مبدأ غاوس، باستخدام جذور كثيرات الحدود المتعامدة لهرميت في المنطقة R^n ودالة الوزن $\omega(x) = e^{-r^2}$; $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ ، خلال ايجاد كثيرات الحدود المتعامدة من نوع هرميت في فضاءات متعددة الأبعاد وحساب جذورها، والتي نعتبرها النقاط التكاملية للعلاقات التكعيبية.
- التوصل الى الصيغ التي تعطينا ثوابت العلاقات التقريبية التكاملية، بالاعتماد على مجموعة من المبرهنات والتي تم ايجادها مع الاثبات.

3- مشكلة البحث:

- ايجاد كثيرات الحدود المتعامدة من نمط هرميت في فضاءات متعددة الأبعاد.
- حساب جذور كثيرات الحدود المذكورة واعتبارها نقاط العلاقة التكعيبية.
- التوصل الى مبرهنات تعطينا ثوابت العلاقات التقريبية التكاملية واثباتها.

4- النتائج ومناقشتها:

4-1- مفاهيم أساسية [4] :

العلاقة التقريبية لحساب التكاملات المضاعفة تسمى العلاقة التكعيبية (والتي تعطى بالصيغة الآتية):

$$\int_{\Omega} \omega(x) f(x) dx \cong \sum_{j=1}^N C_j f(x^j) \quad (9)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), dx = dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n$$

حيث أن Ω منطقة في الفضاء R^n ، و $\omega(x)$ دالة الوزن و $f(x)$ الدالة المكاملة وإشارة التكامل على المنطقة Ω تعني التكامل المضاعف n مرة من الفضاء R^n على المنطقة Ω ، و C_j الثوابت الموافقة للنقاط x^j التي هي جذور كثيرات الحدود المتعامدة في المنطقة Ω و N عدد هذه الجذور، العلاقة السابقة صحيحة من أجل كل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2n-1$.

2-4- حساب التكاملات باستخدام جذور كثيرات الحدود هرميت المتعامدة بمتحولين على الفضاء R^2 .

تُعطى كثيرات حدود هرميت المتعامدة بمتحولين على الفضاء R^2 بالصيغة الآتية : [3]

$$H_{nm} = (-1)^{n+m} e^{x^2+y^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \frac{d^m}{dy^m} (e^{-y^2}) = H_n(x) \cdot H_m(y) \quad (10)$$

$$\omega(x, y) = e^{-x^2-y^2} \text{ حيث أن دالة الوزن}$$

نقوم بإيجاد جذور كثيرات الحدود هذه على اعتبار أن جذور كثيرات الحدود هذه بمتحول واحد معلومة بدلالة x وعلى أساسها نحسب y ، ثم نحدد النقاط التكاملية (x, y) ، ونوجد الثوابت الموافقة بالاعتماد على المبرهنة التالية:

مبرهنة 2 : بفرض أن $H_{n,m}(x, y)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق الجزئي على المنطقة $[-\infty, +\infty]^2$ ، وكانت (x_j, y_j) هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $H_{n,m}(x, y) = 0$ ، تُكتب ثوابت العلاقة التكعيبية (9) تكتب بالصيغة الآتية:

$$C_{ij} = \frac{2^{m+n+2} m! n! \pi}{\left[\frac{\partial^2 H_{nm}(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} \right]^2} \quad (11)$$

الاثبات: العلاقة (9) في هذه الحالة تصبح على الشكل الآتي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} f(x, y) dx dy \cong \sum_{i=1, j=1}^{m, n} C_{ij} f(x_i, y_j) \quad (12)$$

ننطلق من التكامل الايسر من التكامل واستناداً إلى العلاقة (7):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} f(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x, y) dx \right] dy \cong \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \left[\sum_{i=1}^n C_i f(x_i, y) \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_i)]^2} f(x_i, y) \right] dy = \sum_{i=1}^n \left[\frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_i)]^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f(x_i, y) dy \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_i)]^2} \left[\sum_{j=1}^m \frac{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}{[H'_m(y_j)]^2} f(x_i, y_j) \right] \right] \\ &= \sum_{i=1, j=1}^{n, m} \frac{2^{m+n+2} m! n! \pi}{\left[\frac{\partial^2 H_{nm}(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} \right]^2} f(x_i, y_j) \\ C_{ij} &= \frac{2^{m+n+2} m! n! \pi}{\left[\frac{\partial^2 H_{nm}(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} \right]^2} \end{aligned}$$

منه (ومنه) نستنتج أن :

ملاحظة: كما هو واضح أن الثوابت $C_{ij}; i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$ مرتبطة فقط بكميات حدود هرميت ولا علاقة لها بالدالة $f(x, y)$.

مثال 1: استخدم العلاقة التكميلية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية لتكامل الدالة $f(x, y) = 1$ على الفضاء R^2 معتبراً $n = m = 1$.
الحل: استناداً إلى العلاقة (12)، نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy \cong C_{11} f(x_1, y_1)$$

وباعتبار أن $n = m = 1$ نستخدم كثيرة حدود هرميت H_{11} ، نجد:

$$H_{11}(x, y) = 4xy$$

و جذر كثيرة الحدود السابقة هو:

$$(x_1, y_1) = (0, 0)$$

نحسب قيم الدالة المفروضة عند النقاط، فنجد: $f(0, 0) = 1$

و بالاعتماد على العلاقة (11) فإن الثابت المقابل لنقطة العلاقة التكميلية هو:

$$C_{11} = \pi$$

و أخيرا فإن قيمة التكامل تساوي:

$$I = 1(\pi) = \pi$$

و القيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi$$

العلاقة صحيحة تماما من أجل كل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2(m+n)-1=3$ وفي تمريننا هذا هي كثيرة حدود من الدرجة الصفرية مما يؤكد صحة كلامنا.

3-4- حساب التكاملات الثلاثية باستخدام جذور كثيرات حدود هرميت المتعامدة بثلاث متحولات على الفضاء R^3 .

اعتمادا على العلاقتين (6) و (10) يمكننا كتابة كثيرات الحدود المتعامدة لهرميت بثلاث متحولات على الفضاء R^3 بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} H_{nmL} &= (-1)^{n+m+L} e^{x^2+y^2+z^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \frac{d^m}{dy^m} (e^{-y^2}) \frac{d^L}{dz^L} (e^{-z^2}) \\ &= H_n(x) \cdot H_m(y) \cdot H_L(z) \end{aligned} \quad (13)$$

نوجد جذور كثيرات الحدود هذه واعتبارها هي النقاط التكاملية (x_i, y_j, z_k) ، ونوجد الثوابت الموافقة.

مبرهنة 3: بفرض أن $H_{n,m,L}(x, y, z)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق الجزئي على الفضاء R^3 ، وكانت (x_j, y_j, z_j) هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $H_{n,m,L}(x, y, z) = 0$ ، فعند ذلك ثابته العلاقة التكعيبية (9) تكتب بالشكل التالي:

$$C_{ijk} = \frac{2^{m+n+L+3} m! n! L! \pi^{\frac{3}{2}}}{\left[\frac{\partial^3 H_{nmL}(x_i, y_j, z_k)}{\partial x \partial y \partial z} \right]^2} \quad (14)$$

الاثبات: العلاقة (9) في هذه الحالة تُكتب بالصيغة الآتية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2-z^2} f(x, y, z) dx dy dz \cong \sum_{i=1, j=1, k=1}^{m, n, L} C_{ijk} f(x_i, y_j, z_k) \quad (15)$$

ننطلق من التكامل الايسر من التكامل واستناداً إلى العلاقتين (12) و (7)، نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2-z^2} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

$$\cong \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \left[\sum_{i=1, j=1}^{n, m} \frac{2^{m+n+2} m! n! \pi}{\left[\frac{\partial^2 H_{nm}(x_i, y_j, z)}{\partial x \partial y} \right]^2} f(x_i, y_j, z) \right] dz =$$

$$\sum_{i=1, j=1}^{n, m} \left[\frac{2^{m+n+2} m! n! \pi}{\left[\frac{\partial^2 H_{nm}(x_i, y_j, z)}{\partial x \partial y} \right]^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} f(x_i, y_j, z) dz \right]$$

$$= \sum_{i=1, j=1}^{n, m} \left[\frac{2^{m+n+2} m! n! \pi}{\left[\frac{\partial^2 H_{nm}(x_i, y_j, z)}{\partial x \partial y} \right]^2} \sum_{k=1}^L \frac{2^{k+1} k! \sqrt{\pi}}{[H'_L(z_k)]^2} f(x_i, y_j, z_k) \right]$$

$$= \sum_{i, j, k=1}^{n, m, L} \frac{2^{m+n+L+3} m! n! L! \pi^{\frac{3}{2}}}{\left[\frac{\partial^3 H_{nmL}(x_i, y_j, z_k)}{\partial x \partial y \partial z} \right]^2} f(x_i, y_j, z_k)$$

$$C_{ijk} = \frac{2^{m+n+L+3} m! n! L! \pi^{\frac{3}{2}}}{\left[\frac{\partial^3 H_{nmL}(x_i, y_j, z_k)}{\partial x \partial y \partial z} \right]^2} \quad \text{ومنه نستنتج أن :}$$

ملاحظة: كما هو واضح أن الثوابت $C_{ijk}; i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, L$

مرتبطة فقط بكثيرات حدود هرميت ولا علاقة لها بالدالة $f(x, y, z)$.

مثال 2: استخدم العلاقة التكميلية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية لتكامل الدالة $f(x, y, z) = 1$ على الفضاء R^3 معتبرا $n = m = k = 1$.
الحل: استناداً إلى العلاقة التكميلية (15):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 e^{-x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz \cong C_{111} f(x_1, y_1, z_1)$$

نجد:

وباعتبار أن $n = m = k = 1$ نستخدم كثيرة حدود هرميت H_{111} أي:

$$H_{111}(x, y, z) = 8xyz$$

و جذر كثيرة الحدود السابقة هو:

$$(x_1, y_1, z) = (0, 0, 0)$$

نحسب قيم الدالة المفروضة عند النقاط، فنجد: $f(0, 0, 0) = 1$

و بالاعتماد على العلاقة (14) يكون الثابت المقابل لنقطة العلاقة التكميلية هو:

$$C_{111} = \pi\sqrt{\pi}$$

و أخيرا فإن قيمة التكامل تساوي:

$$I = 1(\pi\sqrt{\pi}) = \pi\sqrt{\pi}$$

و القيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 e^{-x^2 - y^2 - z^2} f(x, y, z) dx dy dz \cong (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi}) = \pi\sqrt{\pi}$$

العلاقة صحيحة تماما من أجل كل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2(m + n + k) - 1 = 5$ و

$f(x, y, z)$ وفي تمريننا هذا هو تابع ثابت مما يؤكد صحة كلامنا.

4-4- حساب التكاملات المضاعفة في الحالة العامة على الفضاء R^n .

اعتمادا على العلاقات (6) و (10) و (13) يمكننا كتابة كثيرات الحدود المتعامدة من نوع هرميت ب n من المتحولات على الفضاء R^n . بالشكل التالي :

$$H_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x) = (-1)^{\alpha} e^{r^2} \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^{\alpha_i}}{dx^{\alpha_i}} e^{-x_i^2} \right) , \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i , r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad (16)$$

وتصبح العلاقة التكميلية في هذه الحالة:

$$\int_{\Omega} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} C_{i_1 i_2 \dots i_n} f(x^i) ; x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (17)$$

$$; dx = dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n , \Omega = R^n$$

بإيجاد جذور كثيرات الحدود هذه واعتبارها هي النقاط التكميلية $x^i = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \dots, x_n^{i_n})$ ، ونوجد الثوابت الموافقة.

مبرهنة 4: بفرض أن $H_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(x)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق الجزئي على الفضاء R^n ، وكانت $i = 1, 2, \dots, N$ هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $H_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(x) = 0$ ، فعند ذلك ثابنت العلاقة التكميلية (17) تكتب بالصيغة الآتية:

$$C_i = \frac{2^{\alpha+n} \beta \pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{\partial^n H_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(x^i)}{\prod_{i=1}^n \partial x_i} \right)^2} ; \left| \begin{array}{l} \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i , \beta = \prod_{i=1}^n (\alpha_i !) \end{array} \right. \quad (18)$$

$; i = 1, 2, \dots, N$

حيث أن N هو عدد جذور كثيرات حدود هرميت.

الاثبات: بنفس طريقة اثبات المبرهنات السابقة.

ملاحظة: كما هو واضح أن الثوابت C_i مرتبطة فقط بكثيرات حدود هرميت ولا علاقة لها بالدالة $f(x)$.

مثال 3: استخدم العلاقة التكميلية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية لتكامل الدالة

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \text{ على الفضاء } R^4 \text{ معتبرا } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1.$$

الحل: استناداً إلى العلاقة التكميلية (17):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 1e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \cong C_{1111} f(x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1)$$

نجد:

وباعتبار أن $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$ فإننا نستخدم كثيرة حدود هرميت H_{1111} أي:

$$H_{1111}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 16x_1 x_2 x_3 x_4$$

و جذر كثيرة الحدود السابقة هو:

$$(x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1) = (0, 0, 0, 0)$$

نحسب قيم الدالة المفروضة عند النقاط، فنجد: $f(0, 0, 0, 0) = 1$

و بالاعتماد على العلاقة (18) يكون الثابت المقابل لنقطة العلاقة التكميلية هو:

$$C_{1111} = \pi^2$$

و أخيراً فإن قيمة التكامل تساوي:

$$I = 1(\pi^2) = \pi^2$$

و القيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 1e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \cong (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi}) = \pi^2$$

نلاحظ أن العلاقة صحيحة تماماً.

الاقتراحات والتوصيات:

1- تشكيل علاقات تقريبية للدوال المثلثية باستخدام الدوال العقدية.

2- العلاقات التقريبية للتكاملات المضاعفة بمتحولات عقدية.

3- البحث عن مناطق تكاملية أخرى للدوال مثل المناطق الكروية و الناقصية.

المراجع المستخدمة:

المراجع العربية:

[1]-د. حامد عباس، التحليل العددي 2، جامعة حمص، مديرية الكتب والمطبوعات، 2018.

[2]-د. إبراهيم ابراهيم، الدوال الخاصة، جامعة حمص، 2018.

المراجع الاجنبية:

[3]. Richard L. Burden, J. Douglas Fairs Numerical Analysis ,
9th _edition,2005.

[4]. Mysovskikh.I.P. Interpolation cubature formulas Nowak . 1981
Mowscou.336.p.

[5].cege.g.1962 orthogonal polynomials Mowscou.500.p.

[6].Krilov . _approximation Numerical for integration. Nawka
Mowscou.500p-1967

[7].Orive, R., santos, C.J., & Spalevic, M. M.,(2020). Cubature formulae
for the Gaussian weight some old and new rules . Electronic Transitions
on Numerical Analysis, 5(2020), 426-438.

[8].Kolmogorof A.N, (1989) principles of function theory and functional
analysis, Moscow.

[9]. Mysovskikh.I.P , (2000) Lectures in Numerical Analysis ,sant
peterpurg unver.

تأثير المستخلص المائي لأوراق نبات الجوز *Juglans regia* L في منع وضع البيض عند إناث حافرة أوراق البندورة *Tuta absoluta* (Meyrick, 1917) (Lepidoptera: Gelechiidae)

الدكتورة مرام ناطور

كلية العلوم

جامعة حلب

الملخص

تم دراسة هذا البحث في البيت الزجاجي التابع لكلية العلوم-جامعة حلب، في الفترة الزمنية من بداية شهر نيسان إلى نهاية شهر تشرين الأول لعام 2022.

تم جمع حشرة حافرة أوراق البندورة *Tuta absoluta* من أحد البساتين في منطقة النيرب شرق مدينة حلب، وتم تربيتها ضمن أقفاص خاصة بتربية الحشرات قياسها (60 × 60 × 60) سم حاوية على أصص لشتلات البندورة والتعرف على الأطوار المختلفة التي تمر بها، ومن ثم تم تحضير المستخلص المائي لأوراق نبات الجوز بتركيزه المختلفة.

أظهرت النتائج أن التركيز 10% لمستخلص أوراق نبات الجوز *J. regia* تأثيراً مانعاً لوضع البيض عند إناث حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* أكثر من بقية التراكيز بنسبة 100%، بينما بلغت النسبة 24% و 44% و 67% و 87% عند التراكيز الأدنى على التوالي 2% و 4% و 6% و 8%.

الكلمات المفتاحية: أوراق نبات الجوز، التأثير المانع لوضع البيض، *Tuta absoluta*.

The effect of oviposition deterrent of aqueous extract of *Juglans regia* L of the tomato leaf miner females *Tuta absoluta* (Meyrick, 1917) (Lepidoptera: Gelechiidae)

Dr. Maram Natour
Faculty of science
Aleppo University

Abstract

The study was conducted in the greenhouse of the Faculty of Science at the University of Aleppo, from the beginning of Appel to the end of October 2022.

The leaf miner (*Tuta absoluta*) was collected from an orchard in the Al-Nayrab area, east of Aleppo. It was reared in insect cages measuring (60 ×60 ×60) cm, containing tomato seedling post. The different stages it goes through were identified. Aqueous extract of leaves *J. regia* was prepared at different concentrations.

The results showed that a 10% concentration of the aqueous extract of leaves *J. regia* had oviposition deterrent of the tomato leaf miner females *T. absoluta* more than other concentrations by 100%, while the percentage reached 24%, 44%, 67% and 87% at the lowest concentrations, respectively, 2%, 4%, 6% and 8%.

Key Words: *Juglans regia*, oviposition deterrent, *Tuta absoluta*

1- مقدمة

إن الاستخدام الواسع للمبيدات الكيميائية كوسيلة في القضاء على الآفات الزراعية رفع من نسبة التلوث البيئي وشكل خطراً على صحة الإنسان والحيوان وأدى إلى ظهور سلالات مقاومة من هذه الآفات للمواد الفعالة التي تحتويها هذه المبيدات، وهذا ما شجع الباحثين على استخدام النباتات ومستخلصاتها الفعالة كوسائل حيوية في مكافحة الآفات وردع الخطر عن الإنسان والبيئة معاً. ومن هذه المستخلصات النباتية المهمة المستخدمة لمكافحة الآفات مستخلص أوراق نبات الجوز الذي ينتمي إلى الفصيلة الجوزية Juglandaceae لاحتوائه على العديد من المواد الفعالة، إذ تحتوي أوراق نبات الجوز على مجموعة واسعة من المركبات الفينولية مثل مركبات الفلافونيدات Flavonoid، والأحماض الفينولية phenolic acids والنفتوكينونات naphthoquinones، ولها خصائص مضادات الأكسدة [5-22-35]. وتعتبر حافرة أوراق البندورة *Tuta absoluta* من أخطر الآفات الحشرية التي تؤثر على إنتاجية عدد من المحاصيل الاقتصادية التي تنتمي للعائلة الباذنجانية Solanaceae مثل البطاطا *Solanum tuberosum*، والباذنجان *Solanum melongena*، والفلفل الحلو *Capsicum annuum*، والتبغ *Nicotiana tabacum* [16، 17، 21، 26، 30] في مختلف البلدان. وتنتمي حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* إلى فصيلة Gelechiidae من رتبة حرشفية الأجنحة Lepidoptera كاملة التحول، إذ تمر حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* خلال دورة حياتها بأربع مراحل مختلفة هي البيضة ثم اليرقة التي يكتمل نموها بعد مرورها بأربعة أعمار يرقية لتصل إلى مرحلة العذراء، ثم مرحلة الحشرة البالغة [6] و [7]، وتعتبر نباتات البندورة العائل الأساسي لها في الزراعات المكشوفة والمحمية، إذ أن يرقاتها تتغذى على جميع أجزاء نبات البندورة وتسبب خسائر في إنتاج المحصول قد تتراوح بين 80-100% [3].

دورة حياة حشرة حافرة أوراق البندورة *T. absoluta*:

تتراوح الكفاءة التكاثرية لحشرة حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* من 250-300 بيضة خلال فترة حياتها، وتضع الإناث البيض على السطح السفلي للأوراق وعلى الساق بشكل مفرد أو مجموعات ويفقس بعد حوالي 4-5 أيام حسب الظروف الجوية 25-27 درجة مئوية ورطوبة نسبية

تأثير المستخلص المائي لأوراق نبات الجوز *Juglans regia* L في منع وضع البيض عند إناث حافرة أوراق البندورة (*Tuta absoluta* (Meyrick, 1917) (Lepidoptera: Gelechiidae)

65-75% عن يرقات صغيرة تتغذى بين بشرتي الورقة أو داخل الثمار محدثة أنفاقاً، وتسلخ اليرقة ثلاثة انسلاخات لتعطي أربعة أعمار يرقية بحيث تستغرق فترة الطور اليرقي 13-15 يوماً لتدخل بطور العذراء في التربة أو بين بقايا النباتات المتساقطة داخل شرنقة حريرية بيضاء وتستغرق فترة التعذر 9-11 يوماً، وتتبقى الحشرات الكاملة من العذارى وتنشط ليلاً بحيث تطلق الإناث الفيرومون الجنسي لتجذب الذكور من أجل حدوث عملية التزاوج. تكتمل دورة الحياة خلال 29 - 38 يوماً حسب الظروف البيئية السائدة. لهذه الحشرة 12 جيل في العام الواحد في الظروف المناسبة و 10 أجيال في الظروف الأقل ملائمة [15].

طبيعة الضرر:

يكمن خطر وضرر حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* على نباتات البندورة المزروعة طول موسم النمو وينتقل إلى أماكن التعبئة والتصنيع، حيث تتغذى يرقات هذه الحشرة وتتطور على جميع أجزاء النبات الخضرية (الأوراق-الساق-الثمار)، إذ تتغذى اليرقات على النسج المتوسط للأوراق محدثة أنفاق وممرات غير منتظمة بين بشرتي الورقة تاركة تجاويف وأنفاق فارغة مغطاة بالبشرة الخارجية للأوراق وتتحول الورقة لاحقاً إلى بقع جافة، وتترك اليرقة مخلفاتها (فضلاتها) في نهاية الأنفاق التي تصنعها الآفة، كما تمتاز اليرقات بقدرتها على اختراق الساق والبراعم الحديثة محدثة أنفاق بها وخصوصاً منطقة اتصال عنق الورقة مع ساق النبات، وكذلك تهاجم الثمار أثناء تكوينها وتحدث بها أنفاقاً مما يؤدي إلى إصابتها ببعض الفطريات ويؤدي ذلك إلى سقوط الثمار [2].

مكافحة حشرة حافرة أوراق البندورة *T. absoluta*:

تتسم حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* بكونها من الآفات صعبة المكافحة نظراً لأن يرقاتها تعيش داخل أنفاق تحدثها في القمم النامية وفي الأوراق والثمار، إضافة إلى ما تتميز به من قدرة عالية على التكاثر، وسرعة استثنائية في الانتشار، وقدرة على تطوير المقاومة تجاه المبيدات، إذ تم البدء بتطبيق وسائل المكافحة المتاحة وخاصة الكيميائية منها والتي أعطت في البدايات نتائج جيدة في الحد من تكاثر الحشرات وأضرارها. إلا أن قدرة هذه الآفة الحشرية على إعطاء السلالات المقاومة للمبيدات الحشرية كانت سبباً مهماً في تغيير تلك المبيدات بشكل دوري [10، 27].

ونتيجة الآثار السلبية للمبيدات على الإنسان والبيئة فقد اتجهت الأبحاث الحديثة في مجال مكافحة حشرة حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* إلى البحث عن وسائل أخرى تعتمد على مكافحة الحيوية ومنها المستخلصات النباتية، التي تعتبر مصدراً لتخليق المركبات الطبيعية والتي تستخدم كوسائل حيوية في مكافحة الآفات، ويتم البحث حالياً عن العديد من المواد الفعالة الطبيعية والتي لها صفات موجودة في بعض النباتات كمنظمات نمو حشرية (Insect growth regulator) ومثبطات (Inhibitors) (مثبطات تشكيل الكيتين Chitin synthesis inhibitors)، وطاردات (Repellents) ومانعات للتغذية (Antifeedants)، وبالإضافة إلى استخدامها كسموم عامة ضد الأطوار غير البالغة للحشرات، حيث المكونات الكيميائية لبعض النباتات لها تأثيراً فعالاً [31].

لكي نتجنب الضرر الذي تسببه حشرة حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* ينبغي اكتشاف الأعراض باكراً وخاصةً البيض أو الأنفاق الصغيرة التي تحدثها اليرقة ومكافحتها بأحد طرائق مكافحة الحيوية ومنها المستخلصات النباتية.

المستخلصات النباتية:

غالباً ما يكون للمواد الفعالة في النباتات الطبيعية بعض التأثيرات على الحشرات كالتأثيرات الطاردة [24،8] أو المانعة لوضع البيض [32] وهذه المبيدات الحشرية النباتية غير مؤذية للبيئة [19] وغير مؤذية للكائنات الحية الأخرى والبشر [28،29،31].

وبينت بعض الأبحاث [9] أن للمستخلص المائي لأوراق نبات الجوز *J. regia* تأثير مانع لوضع البيض عند إناث عثة التفاح *Cydia pomonella*.

وأظهرت بعض الدراسات [14] أن للمستخلصات النباتية لأوراق نباتات حشيشة الدود *Tanacetum vulgare*، أقحوان زهر الذهب *Tanacetum parthenium*، الصبار الأولفيرا *Aleo vera*، شجرة الشاي *Melaleuca alternifolia* تأثير مانع لوضع البيض عند إناث حافرة أوراق البندورة *T. absoluta*.

كما أظهرت بعض الأبحاث [23] أن للمستخلصات النباتية الزعتر البري *Thymus capitatus* والحبق *Ocimum basilicum* والغار *Laurus nobilis* والبصل *Allium sativum* تأثير مانع لوضع البيض عند إناث حافرة أوراق البندورة *T. absoluta*.

تأثير المستخلص المائي لأوراق نبات الجوز *Juglans regia* L في منع وضع البيض عند إناث حافرة أوراق البندورة *Tuta absoluta* (Meyrick, 1917) (Lepidoptera: Gelechiidae)

أشارت بعض الدراسات [18] أن لبعض المستخلصات المائية حشيشة الليمون *Cymbopogon citratus* والثوم *Allium sativum* ولزيوت بعض النباتات الكينا *Eucalyptus spp* والسذاب *Ruta graveolens* والحبق *Ocimum basilicum* واليانسون *Pimpinella anisum* تأثيراً طارداً ضد حشرة حافرة أوراق البندورة *T. absoluta*.

أهمية البحث:

على الرغم من أن المبيدات الكيميائية تلعب دوراً كبيراً في مكافحة العديد من الآفات الحشرية إلا أن الإفراط في استخدامها يؤثر سلباً على البيئة والإنسان، ونظراً لقلة الأبحاث المنجزة في سورية في مجال تأثير المستخلصات النباتية، ومن هنا تكمن أهمية البحث في دراسة إمكانية مكافحة حشرة حافرة أوراق البندورة باستخدام أحد المستخلصات النباتية بعيداً عن استخدام المبيدات الكيميائية لما لها من اضرار بالغة.

2- أهداف البحث:

هدف هذا البحث إلى:

دراسة التأثير بتركيز مختلفة للمستخلص المائي لأوراق نبات الجوز *J. regia* في منع وضع البيض لإناث حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* لمنع تكاثر هذه الآفة والحد من أضرارها.

3- مواد البحث وطرائقه:

أجري البحث في البيت الزجاجي التابع لكلية العلوم-جامعة حلب، في الفترة الزمنية من بداية شهر نيسان إلى نهاية شهر تشرين الأول لعام 2022.

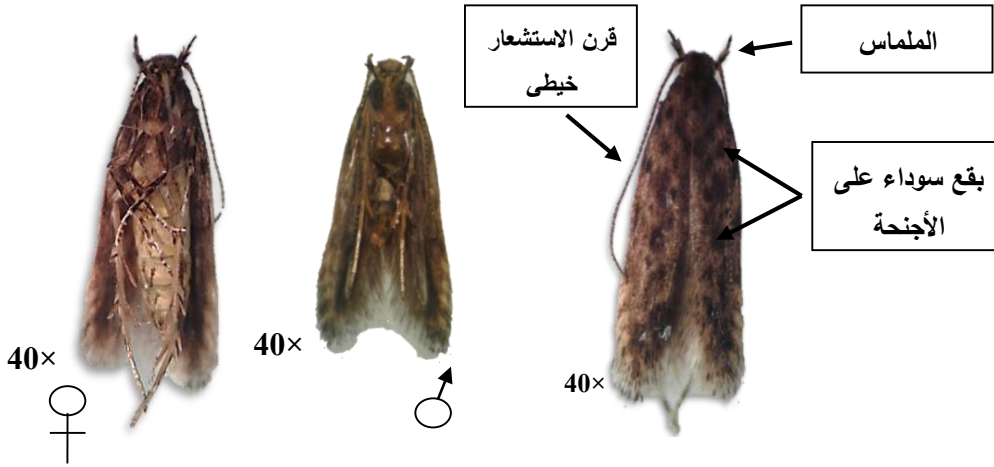
3-1- زرع الشتلات:

تم إحضار شتول البندورة *Solanum lycopersicum* ذات الصنف البلدي من إحدى الصيدليات الزراعية في مدينة حلب ومن أحد البساتين في منطقة النيرب الواقعة شرق مدينة حلب تم زراعة هذه الشتول (خمس شتلات) ضمن أصص (100 أصيص) في البيت الزجاجي لتربية الحشرات، حيث تراوحت درجة الحرارة بين 25-35 درجة مئوية والرطوبة النسبية من 60-70%.

3-2- جمع حشرة حافرة أوراق البندورة *T. absoluta*:

تم جمع أوراق بندورة مصابة بالطور اليرقي لحشرة حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* (وذلك بفحص كل ورقة من أوراق البندورة) من أحد البساتين في منطقة النيرب شرق مدينة حلب، ووضعت ضمن علب بلاستيكية قياس 10×20 سم ، وتم إغلاق العلب بإحكام بورق بارافيلم، ومن ثم تقبت العلب بواسطة الدبوس بثقوب صغيرة لتهوية اليرقات. تم عزل اليرقات من أوراق البندورة المصابة وتربيتها على شتول البندورة ضمن أقفاص (عدد5) خاصة بتربية الحشرات قياسها $(60 \times 60 \times 60)$ سم، حاوية على أصص لشتلات البندورة (4 أصص لكل قفص وكل أصيص تتضمن 4 شتلات وكل شتلة تضمنت 3 يرقات).

ومن ثم تم تعريف حشرة حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* التي تم جمعها من الحقول بالاعتماد على بعض الصفات الشكلية للحشرة البالغة (كقرون الاستشعار الخيطية والملماس الشفوي ووجود بقع سوداء على الأجنحة الأمامية الشكل رقم (1)) بالإضافة إلى الأعضاء التناسلية باستخدام المفاتيح التصنيفية [6، 13، 33، 34].



الشكل رقم (1) يوضح بعض الصفات الشكلية لحشرة حافرة أوراق البندورة *Tuta absoluta*

3-3- تحضير المستخلص النباتي:

جمعت كمية من أوراق نبات الجوز وغسلت وجففت بالظل حتى ثبات الوزن ومن ثم تم تحضير المستخلص المائي منها، واستخدمت طريقة الاستخلاص المائي في درجة حرارة الغرفة للحصول على المستخلص النباتي المائي وذلك وفق الخطوات التالية: [18]

1- تم طحن 100 غ من أوراق نبات الجوز الجافة بشكل ناعم جداً بواسطة مطحنة كهربائية (الخلاط الكهربائي).

2- ومن ثم نقل المسحوق إلى دورق مخروطي زجاجي سعة 2 ل وتم إكمال الحجم إلى لتر واحد من الماء المقطر وحرك المزيج باستخدام الخلاط لمدة ساعة وبدرجة حرارة المختبر.

3- بعد ذلك رشح المحلول بورق الترشيح ذات حجم وسط وقطر 15 سم ومسام 100 ميكرو متر وعلامة تجارية Sartorius filters.

4- تم تثقيب المستخلص باستخدام جهاز الطرد المركزي بسرعة 3000 دورة/دقيقة لمدة 15 دقيقة

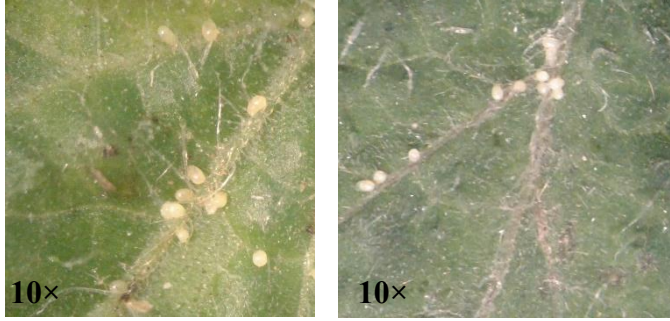
5- تم الحصول على مستخلص نباتي رائق أساس تركيزه 10% W/V. ومن هذا المحلول تم تحضير التراكيز المختلفة وذلك بتخفيفها بالماء (2%، 4%، 6%، 8%، 10%).

4- التأثير المانع لوضع البيض للمستخلص النباتي لأوراق الجوز على إناث حافرة أوراق البندورة:

تم تخصيص ستة أطباق بتري يحتوي كل منها على قطع من أوراق بندورة تمت معاملتها بمستخلص أوراق الجوز بالتراكيز الخمسة المدروسة (2% و 4% و 6% و 8% و 10%)، بواقع تركيز لكل طبق وخصص الطبق السادس كشاهد يحتوي على قطع من أوراق البندورة غير معاملة بالمستخلص المائي. وتم تخصيص ثلاثة مكررات لكل تركيز مستخدم للمستخلص النباتي، وأدخلت هذه الأطباق (6) إلى قفص تربية حشرة حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* الذي احتوى على 20 فرد بالغ لكل من ذكور وإناث *T. absoluta* التي تم جمعها من البيت الزجاجي ووضع محلول سكري 10% لتغذية الحشرة البالغة ضمن ظروف الحرارة والرطوبة النسبية للمختبر، ووضعت المكررات لكل تركيز في قفص تربية مستقل (أي أن كل قفص تربية احتوى على ستة أطباق (5) منها معاملة بالتراكيز الخمسة للمستخلص المستخدم بواقع تركيز لكل طبق والطبق السادس شاهد) و 20 فرد بالغ لكل من ذكور وإناث *T. absoluta* و محلول سكري 10% لتغذية الحشرة البالغة).

ثم تم عد البيوض مجهرياً الشكل رقم (2) وحساب متوسط عدد البيض الموضوع من قبل إناث حافرة أوراق البندورة في كل طبق للتراكيز والمكررات المدروسة، وذلك بعد 24 ساعة من بدء التجربة [11].

وتم حساب النسبة المئوية لمتوسط عدد البيض الموضوع: [25]
النسبة المئوية للتأثير المانع لوضع البيض = (العدد بالشاهد - العدد بالمعاملة / العدد بالشاهد) $\times 100$.



الشكل رقم (2) يوضح بيض حشرة حافرة أوراق البندورة *Tuta absoluta* مجهرياً

5- التحليل الإحصائي للنتائج:

تم إجراء التحليل الإحصائي باستخدام برنامج SPSS وقد استخدم تحليل التباين ANOVA، وعند العثور على فرق معنوي عند مستوى الدلالة 0.05 بين النتائج تم أيضاً تطبيق دالة أقل فرق معنوي (Least significant difference (LSD لتحديد النتائج التي يوجد بينها اختلاف.

4- النتائج والمناقشة:

تأثير المستخلص المائي لأوراق نبات الجوز *J. regia* لمنع وضع البيض عند إناث حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* L:

أوضحت النتائج أن المستخلص المائي لأوراق نبات الجوز أبدى تأثيراً قوياً على منع وضع البيض وخاصةً عند التركيز 10% إذ أن إناث حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* قد

تأثير المستخلص المائي لأوراق نبات الجوز *Juglans regia* L في منع وضع البيض عند إناث حافرة أوراق البندورة *Tuta absoluta* (Meyrick, 1917) (Lepidoptera: Gelechiidae)

وضعت البيض في التركيز (2%) بنسبة (24%)، وفي التركيز (4%) بنسبة (44%)، وفي التركيز (6%) بنسبة (67%)، بينما في التركيز (8%) فقد بلغت النسبة (87%) بعد 24 ساعة، أما في التركيز 10% فلم تضع أي بيضة، وبالتالي فإن التركيز 10% لمستخلص أوراق الجوز أكثر فعالية من بقية التراكيز فقد أظهر تأثيراً مانعاً لوضع البيض أكثر من بقية التراكيز وهذا ما أكدته نتائج التحليل الإحصائي باستخدام برنامج SPSS وباستخدام معامل تحليل التباين ANOVA، أن هناك فروق معنوية بين نسب التمديد للمستخلص على عدد البيض الموضوع لحافرة أوراق البندورة عند مستوى دلالة 0.05%، حيث بلغت القيمة الاحتمالية $p=0.000 > 0.05$ وبالتالي نطبق دالة أقل فرق معنوي (Least significant difference (LSD لتحديد التراكيز التي يوجد بينها اختلاف للمستخلصات المدروسة، وقد وجد أن التركيز 10% أكثر فعالية من بقية التراكيز يليه التركيز 8% ويليه التركيز 6% ثم التركيز 4% والتركيز 2%، حيث بلغت القيمة الاحتمالية $p=0.000 > 0.05$. الجدول رقم (1) و (2) والمخطط رقم (1).

الجدول رقم (1) يبين التأثير المانع لوضع البيض للمستخلص المائي لأوراق نبات الجوز بتراكيزه الخمسة مع مكررات كل

تركيز (3 مرات لكل تركيز) على إناث حافرة أوراق البندورة *T. absoluta*

بالمقارنة مع الشاهد

24 ساعة			الأيام
عدد البيض	عدد البيض	عدد البيض	التراكيز
7	8	8	%2
5	6	6	%4
3	3	4	%6
1	1	2	%8
0	0	0	%10
9	10	11	%Control

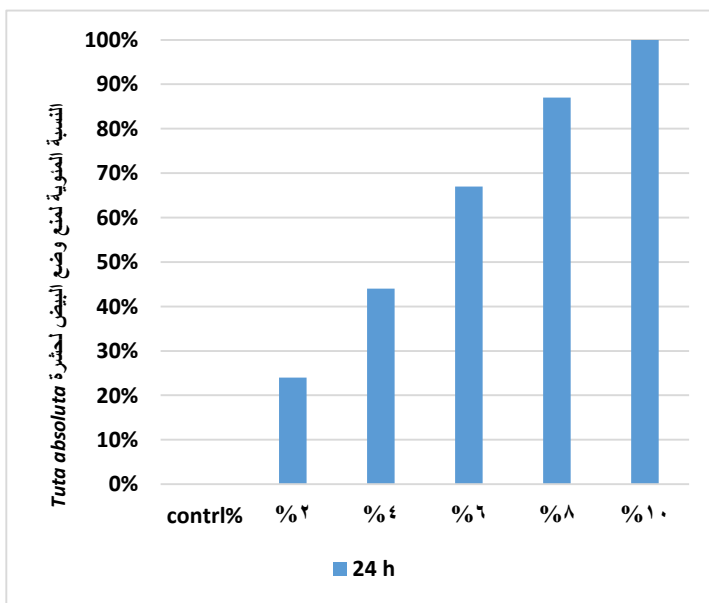
الجدول رقم (2) يبين التأثير المانع لوضع البيض للمستخلص المائي لأوراق نبات الجوز على إناث حافرة أوراق البندورة

T. absoluta

24 ساعة		الأيام
النسبة المئوية لمنع وضع البيض	متوسط عدد البيض $\pm$ الانحراف المعياري	التراكيز
%24	7.6 ± 0.57^a	%2
%44	5.6 ± 0.57^b	%4
%67	3.3 ± 0.57^c	%6
%87	1.3 ± 0.57^d	%8

%100	0 ± 0^c	%10
%0	10 ± 1	%Control
P=0.000<0.05		تحليل التباين
P=0.000<0.05		LSD

المتوسطات المتوقعة بأحرف متشابهة ضمن العمود نفسه لا يوجد بينها فروقات معنوية عند مستوى 5%.



المخطط (1) التأثير المانع لوضع البيض للمستخلص المائي لأوراق نبات الجوز على إناث حافرة أوراق البندورة *T. absoluta*

وقد اتفقت نتائجنا مع بعض الأبحاث، بعضها من حيث الحشرة المستخدمة وبعضها من حيث المستخلص المستخدم في البحث.

فمن حيث المستخلص المدروس، قد اتفقت نتائجنا مع بعض الأبحاث [9] التي بينت أن للمستخلص المائي لأوراق نبات الجوز *J. regia* تأثير مانع لوضع البيض عند إناث عثة التفاح *C. pomonella*.

أما من حيث الحشرة المستخدمة في البحث، فقد اتفقت نتائجنا مع بعض الأبحاث [20] التي أشارت إلى دور المستخلص المائي لنبات الدفلة *Nerium oleander* والزيتون *Olea*

تأثير المستخلص المائي لأوراق نبات الجوز *Juglans regia* L في منع وضع البيض عند إناث حافرة أوراق البندورة (*Tuta absoluta* (Meyrick, 1917) (Lepidoptera: Gelechiidae)

europaea والغار *L. nobilis* في منع وضع البيض عند إناث حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* بنسبة 100% عند التركيز 10%.

كما بينت بعض الدراسات [4] أن المستخلص المائي لقشور ثمار الرمان *Punica granatum* تأثير ممانع لوضع البيض عند إناث حافرة أوراق البندورة *T. absoluta* بنسبة 100% عند التركيز 10%.

ويعود سبب التأثير الممانع لوضع البيض للمستخلصات النباتية إلى احتواء النباتات على مركبات ثانوية قلويدية وفينولية وتربينية وغيرها تعمل كمواد طاردة تؤدي إلى تثبيط عملية وضع البيض ونسبة الفقس وفي عملية الانسلاخ الأطوار اليرقية وهلاك البالغات [1] و[12].

5- الاستنتاجات:

1- بينت هذه الدراسة أن للمستخلص المائي لأوراق نبات الجوز بتركيز 10% تأثيراً ممانعاً في وضع البيض عند إناث حافرة أوراق البندورة *T. absoluta*.

6- التوصيات:

1- العمل على عزل المواد الفعالة من هذا النبات ودراسة تأثير كل منها في هذه الآفة والآفات الأخرى ذات التأثير الضار اقتصادياً.

2- تطبيق التجارب في الطبيعة لإظهار فعالية المستخلص المائي لأوراق نبات الجوز *Juglans regia* على حشرة حافرة أوراق البندورة *Tuta absoluta* في أماكن تواجدها.

7- المراجع:

1. سليمان، أمل كمال؛ 2016. - تأثير بعض مساحيق التوابل في مكافحة بالغات خنفساء

الطحين الصدفية الحمراء *Tenebrionidae* (Coleoptera: *Tribolium castaneum* (Herbst).

مجلة تكريت للعلوم الصرفة، 21 (5).

2. عبد الجليل، فاروق عبد القوي؛ 2014 - النشرة البيئية لكلية الزراعة. جامعة أسيوط، العدد

الخامس.

3. محمد موسي، جهاد؛ 2015- الدليل الإسترشادي لإدارة حافرة الطماطم *Tuta absoluta*. معهد وقاية النباتات - مركز البحوث الزراعية - جمهورية مصر العربية، منظمة الأغذية والزراعة للأمم المتحدة، المكتب الإقليمي للشرق الأدنى وشمال إفريقيا، القاهرة، عدد الصفحات: 90.
4. ناطور، مرام؛ 2024- دراسة تأثير المستخلص المائي لقشور ثمار الرمان *Punica granatum L* في منع وضع البيض عند إناث عثة البندورة (*Tuta absoluta* (MEYRICK) (Lepidoptera: Gelechiidae). في مجلة جامعة البعث، المجلد 46، العدد 6، عدد الصفحات 23.
5. ALMEIDA I.F, FERNANDES E, LIMA J.L, COSTA P.C, BAHIA M.F; 2008 - Walnut (*Juglans regia*) Leaf Extracts are strong scavengers of pro oxidant reactive species. Food Chemistry. 106:1014-20.
6. BADAoui, M.I; AND BERKANI, A; 2011 -Morphologie comparaison des appareils énitaux de deux especes invasives *Tuta absoluta* Meyrick, 1917 *Phthorimaea operculella* Zeller 1873 (Lepidoptera: Gelechiidae). Entomologie faunistique – Faunistic Entomology (2010) 63 (3), 191-194.
7. BRITO, E. F. D; BLADIN, E. L. L; Silva, R. D. C. M; Ribeiro, L. D. P; Vendramin, J. D; 2015 - Bioactivity of *Piper* extracts on *Tuta absoluta* (Lepidoptera: Gelechiidae) in tomato. Pesq. agropec. Bras, Brasília, v.50, n.3, p.196-202.
8. CHOOCHOTE, W; TUETUN, B; KANJANAPOTHI, D; 2004 - Potential of crud seed extract of celery *Apium graveolens* L against the mosquito *Aedes aegypti* (L) (Diptera: Culicidae). J. vector Ecol, 29: 340-346.
9. CYRUS, A; GEORG, B; 2024 - Oviposition-detering activity of sixteen extracts of medicinal plants, extensively used in modern medicine, against *Cydia pomonella* L. (Lepidoptera: Tortricidae). Mitteilungen Der Schweizerischen Entomologischen Gesellschaft Bulletin De La Société Entomologique Suisse. 59, 31-38, 1986.
10. DESNEUX, N. E; WAJNBERG, K.A.G; WYCKHUYS, G; BURGIO, S; ARPAIA, C.A; NARVÁEZ-VASQUEZ, J; GONZÁLEZCABRERA, D.C; RUESCAS, E; FRANDON, F; 2010 - Biological invasion of European tomato crops by *Tuta absoluta*: Ecology, geographic expansion and prospects for biological control. Journal of Pest Science, 83: 197-215.
11. ELANGO, G; BAGAVAN, A; KAMARAJ, C; ABDUZ ZAHIR, A; ABDUL RAHUMAN, A; 2009 -Oviposition-deterrent, ovicidal, and

تأثير المستخلص المائي لأوراق نبات الجوز *Juglans regia* L في منع وضع البيض عند إناث حافرة أوراق البندورة *Tuta absoluta* (Meyrick, 1917) (Lepidoptera: Gelechiidae)

- repellent activities of indigenous plant extracts against *Anopheles subpictus* Grassi (Diptera: Culicidae). Published online: 26 August, Parasitol Res, 105:1567–1576.
12. **EL-LAKWAH, F. A; KHALED, O. M; DARWISH, A.A; 1993** - Laboratory studies on the toxic effect of some plant seed extracts on some stored product insects. *Annals of Agric. Sc. Moshtohor*. 31(1): 593-602.
 13. **EPPO; 2005** - Datasheet on quarantine pests (*Tuta absoluta*). OEPP/ EPPO Bulletin 35: 434- 435.
 14. **ERDOGAN, P; 2019** - Oviposition deterrent activities of some plant extracts against tomato leaf miner, *Tuta absoluta* Meyrick (Lepidoptera: Gelechiidae). *Journal of Bacteriology & Mycology: Open Access. Journal Bacteriol Mycol Open Access*, 7(6):139–142.
 15. **ESTAY, P; 2000** - Polilla del Tomate *Tuta absoluta* (Meyrick) Informativo09. Accessed 2 Feb.
 16. **GARZIA, G.T; SISCARO, G; BIONDI, A; ZAPPALÀ, L; 2009**- "*Tuta absoluta*, a South American pest of tomato now in the EPPO region: biology, distribution and damage", *EPPO Bull.*, 42(2), 205-210.
 17. **HECTOR VARGAS, C., 1970** - "Observaciones sobre la biología y enemigos naturales de la polilla del tomate, *Gnorimoschema absoluta*. (Meyrick). (Lep.Gelechiidae)", *Idesia Depto. Agricultura, Universidad del Norte-Arica*. Agosto, N° 1.
 18. **HUSSEIN, N. M; HUSSEIN, M. I; HAK, S. H., SHAALAN, H. S., HAMMAD, M. A; 2015** - Effect Of two plant extracts and four aromatic oils on *Tuta absoluta* population and productivity of tomato cultivar gold stone. *J. Plant Prot, and Path, Mansoura Univ.*, Vol. 6 (6): 969 – 985.
 19. **JACOBSON, M; 1975** - Insecticides from plants: a review of the literature, agricultural and book. Washington, U.S. Dep. Agriculture, v. 138, p: 1954-1971.
 20. **NATOUR, M; KAROOM, M; 2017** – The effect study of oviposition deterrent of some plant aqueous extracts of moth tomato females *Tuta absoluta* (Meyrick, 1917) (Lepidoptera: Gelechiidae). *Journal of King Abdulaziz University*. Vol. 29, No. 2.
 21. **NOTZ, A.P; 1992** - Distribution of eggs and larvae of *Scrobipalpula absoluta* in potato plants. *Revista de la Facultad de Agronomia (Maracay)* 18: 425-432.
 22. **PEREIRA JA, OLIVEIRA I, SOUSA A, FERREIRA IC, BENTO A, ESTEVINHO L. 2013** - Bioactive properties and chemical composition of six

- walnut (*Juglans regia* L.) cultivars. Food Chem Toxicol. 46-11. doi: 10.1016/j.fct.02.002. PubMed PMID: 18334279.
23. **PINTO, M; VELLA, L; AGRO, A; 2022-** Oviposition deterrence and repellent activities of selected essential oils against *Tuta absoluta* Meyrick (Lepidoptera: Gelechiidae) laboratory and green house investigations. *International Journal of Tropical Insect Science*.
24. **PRAKASH, A; BHATTACHARYA, D.R; MOPHAPATRA, P.K; MAHANTA, J; 2000** - Preliminary field evolution of repellent action of neem oil in Assam against two mosquito vectors of Japanese encephalitis. *J. paras. Dis*, 24: 221-222.
25. **RAJKUMAR, S; JEBANESAN, A; 2009** - Larvicidal and oviposition activity of *Cassia obtusifolia* Linn (Family: Leguminosae) leaf extract against malarial vector, *Anopheles stephensi* Liston (Diptera: Culicidae). *Parasitol Res*, **104(2)**: 337–340.
26. **ROBERTO CAMPOS, G., 1976** - “Control químico del "minador de hojas y tallos de la papa" (*Scrobipalpula absoluta* Meyrick) en el valle de cañete ”., *Revista Peruana de Entomología*. Vol. 19, n° 1.
27. **RODITAKIS, E., E. VASAKIS, M. GRISPOU, M. STAVRAKAKI, R. NAUEN, M. GRAVOUIL AND A. BASSI. 2015** - First report of *Tuta absoluta* resistance to diamide insecticides. *Journal of Pest Science*, 88(1): 9-16.
28. **SIVAGNANAME, N; KALYANASUNDARAM, M; 2004** - Laboratory evaluation of methanolic extract of *Atlantia monophylla* (Family: Rutaceae) against immature stages of mosquitoes and non-target organisms. *Mem. Inst. Oswaldo Cruz*, Rio de Janeiro, 99(1): 115-118.
29. **SU, T; MULLA, M.S; 1998** - Ovicidal activity of neem products (Azadirachtin) against *Culex tarsalis* and *Culex quinquefasciatus* (Diptera: Culicidae). *J. Am Mosq Cont Assoc*, 14:204–209.
30. **SUINAGA, F.A; PICANCO, M; JHAM, G.N; BROMMONSCHENKEL, S.H; 1999** - Chemical resistance of *Lycopersicon peruvianum* (L.) to *Tuta absoluta* (Meyrick) (Lepidoptera: Gelechiidae). *An Soc Entomol Brazil* 28:313-321.
31. **SUN, L, DONG, H; GUO, C; 2006** - Larvicidal activity of extracts of *Ginkgo biloba* exocarp for three different strains of *Culex pipiens pallens*. *J. med. Entomol*, 43: 258-261.
32. **TILAK, R; GUPTA, M.V; SURYAM, M.V; YADAV, J.D; GUPTA, B.K; 2005** - A laboratory investigation into oviposition responses of *Aedes*

aegypti to some common household substances and water from conspecific larvae. *Med. J. Armed Forces India*, 61: 227-229.

33. **TOSEVSKI, I; JOVIC, J; MITROVIC, M; CVRKOVIC, T; 2011-** *Tuta absoluta* (Meyrick, 1917) (Lepidoptera, Gelechiidae): a New Pest of Tomato in Serbia. Institute for Plant Protection and Environment, Department of Plant Pests, Banatska 33, 11080 Belgrade, Serbia. *Pestic. Phytomed.* (Belgrade), 26(3), 197–204.
34. **TRANVINH, L; 1997-** Morphologie des pieces genitales nervation alaire des principales pyrales foreurs du riz en Cote d'Ivoire. Description de quelques hymenopteres parasites. *Cahiers ORSTOM, série Biologie* 12, p. 29-45
35. **ZHAO, M.H; JIANG, Z.T; LIU, T; 2014 -** flavonoids in *Juglans regia* leaves and evaluation of in vitro antioxidant activity via intracellular and chemical methods. *ScientificWorld Journal*. 303878. doi: 10.1155/2014/303878. PubMed PMID: 25133218; PubMed Central PMCID: PMC4124233.

استخدام الشبكات العصبونية لترميم قواعد البيانات عبر تقدير المدخلات اعتماداً على قيم المخرجات بأقل نسبة خطأ ممكنة

*دفاطمة شلاف

الملخص

قمنا في هذا البحث بتقدير القيم المفقودة أو القيم الارتبابية لمتغير مستقل (دخل الشبكة العصبونية) أو أكثر من متغيرات الدراسة وبالتالي ترميم قاعدة البيانات، من خلال تدريب شبكة عصبونية أمامية التغذية وباستخدام خوارزمية Levenberg-Marquardt والتي تعد تطويراً لخوارزمية الانتشار العكسي التقليدية المستخدمة في تدريب الشبكات العصبونية الأمامية، حيث قمنا بحذف بعض القيم من متغير مستقل أو أكثر ومن ثم التنبؤ بها من خلال الخوارزمية المقترحة في هذا البحث وذلك اعتماداً على القيمة الدنيا والعليا للمتغير المستقل المراد التنبؤ بقيمه المفقودة حيث تم تقسيم مجال المتغير الى نقاط قطع تصل الى (n) نقطة أو أكثر حسب الرغبة بدقة النتائج (يمكننا تقسيم المجال الى 1000 وأكثر من نقاط القطع) ومن ثم تعتبر هذه القيم مداخل للشبكة العصبونية بعد تدريبها مع بقية المتغيرات المستقلة التي لا تحوي قيماً مفقودة عند هذه المشاهدة هذه النقاط ويتم الحصول على خرج مقابل لكل نقطة قطع وبعد حساب القيمة الدنيا للفرق بين القيمة الحقيقية للهدف وخرج الشبكة تم اختيار نقطة القطع التي تعطي اقل قيمة لهذا الفرق وتكون هي تقديراً ذو دقة عالية للقيمة المفقودة. وقد وصلت دقة التنبؤ الى 0.99.

الكلمات المفتاحية: الشبكات العصبونية، خوارزمية الانتشار العكسي، خوارزمية ليفينبيرغ، القيم المفقودة، المتغير المستقل.

*مدرس - قسم الإحصاء الرياضي - كلية العلوم - جامعة حمص.

Using Neural Networks to Restore Databases by Estimating Inputs Based on Output Values with the Least Possible Error

Fatima Shallaf*

Abstract

In this research, we predict missing values or uncertainty values for one or more independent variables of the study and thus restore the database, by training a feed-forward neural network and using the Levenberg-Marquardt algorithm, which is a development of the traditional backpropagation algorithm used in training forward neural networks. By deleting some values from one or more independent variables and then predicting them through the proposed algorithm in this research, depending on the lower and upper values of the independent variable whose missing values are to be predicted, where the variable field was divided into cut-off points up to (n) points or more as desired accurately. The results (we can divide the field into 1000 and more than the cut-off points) and then these values are considered as inputs to the neural network after training it with the rest of the independent variables that do not contain missing values when viewing these points. A corresponding output is obtained for each cut-off point and after calculating the minimum value of the difference between The true value of the target and the output of the network. The cut-off point that gives the lowest value for this difference is chosen, and it is a highly accurate estimate of the missing value. The prediction accuracy reached 0.99

Keywords: Neural networks, backpropagation algorithm, Levenberg algorithm, missing values, independent variable.

*Teacher, Dept. of Mathematical Statistics, Faculty of Science, Homs University.

(1) مقدمة:

يبقى المتغير التابع هو المتغير الذي يهتم فيه الإحصائيون للتنبؤ بقيمه ومن هذا الاهتمام نشأت نماذج الانحدار سواء كانت بسيطة أو متعددة خطية أو غير خطية وجميعها معتمد على العلاقة التابعة (الارتباطية) بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة، أما التنبؤ بقيم المتغير المستقل بقيت حتى الآن مستقلة معتمدة فقط على قيم المتغير المستقل نفسه فبنيت نماذج انحدار ذاتي وغيرها من النماذج التي تجعل هذا المتغير مستقل يعتمد على نفسه فقط،

حتى قمنا بهذا البحث الذي يعتمد على تطوير استعمال الشبكة العصبونية لتُستعمل من خلال الخوارزمية المقترحة على التنبؤ بقيم المتغيرات المستقلة المفقودة، وذلك لأن سلامة البيانات وترميم القيم المفقودة التي تظهر في البيانات مهمة ضرورية لسلامة النتائج والاستنتاجات في تحليل المعطيات.

(2) أهمية البحث:

اهتمت الأبحاث بنمذجة البيانات المدروسة من أجل استخدام النماذج للتنبؤ بالقيم المستقبلية أو ترميم قيم المتغير التابع وذلك باستخدام نماذج الانحدار التقليدية أو باستخدام الشبكات العصبونية ولكن لم يتم استخدام أي من هذه النماذج للتنبؤ بقيم المتغير المستقل ليعطي دقة عالية في التنبؤ بقيمه، لذا اعتمد البحث على اقتراح خوارزمية جديدة تعتمد على تدريب شبكة العصبونية (بناء النموذج التنبؤي)، ومن ثم تقدير القيم المفقودة وبالتالي جعل هذه الطريقة أحد الأدوات المساعدة في تقدير المعطيات المفقودة.

الهدف من البحث:

- 1- التعرف على أهم خوارزميات تدريب الشبكات العصبونية لإيجاد العلاقة المعقدة بين المداخل والمخارج والتي لا يمكن نمذجتها بأساليب الانحدار.
- 2- اقتراح أسلوب جديد لتقدير القيم المفقودة للمتغيرات المستقلة (مداخل الشبكة العصبونية).

3- قياس دقة التقدير للقيم المفقودة بالأسلوب المقترح.

(3) الشبكات العصبونية الاصطناعية Artificial Neural Networks: [1] [2][3]

تُعد الشبكات العصبونية الاصطناعية تمثيلاً لطريقة عمل الجهاز العصبي في الكائنات الحية. حيث تم اكتشاف قابليتها للتعلم والتذكر والقدرة على التمييز واتخاذ القرارات من قبل العلماء. تتألف هذه الشبكات من مجموعة من الوحدات المعالجة تُسمى بالعصبونات، حيث تمر الإشارات بين العصبونات من خلال خطوط الاتصال، ويتم تعيين وزن معين (قيمة عددية) لكل خط اتصال. وتتفاعل هذه الأوزان مع الإشارات الواردة إلى العصبون.

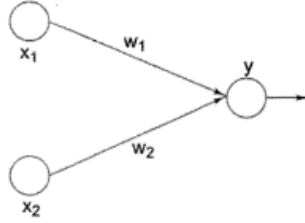
وتتضمن مكونات الشبكة العصبونية الاصطناعية مجموعة من العصبونات التي تكون متصلة ببعضها عبر روابط، ويتم تعيين قيم وزن لكل رابط وهذه القيم تؤثر على كيفية استجابة العصبونات للإشارات الواردة. ويتم تطبيق تابع تفعيل على كل عصبون لتحديد الإشارة الناتجة عنه. تختلف توابع التفعيل والطرق المستخدمة في الشبكات العصبونية الاصطناعية وفقاً للغرض والتطبيق.

باستخدام هذه البنية، يمكن للشبكات العصبونية الاصطناعية تعلم تمثيلات معقدة للبيانات واستخدامها لمهام مثل التصنيف والتنبؤ والتشخيص. تُعتبر هذه الشبكات مكوناً أساسياً في مجالات متعددة مثل التعلم العميق ومعالجة اللغة الطبيعية والرؤية الحاسوبية والذكاء الاصطناعي بشكل عام.

وبالتالي ستكون الشبكة العصبونية الاصطناعية مؤلفة من الأقسام التالية[4]:

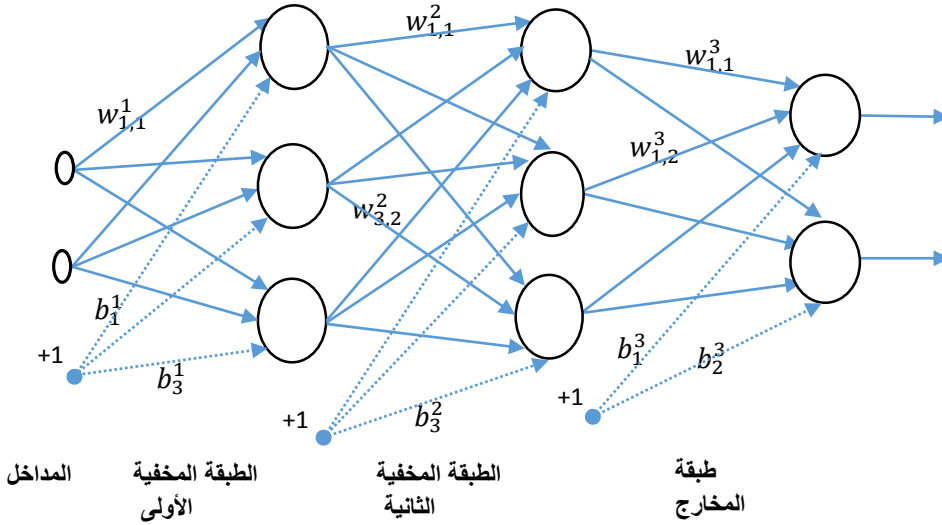
- 1- طبقة الدخل input layer: هي طبقة الخلايا التي تستقبل إشارات الدخل من الوسط الخارجي
- 2- طبقة الخرج output layer: هي طبقة الخلايا التي تعطي القرار النهائي إلى الوسط الخارجي.

3- الطبقة المخفية hidden layer: هي طبقة (طبقات) الخلايا التي تقع بين طبقتي الدخل والخرج وتقوم بعملية المعالجة، علماً أنها تكون غير موجودة في الشبكة العصبونية البسيطة التي تكون مؤلفة من طبقة فقط (المدخلات وطبقة الخرج) كما في الشكل التالي



الشكل (1) شبكة عصبونية بسيطة وحيدة الطبقة.

أما في الشبكات العصبونية متعددة الطبقات يكون هناك طبقة مخفية واحدة أو أكثر من طبقة مخفية كما في الشكل التالي:



الشكل (2) شبكة عصبونية متعددة الطبقات.

ويتم تحديد عدد المدخلات وعدد عصبونات طبقة الخرج من المعطيات التي يتم تحليلها لذلك إذا كان ضمن المعطيات أربعة متغيرات لاستخدامها كمدخلات،

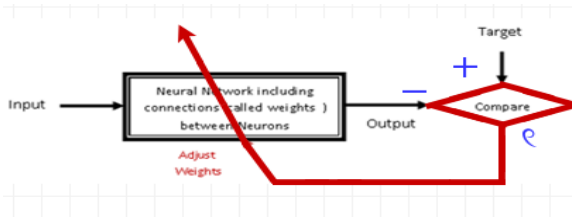
ستبنى الشبكة العصبونية بأربعة مداخل، وبالمثل إذا كان هناك سبعة متغيرات يجب دراستها كخرج للشبكة العصبونية تبنى الشبكة العصبونية بسبعة عصبونات في طبقة الخرج. أما عدد عصبونات الطبقة المخفية لم تحدد من قبل أي عالم [5] فكلها تبنى بالتجريب، فلو كان عدد عصبونات الطبقة المخفية قليلاً فإن الشبكة العصبونية لن تتعلم، وإن كان عدد عصبونات الطبقة المخفية كبيراً عندها ببساطة تميل الشبكة للحفظ، لذلك يتم تحديد عدد عصبونات الطبقة المخفية بين القلة التي تجعل الشبكة لا تتعلم وبين الكثرة التي تجعل الشبكة تحفظ معطيات الدخل. [5]

4 أنواع الشبكات العصبونية حسب نوع التدريب: [1][2]

حيث تعتبر عملية التدريب من العمليات الهامة جداً بالنسبة للشبكات العصبونية، لأنها عبارة عن عملية تستطيع الشبكة العصبونية من خلالها أن تتكيف مع مدخلات محددة من أجل الحصول على استجابات مطلوبة ويمكن تصنيف أساليب التدريب المختلفة للشبكات العصبونية إلى:

1-5- التدريب المشرف عليه (المراقب) Supervised Training: [1][2]

في التعليم المشرف عليه تعطى مجموعة من بيانات التدريب (data base) المكونة من أزواج من (دخول - خرج) أي أن هذا التدريب يحتاج إلى معلم أو مشرف يتمثل يشعاع الهدف ويتم التنبؤ بالخرج لدخل جديد وبعد إدخال معطيات التدريب تعالج الشبكة المدخلات وتقارن النتائج مع النتائج المرغوبة (الخرج المرغوب) وتحسب الخطأ (الفرق بين الخرج الفعلي الذي تم الحصول عليه من المدخلات وفق خوارزمية التدريب والخرج المرغوب) وتعاد (تتشر - تثبت) الأخطاء من خلال الشبكة مما يؤدي لتحديث الأوزان التي تتحكم بالشبكة، تحدث هذه العملية عدة مرات طالما أن الأوزان تتعدل.



الشكل (3) طريقة التدريب بمعلم

2-5- التدريب غير المشرف عليه (غير المراقب) Unsupervised Training: [5]

لا تحتاج الشبكات التي تستخدم هذا الأسلوب من التدريب إلى معلم أي إلى شعاع الهدف (المخرجات المرغوبة) فهي قادرة على التعلم والتصنيف للمدخلات المقدمة لها بشكل ذاتي أي تقدم المدخلات للشبكة بدون المخرجات المرغوبة، فهي نوع من أنواع شبكات التنظيم الذاتي، حيث تبني الشبكة العصبونية الاصطناعية أساليب التعليم على أساس قدرتها على اكتشاف الصفات المميزة لما يعرض عليها من أشكال وأنساق وقدرتها على تطوير تمثيل داخلي لهذه الأشكال وذلك دون معرفة مسبقة وبدون عرض أمثلة لما يجب عليها أن تُنتجه وذلك على عكس المبدأ المتبع في أسلوب التعليم بوساطة معلم، ويوجد عدة أنواع للشبكات ذات خوارزميات التعلم بدون مشرف.

6- الشبكات العصبونية بتغذية أمامية feed forward networks: [4]

تنتشر هنا المدخلات من وحدات الدخل إلى الطبقات المخفية فطبقة الخرج عن طريق وصلات مقترنة بأوزان كما يلي:

6-1- المدخلات inputs: تستقبل الاشارات الواردة من المحيط الخارجي وتمثل

بالشعاع $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ حيث يتم نقلها إلى جسم الخلية بنسب مختلفة.

6-2- الأوزان weights: قيم عددية قابلة للزيادة والنقصان وفق معادلات رياضية

محددة ويرمز لها ب $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ ، حيث يتم اعطاؤها قيم ابتدائية في الخطوة الأولى للتدريب ثم يتم تعديل هذه القيم حتى الوصول إلى أصغر قيمة ممكنة للخطأ الذي يتمثل بالفرق بين الخرج الفعلي للشبكة العصبونية والخرج المرغوب.

6-3- تابع التجميع summation function: يقوم بجمع المدخلات الموزونة

weighted function وفق العلاقة:

$$y_{in} = \sum_{i=1}^{i=n} w_i x_i = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n \mp b \quad (1)$$

4-6- تابع التفعيل (التنشيط) activation function: يقوم بتحويل حاصل جمع

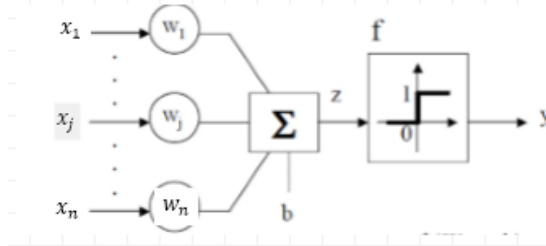
المدخلات الموزونة إلى إشارة رياضية محددة حسب طبيعة المشكلة لينتج

الخروج النهائي للخلية العصبية كما يلي:

$$y_{in} = \sum_{i=1}^n w_i x_i + b \quad (2)$$

فيكون خرج الشبكة العصبونية بتطبيق تابع التفعيل على y_{in} كما في العلاقة التالية:

$$\hat{y}_0 = output = f(y_{in}) = f(\sum_{i=1}^n w_i x_i) \quad (3)$$



الشكل (4) الشكل التفصيلي للشبكة العصبونية perceptron Network.

7- خوارزميات تدريب الشبكات العصبونية:

لدينا عدة خوارزميات تدريب للشبكات العصبونية نذكر منها: [4][5]

1- شبكة التكيف الخطي ADALINE NN : خوارزمية التدريب : delta

2- شبكة التكيف الخطي متعددة الطبقات MADALINE NN : هي عبارة عن

تركيب لشبكة التكيف الخطي الـ Adaline . ولهذه الشبكة خوارزميتي تدريب

MRI,MRII

3- خوارزمية الانتشار العكسي Back Propagation Algorithm.

8- خوارزمية الانتشار العكسي Back Propagation Algorithm

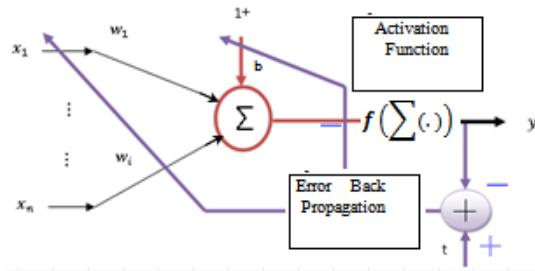
[5][6]

تم اقتراح هذه الخوارزمية من قبل Paul Werbos في السبعينات، ولكن لم تستعمل إلا لعام 1986م من قبل Rumelhart و McClelland وهي من أهم خوارزميات تدريب شبكة عصبونية تعتمد على الانتشار العكسي للخطأ من طبقة

الخرج باتجاه الطبقات السابقة (المخفية إلى الدخل)، تُستخدم لتعليم الشبكات العصبونية ذات التعلم بإشراف، والجدير بالذكر أن تابع التفعيل المستخدم في هذه الخوارزمية هو تابع الـ Sigmoid، كما تعتبر خوارزمية الانتشار العكسي من الخوارزميات السريعة لكنها تأخذ وقت في إيجاد مجموعة الحلول المثلى للأوزان، ولا يمكن استخدامها إلا بوجود طبقة أو أكثر من الطبقات المخفية.

تطوير فكرة الانتشار الخلفي لتدريب الشبكات العصبونية متعددة الطبقات لعبت الدور الأساس في إبراز الشبكات العصبونية الصناعية كأداة لحل الكثير من المشاكل على نطاق واسع.

وتهدف عملية تدريب هذه الشبكات الوصول إلى حالة من التوازن بين قابلية الشبكة على الاستجابة لعينات الدخل التي تستخدم في عملية التدريب وقدرتها على إعطاء استجابة جيدة لدخل مشابه لكن غير مطابق لذلك الدخل المستخدم في التدريب. يتضمن تدريب الشبكة بطريقة الانتشار الخلفي ثلاثة مراحل: مرحلة الانتشار الأمامي والانتشار الخلفي ثم مرحلة تعديل الأوزان. ويعد مرحلة التدريب تبدأ مرحلة اختبار الشبكة والتي تتضمن مرحلة واحدة فقط هي طور الانتشار الأمامي.



الشكل (5): تدريب الشبكات الأمامية متعددة الطبقات

9- تطوير خوارزمية الانتشار العكسي: [7][6][4]

إن لخوارزمية الانتشار العكسي العديد من التطويرات والتطور الأهم هو خوارزمية Levenberg-Marquadt، والتي تقلل من مجموع مربعات الخطأ $t_k - y_k$ (الفرق بين الخرج المطلوب و الخرج الفعلي) [7] وهي تحقق نسبة تقارب أفضل وتتطلب ذاكرة أقل وأسرع من غيرها من خوارزميات تدريب الشبكات العصبونية الأخرى مثل خوارزمية

الانتشار العكسي (Error Back propagation Algorithm) للخطأ حيث أن هذه الخوارزمية تكون غالباً بطيئة في المشاكل العملية حيث أن خوارزمية Levenberg-Marquardt يمكن أن تكون أسرع منها من 10 حتى 100 مرة وهي تعتبر تطوير لخوارزمية الانتشار العكسي للخطأ [6][4]

10- خوارزمية Levenberg-Marquardt [7]

وهي من طرائق إيجاد الحلول المثلى لأوزان الشبكة العصبونية من خلال إيجاد مجموع المربعات الصغرى المعرفة بالشكل:

$$E(W_j) = \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_{k=1}^K (t_{ik} - y_{ik})^2 \quad (6)$$

علماً أن K : عدد عصبونات طبقة الخرج، N : عدد أنماط التدريب (iteration).
 j : تعبر عن كل مسح لكامل البيانات (epoch)
 ويتميز للخطأ بالشكل التالي:

$$e_i(W_j) = \sum_{k=1}^K (t_{ik} - y_{ik}) \quad (7)$$

وبالتالي يكتب تابع الكلفة بالشكل التالي:

$$E(W_j) = \frac{1}{2} \sum_i^N e_i^2 \quad (8)$$

وحسب طريقة نيوتن تكون الحلول المتتالية معرفة وفق العلاقة التالية:

$$W_{j+1} = W_j - H_j^{-1} g_j \quad (9)$$

حيث أن: $H_j = \nabla^2 E(W)|_{W=W_j}$ وعندما نفترض أن $E(W_j)$ هو تابع مجموع المربعات:

$$E(W_j) = \frac{1}{2} \sum_i^N e_i^2 = e' e \quad (10)$$

عندها يكون العنصر ذو الترتيب j للمشتق معرف كما يلي:

$$[\nabla E(w)]_j = \frac{\partial E(W_j)}{\partial w_j} = 2 \sum_{i=1}^N e_i \frac{\partial e_i(x)}{\partial w_j} \quad (11)$$

وبالتالي يكون شكل مصفوفة المشتق كما يلي:

$$\nabla E(w) = 2J^T(W)e(W) \quad (12)$$

حيث أن:

$$J(W) = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_1(W)}{\partial W_1} & \frac{\partial e_1(W)}{\partial W_2} & \dots & \frac{\partial e_1(W)}{\partial W_n} \\ \frac{\partial e_2(W)}{\partial W_1} & \frac{\partial e_2(W)}{\partial W_2} & \dots & \frac{\partial e_2(W)}{\partial W_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial e_N(W)}{\partial W_1} & \frac{\partial e_N(W)}{\partial W_2} & \dots & \frac{\partial e_N(W)}{\partial W_n} \end{bmatrix} \quad (13)$$

n : عدد الأوزان ضمن الشبكة العصبونية.

حيث تدعى $J(W)$ بمصفوفة جاكوبي.

ويتم كتابة مصفوفة هيسيان بطريقة تقريبية وفق العلاقة التالية:

$$\nabla^2 E(W) \cong 2J^T(W)J(W) \quad (14)$$

وبالتالي حسب طريقة Gauss_Newton يمكن كتابة ماييلي:

$$W_{j+1} = W_j - [2J^T(W_j)J(W_j)]^{-1} 2J^T(W_j)e(W_j) \quad (15)$$

$$= W_j - [J^T(W_j)J(W_j)]^{-1} J^T(W_j)e(W_j) \quad (16)$$

ونلاحظ أن طريقة نيوتن القياسية ليست بحاجة الى حساب المشتق الثاني. وأحد

مشاكل Gauss_Newton أن مصفوفة Hessian $H = J^T J$ قد لا تملك مقلوب

لذلك نستخدم مصفوفة تقريبية لـ Hessian معرفة بالشكل التالي:

$$G = H + \mu I \quad (16)$$

μ : برامتر ثابت يضاف في حال كانت H تملك محدداً يساوي الصفر وهو رقم صغير جداً

لا يؤثر على قيمة العناصر الموجودة في المصفوفة H

وبالتالي تعطى الأوزان لهذه الخوارزمية كما يلي:

$$W_{j+1} = W_j - [J^T(W_j)J(W_j) + \mu I]^{-1} J^T(W_j)e(W_j) \quad (17)$$

$$\Delta W_k = -[J^T(W_j)J(W_j) + \mu I]^{-1} J^T(W_j)e(W_j) \quad (18)$$

حيث I هي المصفوفة الواحدة لها نفس درجة المصفوفة H ، J هي مصفوفة Jacobian

لأخطاء الخرج m المتعلقة بالأوزان n للشبكة العصبونية.

11- الخوارزمية المقترحة من أجل تقدير القيم المفقودة والشاذة:

إذا كان لدينا X_{ij} متحولات مستقلة (K متحول مستقل يتألف كلاً منها من n قيمة)

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, \dots, k$$

وكان y_i متحول تابع:

فإن الخوارزمية المقترحة توصف بالخطوات التالية:

1- حذف جميع الأسطر من البيانات التي توجد فيها قيم مفقودة في أحد المتحولات المستقلة.

2- بناء شبكة عصبونية متوافقة مع البيانات المتبقية بعد عملية الحذف بجعل المداخل هي X_{ij} والخرج هو y_i .

3- تدريب الشبكة العصبونية والحصول على شبكة مدربة واستخلاص قيم الأوزان.

4- ترميم قاعدة المعطيات قيمة تلو أخرى فإذا فرضنا أن المتغير رقم r ونريد التنبؤ بالقيمة رقم i تكون المعالجة كما يلي:

$$n_1 = \min(X_{ir})$$

$$n_2 = \max(X_{ir})$$

تقسيم المجال $[n_1 - n_2]$ إلى عدد من القيم m بخطوة ثابتة مقدارها α وكلما كانت m كبيرة كانت العملية أدق وأفضل وأكثر شفافية.

نثبت باقي قيم المتحولات الأخرى على وضعها في سطر المقابل للقيمة التي يتم التنبؤ بها في المتغير r ونحصل على مصفوفة جديدة نتيجة التقسيم كما يلي:

$$\begin{bmatrix} X_{i1} & \dots & n_1 & X_{ik} \\ X_{i1} & \dots & n_1 + \alpha & X_{ik} \\ X_{i1} & \dots & n_1 + 2\alpha & X_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{i1} & \dots & n_2 & X_{ik} \end{bmatrix}$$

نعوض المصفوفة في الشبكة العصبونية المدربة:

$$Z_i = \hat{y}_i - y_i, i = 1, 2, \dots, m$$

التقدير الأمثل لـ X_{ir} هي لقيمة التي تقابل $\min(Z_i)$

التطبيق العملي:

تناولت الدراسة بيانات الطقس في خمس محطات في مدينة حلب (محطة الشيخ سعيد جنوب حلب_ محطة طريق المسلمية شمال حلب_ محطة مركز المدينة وسط حلب _ محطة حلب الجديدة غرب حلب_ محطة المطار المدني شرق حلب) ابتداءً من شهر كانون الأول من عام 2009 حتى شهر أيار من عام 2011 حيث اعتمدنا الحرارة الداخلية متغيراً تابعاً واعتمدنا أربع متغيرات مستقلة تؤثر على الحرارة الداخلية، وهي درجة الحرارة وسرعة الرياح والرطوبة الجوية

يمكن تعريف متغيرات الدراسة بالجدول التالي:

الجدول (1.3) متغيرات الدراسة

المتغير	الرمز	
التابع	y	الحرارة الداخلية
المستقل	X_1	درجة الحرارة
المستقل	X_2	سرعة الرياح
المستقل	X_3	اتجاه الرياح
المستقل	X_4	الرطوبة الجوية

استخدام الشبكات العصبونية لترميم قواعد البيانات عبر تقدير المدخلات اعتماداً على قيم المخرجات بأقل نسبة خطأ ممكنة

بحذف بعض القيم الموجودة في المتغير المستقل الاول وتطبيق الخوارزمية المقترحة تم الحصول على النتائج التالية:

رقم القيمة	X1(69)	X1(100)	X1(116)
القيمة الحقيقية	23.962	11.377	17.167
القيمة المقدرة	24.10501	11.25668	17.20229
دقة التقدير	0.994067	0.989424	0.997177

النتائج:

تم ترميم قاعدة البيانات من خلال تقدير القيم المفقودة وذلك بتدريب الشبكة العصبونية وتطبيق الخوارزمية المقترحة. حصلنا على دقة عالية في تقدير القيم المفقودة تصل الى احتمال الحدث الأكيد.

التوصيات:

- 1- الاعتماد على الشبكات العصبونية في معالجة القيم المفقودة والمشاكل الإحصائية الأخرى.
- 2- اعتماد طريقة الشبكات العصبونية في بناء النماذج الرياضية واستخدامها لأغراض التنبؤ.

المراجع:

- [1]– Michael Negnevitsky, 2005- **Artificial Intelligence A Guide to Intelligent Systems- 2^{ed} Edition**.Addison-Wesley p435 .
- [2] Zurada M. Jacek (1995) , " **Introduction to Artificial Neural Systems**" , PWS.
- [3]–Ben Coppin,2004-**Artificial Intelligence Illuminated-** Jones And Bartlett Publishers
- [4] Sivanandam S N, Sumathi S, Deepa S N.,2006-**introduction to Neural Networks Using Matlab 6.0**-Tata Mcgraw_Hill Publishing Company Limited New Delhi.p549.
- [5] _ معالجة المعطيات المفقودة والشاذة من خلال تطوير 2019شلاف فاطمة،
خوارزمية شبكة ذكاء صناعي متقدمة _ جامعة حلب، سوريا، رسالة دكتوراه.
Department of Information Technology Computer Systems
- [6] B. Schiele and A. Waibel. " **Gaze tracking based on face-color**". Presented in International Workshop on Face and Gesture Recognition, Zurich, July 2001
- [7]- Martin T. Hagan. Hagan, Howard B. Demuth, Mark Hudson Beale, Orlando De Jesús.,1996-**Neural Network Design 2^{ed} Edition**. Martin T. Hagan.

حساب التكاملات المضاعفة بالاعتماد على كثيرات حدود

تشبيبيشيف

بإشراف: أ.د. حامد عباس

إعداد الباحثة: ورود محمد إبراهيم

ملخص البحث:

يهتم هذا البحث بدراسة التكاملات المضاعفة للدوال اعتماداً على مبدأ غاوس، والذي يعتمد على جذور كثيرات الحدود المتعامدة لتشبيبيشيف في منطقة المكعب $[-1, +1]^n$ في الفضاء R^n ، ودالة الوزن $\omega(x) = \frac{1}{r}$; $r = \sqrt{\prod_{i=1}^n (1-x_i^2)}$ ، حيث أوجدنا كثيرات الحدود المتعامدة من نوع تشبيبيشيف في فضاءات متعددة الأبعاد:

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\alpha_i}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{\alpha_i}{\alpha_i - k} \binom{\alpha_i - k}{k} 2^{\alpha_i - 2k - 1} x_i^{\alpha_i - 2k} \right), x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ثم أوجدنا جذورها وعددها N ، وفرضناها هي النقاط التكاملية للعلاقات التكعيبية، والتي من خلالها حسبنا القيم التقريبية للتكاملات المتكررة، وأوجدنا المبرهنات اللازمة مع الإثبات، التي أعطتنا ثوابت العلاقات التقريبية التكاملية التالية:

$$C_j = \frac{\pi^n}{T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n - 1}(x^j) \beta} ; \beta = \frac{\partial^n T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(x^j)}{\prod_{i=1}^n \partial x_i}, j = 1, 2, \dots, N$$

التي كانت تحسب من خلال حل جمل من المعادلات غير الخطية، حيث إن لكل منطقة تكاملية ثوابت خاصة بها .

الكلمات المفتاحية: العلاقات التكعيبية، دوال تشيبيشيف المتعامدة، التكاملات المضاعفة التقريبية.

Computing mulipleed integrals based on Chebyshev polynomials

Abstract

This research is concerned with studying the mulipleed integrals of functions based on Gauss's principle, which is based on the roots of chebyshev's orthogonal polynomials in the cubic $[-1, +1]^n$ space R^n , and the weight function $\omega(x) = \frac{1}{r}$; $r = \sqrt{\prod_{i=1}^n (1-x_i^2)}$, where we found the orthogonal polynomials of the chebyshev type in multidimensional spaces:

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\alpha_i}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{\alpha_i}{\alpha_i - k} \binom{\alpha_i - k}{k} 2^{\alpha_i - 2k - 1} x_i^{\alpha_i - 2k} \right), x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

then we found their roots, and their number is N, and assumed that they are the integral points of the cubic relations, from which we calculated the approximate values of the mulipleed integrals, and found the necessary theorems with proof, which gave us the constants of the following approximate integral relations:

$$C_j = \frac{\pi^n}{T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n - 1}(x^j) \beta} ; \beta = \frac{\partial^n T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(x^j)}{\prod_{i=1}^n \partial x_i}, j = 1, 2, \dots, N$$

which were calculated by solving sets of nonlinear equations, since each e integral region has its own constants.

keywords: Cubic relations, orthogonal Chebyshev functions, approximate mulipleed integrals.

1- مقدمة البحث:

تعريف: [2,5]

نقول عن الدالتين $f(x), g(x)$ الحقيقيتين المعرفتين والقابلتين للمكاملة على المنطقة Ω أنهما متعامدتان على تلك المنطقة إذا كان:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{\Omega} \omega(x) f(x) g(x) dx = 0 \quad (1)$$

بدالة وزن $\omega(x)$.

تم حساب التكاملات التقريبية الاحادية للدوال بطرائق متعددة أخرى [3,6]، حيث استخدم غاوس الطرائق التقريبية لحساب التكاملات على المجال $[-1, +1]$ واعتبر كثيرات حدود ليجندر بدالة وزن $\omega(x)$ ، حيث إن علاقة غاوس التربيعية من الشكل التالي [1,4,7]:

$$\int_{-1}^{+1} \omega(x) f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) \quad (2)$$

سُميت النقاط x_i عقد العلاقة التربيعية، أو نقاط استكمال العلاقة التربيعية، وأحيانا تدعى نقاط ارتكاز العلاقة التربيعية، و C_i هي الثوابت الموافقة لتلك النقاط x_i ، و $\omega(x)$ دالة الوزن. يتم تحديد الثوابت C_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، حيث تتحول العلاقة (2) الى مساواة مضبوطة (صحيحة تماما) من أجل كل كثيرة حدود جبرية درجتها لا تتجاوز $2n-1$ ، أي من أجل: $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}$ حيث إن المجال التكاملي هو $[-1, +1]$ ولدينا $2n$ من المجاهيل هي: C_i ، X_i ؛ $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

1-1. استخدام كثيرات حدود تشبيشيف:

تعريف:

نرمز لكثيرات حدود تشيبيشيف من الدرجة n بمتحول واحد بالرمز $T_n(x)$ وهي كثيرات حدود متعامدة على المجال $[-1, +1]$ ودالة وزن $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، وتعطى وفق بالشكل الاتي:

[10,8]

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k-1} x^{n-2k} \quad (3)$$

حيث إن: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ و $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ تعني أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي n .

تم اعتبار x_j هي جذور كثيرات حدود تشيبيشيف وبناءً على ذلك تم التوصل الى العلاقة التقريبية:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \cong \sum_{j=1}^n C_j f(x_j) \quad (4)$$

حيث الثوابت هي: [9]

$$C_j = \frac{\pi}{T_{n-1}(x_j)T'_n(x_j)} \quad ; j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

2- هدف البحث وطريقته:

يهدف هذا البحث الى:

- حساب التكاملات المضاعفة للدوال بشكل تقريبي اعتماداً على مبدأ غاوس، باستخدام

جذور كثيرات الحدود المتعامدة لتشبيشيف في منطقة المكعب $[-1, +1]^n$ في الفضاء R^n ، ودالة الوزن ، من خلال ايجاد كثيرات الحدود المتعامدة من نوع تشيبيشيف في

فضاءات متعددة الأبعاد وحساب جذورها، والتي نعتبرها النقاط التكاملية للعلاقات التكعيبية .

- التوصل الى الصيغ التي تعطينا ثوابت العلاقات التقريبية التكاملية، بالاعتماد على مجموعة من المبرهنات والتي يتم ايجادها مع الاثبات.

3- مشكلة البحث:

- ايجاد كثيرات الحدود المتعامدة من نمط تشيبيشيف في فضاءات متعددة الأبعاد.
- حساب جذور كثيرات الحدود المذكورة واعتبارها نقاط العلاقة التكعيبية.
- التوصل الى مبرهنات تعطينا ثوابت العلاقات التقريبية التكاملية واثباتها.
- طرح بعض التطبيقات العددية.

4- النتائج ومناقشتها:

4-1. مفاهيم أساسية [4] :

العلاقة التقريبية لحساب التكاملات المضاعفة تسمى العلاقة التكعيبية و نكتب بالشكل التالي :

$$\int_{\Omega} \omega(x) f(x) dx \cong \sum_{j=1}^N C_j f(x^j) \quad (6)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), dx = dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n$$

حيث إن Ω منطقة في الفضاء R^n ، و $\omega(x)$ دالة الوزن و $f(x)$ الدالة المكاملة وإشارة التكامل على المنطقة Ω تعني التكامل المضاعف n مرة من الفضاء R^n على المنطقة Ω ، و C_j الثوابت الموافقة للنقاط x^j التي هي جذور كثيرات الحدود المتعامدة في المنطقة Ω و N عدد هذه الجذور، العلاقة السابقة صحيحة من أجل كل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2n-1$.

2-4. حساب التكاملات باستخدام جذور كثيرات الحدود تشيبيشيف المتعامدة بمتحولين على الفضاء R^2 .

ان كثيرات حدود تشيبيشيف المتعامدة بمتحولين على المربع $[-1, +1]^2$ الفضاء R^2 تعطى بالصيغة التالية: [3]

$$T_{nm}(x, y) = \left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k-1} x^{n-2k} \right) \times \left(\sum_{L=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} (-1)^L \frac{m}{m-L} \binom{m-L}{L} 2^{m-2L-1} y^{m-2L} \right)$$

$$= T_n(x) T_m(y) \quad (7)$$

حيث إن دالة الوزن هي : $\omega(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$

نقوم بإيجاد جذور كثيرات الحدود هذه على اعتبار أن جذور كثيرات الحدود هذه بمتحول واحد معلومة بدلالة x وعلى أساسها نحسب y ، ثم نحدد النقاط التكاملية (x, y) ، ونوجد الثوابت الموافقة بالاعتماد على المبرهنة التالية:

مبرهنة 1: بفرض أن $T_{n,m}(x, y)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق الجزئي على المنطقة $[-1, +1]^2$ ، وكانت (x_j, y_j) هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $T_{n,m}(x, y) = 0$ ، فعند ذلك ثابته العلاقة التكعيبية (6) تكتب بالشكل التالي:

$$C_{ij} = \frac{\pi^2}{T_{n-1}(x_i, y_j) \frac{\partial^2 T_{nm}(x_i, y_j)}{\partial x \partial y}} \quad (8)$$

الاثبات: العلاقة (6) في هذه الحالة تصبح على الشكل التالي:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} f(x, y) dx dy \cong \sum_{i,j=1}^{n,m} C_{ij} f(x_i, y_j) \quad (9)$$

ننطلق من التكامل الايسر من التكامل وحسب العلاقة (4)

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} f(x, y) dx dy \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \left[\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dx \right] dy \\ & \cong \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \left[\sum_{i=1}^n C_i f(x_i, y) \right] dy \\ & = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\pi}{T_{n-1}(x_i) T'_n(x_i)} f(x_i, y) \right] dy \\ & = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\pi}{T_{n-1}(x_i) T'_n(x_i)} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} f(x_i, y) dy \right] \\ & = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\pi}{T_{n-1}(x_i) T'_n(x_i)} \left[\sum_{j=1}^m \frac{\pi}{T_{m-1}(y_j) T'_m(y_j)} f(x_i, y_j) \right] \right] \\ & = \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{\pi^2}{T_{nm-1}(x_i, y_j) \frac{\partial^2 T_{nm}(x_i, y_j)}{\partial x \partial y}} f(x_i, y_j) \end{aligned}$$

$$C_{ij} = \frac{\pi^2}{T_{nm-1}(x_i, y_j) \frac{\partial^2 T_{nm}(x_i, y_j)}{\partial x \partial y}} \quad \text{منه نستنتج أن :}$$

ملاحظة: كما هو واضح أن الثوابت C_{ij} مرتبطة فقط بكميات حدود تشيبيشيف ولا علاقة لها بالدالة $f(x, y)$.

مثال 1: استخدم العلاقة التكرعية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية لتكامل الدالة $f(x, y) = 3$ على المربع $[-1, +1]^2$ في الفضاء R^2 معتبرا $n = m = 1$.

الحل: حسب العلاقة التكرعية (9) نجد:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{3}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} dx dy \cong C_{11} f(x_1, y_1)$$

وباعتبار أن $n = m = 1$ فإننا نستخدم كثيرة حدود تشيبيشيف T_{11} أي:

$$T_{11}(x, y) = xy$$

و جذر كثيرة الحدود هذه هو:

$$(x_1, y_1) = (0, 0)$$

نحسب قيم الدالة المفروضة عند النقاط، فنجد: $f(0, 0) = 3$

و بالاعتماد على العلاقة (8) يكون الثابت المقابل لنقطة العلاقة التكرعية هو:

$$C_{11} = \pi^2$$

و أخيرا فإن قيمة التكامل تساوي:

$$I = 3(\pi^2) = 3\pi^2$$

و القيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{3}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} dx dy = 3\pi^2$$

العلاقة صحيحة تماما من أجل كل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2(m+n)-1=3$ و

وفي تمريننا هذا هي كثيرة حدود من الدرجة الصفرية مما يؤكد صحة كلامنا.

3-4. حساب التكاملات الثلاثية باستخدام جذور كثيرات حدود تشيبيشيف المتعامدة بثلاث متحولات على الفضاء R^3 .

اعتمادا على العلاقتين (3) و (7) يمكننا كتابة كثيرات الحدود المتعامدة تشيبيشيف بثلاث متحولات على الفضاء R^3 بالشكل التالي :

$$T_{nmL} = \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k-1} x^{n-2k} \right) \times$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^r \frac{m}{m-r} \binom{m-r}{r} 2^{m-2r-1} y^{m-2r} \right) \times \left(\sum_{w=0}^{\lfloor \frac{L}{2} \rfloor} (-1)^w \frac{L}{L-w} \binom{L-w}{w} 2^{L-2w-1} z^{L-2w} \right)$$

$$= T_n(x) \cdot T_m(y) \cdot T_L(z) \quad (10)$$

حيث إن دالة الوزن هي :

$$\omega(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}}$$

نقوم بإيجاد جذور كثيرات الحدود هذه واعتبارها هي النقاط التكاملية (x_i, y_j, z_k) ، ونوجد الثوابت الموافقة.

مبرهنة 2 : بفرض أن $T_{n,m,L}(x, y, z)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق الجزئي على المنطقة $[-1, +1]^3$ ، وكانت (x_i, y_j, z_k) هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $T_{n,m,L}(x, y, z) = 0$ ، فعند ذلك ثابِت العلاقة التكعيبيية (6) تكتب بالشكل التالي:

$$C_{ijk} = \frac{\pi^3}{T_{mnL-1}(x_j, y_j, z_k) \frac{\partial^3 T_{nmL}(x_i, y_j, z_k)}{\partial x \partial y \partial z}} \quad (11)$$

الاثبات: العلاقة (6) في هذه الحالة تصبح على الشكل التالي:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}} f(x, y, z) dx dy dz$$

$$\cong \sum_{i=1, j=1, k=1}^{m, n, L} C_{ijk} f(x_i, y_j, z_k) \quad (12)$$

ننطلق من التكامل الايسر من التكامل وحسب العلاقتين (9و4)

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}} f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \left[\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

$$\cong \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \left[\sum_{i=1, j=1}^{n, m} \frac{\pi^2}{T_{mn-1}(x_i, y_j)} \frac{\partial^2 T_{nm}(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} f(x_i, y_j, z) \right] dz =$$

$$\sum_{i=1, j=1}^{n, m} \left[\frac{\pi^2}{T_{mn-1}(x_j, y_j)} \frac{\partial^2 T_{nm}(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} f(x_i, y_j, z) dz \right]$$

$$= \sum_{i=1, j=1}^{n, m} \left[\frac{\pi^2}{T_{mn-1}(x_j, y_j)} \frac{\partial^2 T_{nm}(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} \sum_{k=1}^L \frac{\pi}{T_{L-1}(z_k) T_L'(z_k)} f(x_i, y_j, z_k) \right]$$

$$= \sum_{i, j, k=1}^{n, m, L} \frac{\pi^3}{T_{mnL-1}(x_i, y_j, z_k)} \frac{\partial^3 T_{nmL}(x_i, y_j, z_k)}{\partial x \partial y \partial z} f(x_i, y_j, z_k)$$

منه نستنتج أن :

$$C_{ijk} = \frac{\pi^3}{T_{mnL-1}(x_i, y_j, z_k) \frac{\partial^3 T_{mnL}(x_i, y_j, z_k)}{\partial x \partial y \partial z}}$$

ملاحظة: كما هو واضح أن الثوابت مرتبطة فقط بكثيرات حدود تشيبيشيف ولا علاقة لها بالدالة $f(x, y, z)$.

مثال 2: استخدم العلاقة التكميلية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية لتكامل الدالة $f(x_1, x_2, x_3) = 7$ على المكعب $[-1, +1]^3$ في الفضاء R^3 معتبرا $n = m = L = 1$.
الحل: حسب العلاقة التكميلية (12):

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{7}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}} dx dy dz \cong C_{111} f(x_1, y_1, z_1)$$

وباعتبار أن $n = m = L = 1$ فإننا نستخدم كثيرة حدود تشيبيشيف T_{111}

$$T_{111}(x, y, z) = xyz$$

و جذر كثيرة الحدود هذه هو:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

نحسب قيم الدالة المفروضة عند النقاط، فنجد: $f(0, 0, 0) = 7$
و بالاعتماد على العلاقة (11) يكون الثابت المقابل لنقطة العلاقة التكميلية هو:

$$C_{111} = \pi^3$$

و أخيرا فإن قيمة التكامل تساوي:

$$I = 7(\pi^3) = 7\pi^3$$

و القيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{7}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}} dx dy dz = 7\pi^3$$

نلاحظ أن العلاقة صحيحة تماما.

4-4. حساب التكاملات المضاعفة في الحالة العامة على الفضاء R^n .

اعتمادا على العلاقات (3) و (7) و (10) يمكننا كتابة كثيرات الحدود المتعامدة من نوع

تشيبيشيف بـ n من المتحولات على الفضاء R^n . بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x) &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\alpha_i}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{\alpha_i}{\alpha_i - k} \binom{\alpha_i - k}{k} 2^{\alpha_i - 2k - 1} x_i^{\alpha_i - 2k} \right), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \prod_{i=1}^n T_{\alpha_i}(x_i). \end{aligned} \quad (13)$$

$$\cdot \quad \omega(x) = \frac{1}{r}; \quad r = \sqrt{\prod_{i=1}^n (1 - x_i^2)} : \text{ حيث إن دالة الوزن هي :}$$

وتصبح العلاقة التكميلية في هذه الحالة:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n (1 - x_i^2)}} f(x) dx &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} C_{i_1 i_2, \dots, i_n} f(x^i); x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ ; dx &= dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n, \Omega = [-1, +1]^n \end{aligned} \quad (14)$$

نقوم بإيجاد جذور كثيرات الحدود هذه واعتبارها هي النقاط التكميلية $x^i = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \dots, x_n^{i_n})$ ، ونوجد الثوابت الموافقة.

مبرهنة 3: بفرض أن $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق الجزئي على المنطقة $[-1, +1]^n$ ، وكانت $i = 1, 2, \dots, N$ هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $T_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(x) = 0$ ، فعند ذلك ثابته العلاقة التكعيبية (14) تكتب بالشكل التالي:

$$C_i = \frac{\pi^n}{T_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n-1}(x^i) \left(\frac{\partial^n T_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(x^i)}{\prod_{i=1}^n \partial x_i} \right)^2} \quad (15)$$

$; i = 1, 2, \dots, N$

حيث إن N هو عدد جذور كثيرة حدود تشيبيشيف.

الاثبات: بنفس طريقة اثبات المبرهنات السابقة.

ملاحظة: كما هو واضح أن الثوابت C_i مرتبطة فقط بكثيرات حدود تشيبيشيف ولا علاقة لها بالدالة $f(x)$.

مثال 3: استخدم العلاقة التكعيبية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية لتكامل الدالة

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5 \text{ على المكعب } [-1, +1]^4 \text{ الفضاء } R^4 \text{ معتبرا } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$$

الحل: حسب العلاقة التكعيبية (14):

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{5}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)(1-x_4^2)}} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \cong C_{1111} f(x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1)$$

وباعتبار أن $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$ فإننا نستخدم كثيرة حدود تشيبيشيف T_{1111}

$$T_{1111}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4$$

و جذر كثيرة الحدود هذه هو:

$$(x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1) = (0, 0, 0, 0)$$

نحسب قيم الدالة المفروضة عند النقاط، فنجد: $f(0, 0, 0, 0) = 5$
و بالاعتماد على العلاقة (15) يكون الثابت المقابل لنقطة العلاقة التكعيبية هو:

$$C_{1111} = \pi^4$$

و أخيرا فإن قيمة التكامل تساوي:

$$I = 5(\pi^4) = 5\pi^4$$

و القيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{5}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)(1-x_4^2)}} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 5\pi^4$$

نلاحظ أن العلاقة صحيحة تماما.

الاقتراحات والتوصيات:

1-تشكيل علاقات تقريبية للدوال المثلثية.

2-العلاقات التقريبية للتكاملات المضاعفة بمتحولات عقدية.

3- استخدام مبدأ غاوس في المناطق التكاملية الكروية و الناقصية.

المراجع المستخدمة:

المراجع العربية:

[1]-د. حامد عباس، التحليل العددي2، جامعة حمص، مديرية الكتب والمطبوعات، 2018.

[2]-د. إبراهيم إبراهيم، الدوال الخاصة، جامعة حمص، 2018.

المراجع الاجنبية:

[3]. Richard L. Burden, J. Douglas Fairs Numerical Analysis ,
9th _edition,2005.

[4]. Mysovskikh.I.P. Interpolation cubature formulas Nowak . 1981
Mowscou.336.p.

[5].cege.g.1962 orthogonal polynomials Mowscou.500.p.

[6].Krilov . _approximation Numerical for integration. Nawka
Mowscou.500p-1967

[7].Orive, R., santos, C.J., & Spalevic, M. M.,(2020). Cubature formulae
for the Gaussian weight some old and new rules . Electronic Transitions
on Numerical Analysis, 5(2020), 426-438.

[8].Kolmogorof A.N, (1989) principles of function theory and functional
analysis, Moscow.

[9]. Mysovskikh.I.P , (2000) Lectures in Numerical Analysis ,sant peterpurg unver.

[10].Stefan Paszkowski , (1975) Numerical applications of polynomials and Chebyshev series ,warsow.

استقرار حل جملة معادلات تفاضلية عشوائية من مرتبة كسرية

ايمان احمد حسين¹

أ.د. سامح العرجه²

ملخص البحث:

قدمنا في هذا البحث بعض المفاهيم والتعاريف الأساسية حول موضوع التفاضل والتكامل الكسري، حيث عرفنا مشتق كابتو الكسري، تكامل ريمان-ليوفيل الكسري، كما ذكرنا بعض الخواص التي يحققها كل منهما.

ذكرنا تعريف الاستقرار العشوائي، الاستقرار العشوائي بشكل تقاربي، الاستقرار الأسّي بشكل شبه أكيد، الاستقرار الأسّي بالعزم من المرتبة p للحل الصفري لجملة معادلات تفاضلية عشوائية كسرية.

عرفنا صيغة إيتو التفاضلية لمشتق كابتو من أجل المعادلات التفاضلية العشوائية الكسرية، ومن أجل جملة معادلات تفاضلية عشوائية كسرية.

كلمات مفتاحية: مشتق كابتو، تكامل ريمان-ليوفيل، الاستقرار العشوائي، الاستقرار بالعزم، المؤثر المولد، العملية العشوائية، الحركة البراونية، التوقع.

Stability Solution of System of Fractional Stochastic Differential Equations

Abstract

In this research, we introduced some basic concepts and definitions on the topic of fractional calculus, where we defined the Caputo fractional derivative, the Riemann– Liouville fractional integral, and we mentioned some of the properties that each of them holds.

We mentioned the definition of stochastically stable, stochastically asymptotically stable, almost surely exponentially stable, p th moment exponentially stable for trivial solution of system of fractional stochastic differential equations.

We defined Ito's formula of Caputo derivative for fractional stochastic differential equations and for system of fractional stochastic

Keywords: Caputo derivative, Riemann–Liouville integral, stochastically stable, moment stable, generator of, stochastic process, Brownian motion, expectation.

1- مقدمة:

على مر السنوات، بحثت نتائج عديدة في نظرية وتطبيقات المعادلات التفاضلية العشوائية. النماذج المعينة التي يتم اختيارها للدراسة غالباً تتذبذب نتيجة عامل الضجيج المؤثر عليها. إن تمديد هذه النماذج أساسي للنماذج العشوائية المعتبرة والتي تحوي على حركة براونية وعمليات عشوائية. إن نمذجة معظم المسائل في الحياة الواقعية باستخدام المعادلات التفاضلية العشوائية الكسرية يكون أفضل من المعادلات العادية. وهكذا توجد أهمية كبيرة لشرح التأثيرات العشوائية في الجمل الكسرية. بعد إيجاد حل جملة معادلات تفاضلية عشوائية، يجب التأكد من كون هذا الحل مستقراً أم لا، حيث أن خاصية الاستقرار من أهم خواص حل الجملة المدروسة إذ تبنى عليه نتائج عدة فيما بعد.

سندرس في هذا البحث استقرار حل جملة معادلات تفاضلية عشوائية من مرتبة كسرية من الشكل:

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^{\alpha} X(t) = A X(t) + g(t, X(t)) \frac{dW(t)}{dt} & ; t > 0, \alpha \in (0,1] \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

حيث $\{W(t) ; t \in [0, +\infty)\}$ تابع قابل للقياس، $g: [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ الحركة البراونية السلمية المعيارية على الفضاء الاحتمالي التام $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ مع الترشيح $F = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty[}$

وذلك بالاعتماد على مبدأ ليبانوف في الاستقرار. وضعنا عدة مبرهنات لإثبات الاستقرار العشوائي، الاستقرار العشوائي التقاربي، الاستقرار الأسّي بشكل شبه أكيد، الاستقرار الأسّي بالعزوم من المرتبة P للحل الصفري للجملة (3.1). وقد اعتمدنا في إثبات صحة هذه المبرهنات على طريقة ليبانوف المطورة، والتي تم تطويرها لتلائم دراسة استقرار حل جمل المعادلات التفاضلية العشوائية. تنص هذه الطريقة على أن حل الجملة (3.1) يكون مستقر عشوائياً إذا وجد تابع موجب تحديداً وكان المؤثر المولد للعملية العشوائية المتعلقة بهذا التابع سالب تحديداً.

2- أهمية البحث:

إن المعادلات التفاضلية العشوائية تعد أداة رياضية قوية لنمذجة الأنظمة المعقدة التي تخضع للضوضاء العشوائية، وإن دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية عشوائية كسرية أمر صعب ومعقد، نقدّم من خلال هذا البحث طريقة عملية لدراسة استقرار حل هذه الجملة.

3- مشكلة البحث:

يتم استخدام المعادلات التفاضلية العشوائية الكسرية في مجالات تطبيقية عديدة مثل نمذجة الأسعار في الأسواق المالية، وصف حركة جزيء في السائل، أنظمة التحكم، نمذجة الطقس، نمذجة السكان، نمذجة انتشار الأمراض وغير ذلك. تأتي مشكلة البحث لتوضح أهمية دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية عشوائية كسرية نتيجة التطبيقات الهائلة لمثل هكذا جمل معادلات في الحياة العملية.

4- هدف البحث:

يهدف هذا البحث إلى تقديم علاقة نستطيع من خلالها حساب صيغة إيتو التفاضلية لجملة معادلات تفاضلية عشوائية كسرية، وإيجاد صيغة للمؤثر المولد للعملية العشوائية، وتوظيف هاتين الصيغتين بالإضافة إلى توظيف طريقة لبيانوف المطورة لدراسة استقرار حل الجملة المدروسة.

5- أساسيات

تعريف (1): [3] يعرف تكامل ريمان-ليوفيل لتابع $f \in L^1([t_0, T], \mathbb{R})$ بالشكل:

$$I_{0^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

حيث $T, t_0, t \in \mathbb{R}^+, 0 < \alpha \leq 1$

خواص تكامل ريمان-ليوفيل: [5]

$$1) I_{0^+}^0 f(t) = f(t) \quad ; \quad I_{0^+}^0 = I$$

$$2) I_{0^+}^\alpha (\lambda f(t) \pm \beta g(t)) = \lambda I_{0^+}^\alpha f(t) \pm \beta I_{0^+}^\alpha g(t) \quad ; \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

حيث: $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, t_0, t, T \in \mathbb{R}^+, f(t), g(t) \in L^1([t_0, T], \mathbb{R})$

تعريف (2): [4] من أجل $f(t) \in L^1([0, T], \square)$ فإننا نعرف مشتق كابتو للتابع $f(t)$ بالعلاقة:

$${}^c D_{0^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

حيث: $T, t \in \square^+$, $0 < \alpha \leq 1$

خواص مشتق كابتو: [5]

$$1) {}^c D_{0^+}^\alpha f(t) = f(t)$$

$$2) {}^c D_{0^+}^\alpha (\lambda f(t) + \gamma g(t)) = \lambda {}^c D_{0^+}^\alpha f(t) + \gamma {}^c D_{0^+}^\alpha g(t) \quad ; \quad \lambda, \gamma \in \square$$

حيث: $T, t \in \square^+$, $0 < \alpha \leq 1$, $f(t), g(t) \in L^1([0, T], \square)$

ملاحظة (1): [5] يمكن تعريف مشتق كابتو لتابع $f(t) \in L^1([0, T], \square)$ بالعلاقة:

$${}^c D_{0^+}^\alpha f(t) = I_{0^+}^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \quad ; \quad n-1 < \alpha < n$$

بحالة خاصة من أجل $0 < \alpha < 1$ نحصل على:

$${}^c D_{0^+}^\alpha f(t) = I_{0^+}^{1-\alpha} \left(\frac{d}{dt} f(t) \right)$$

ملاحظة (2): [5] إنَّ مشتق كابتو لتكامل تابع ما $f(t)$ يعطي التابع نفسه أي أنَّ:

$${}^c D_{0^+}^\alpha I^\alpha f(t) = f(t)$$

حيث: $n \in \square$, $n < \alpha < n+1$, $t_0, t, T \in \square^+$, $f \in L^1([t_0, T], \square)$

مبرهنة (1): [5] من أجل $f(t) \in L^1([0, T], \square)$ تتحقق العلاقة التالية:

$$I_{0^+}^\alpha {}^c D_{0^+}^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{t^\kappa f^{(\kappa)}(0)}{\Gamma(\kappa+1)}$$

حيث: $t, T \in \square^+$

5- نتائج أساسية:

لتكن لدينا جملة معادلات تفاضلية عشوائية كسرية من الشكل:

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^{\alpha} X(t) = A X(t) + g(t, X(t)) \frac{dW(t)}{dt} & ; t > 0, \alpha \in (0, 1] \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

حيث $\{W(t) ; t \in [0, +\infty)\}$ تابع قابل للقياس، $g : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ الحركة البراونية السلمية المعيارية على الفضاء الاحتمالي التام $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ مع الترشيح $F = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty[}$

ملاحظة (3): [1]

إن $\chi_L = L^2(\Omega, \mathcal{F}_L, P)$ يمثل فضاء كل التوابع $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ، التي تكون قابلة للقياس على الترشيح $\mathcal{F}_L$ والقابلة للمكاملة بالوسط التربيعي، والتي نظيمها يعطى بالشكل $\|u\|^2 = E|u|^2$ حيث $t \in [0, +\infty)$.

تعريف ترشيح الجبر التام (3): [2]

ليكن $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضاءً احتمالياً تاماً ولتكن $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ جماعة من الجبور الجزئية التامة من $\mathcal{F}$ ، بحيث أن $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ و $s \leq t$. عندئذٍ نسمي $\{\mathcal{F}_t\}$ جماعة متزايدة من الجبور الجزئية التامة المعرفة على $(\Omega, \mathcal{F})$ أو ترشيح الجبور التامة على $(\Omega, \mathcal{F})$.

تعريف (4): [1] العملية $X : [0, \infty[\rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ تدعى عملية متكيفة مع الجبر التام $\mathcal{F}$ إذا كان $X(t) \in \chi_t$ حيث $t \in [0, +\infty)$

تعريف (5): [1] من أجل كل $X_0 \in \chi_0$ إن العملية X والتي هي متكيفة مع الجبر التام $\mathcal{F}$ تدعى حل لـ (3.1) إذا حققت من أجل كل $t \in [0, +\infty)$ المعادلة التكاملية:

$$(t) = X(t, X_0) = X_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} A X(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau, X(\tau)) dW(\tau) \right) \quad (3.2)$$

تمهيدية (1): [1] بفرض أن الشروط التالية محققة:

(1) يوجد ثابت $L > 0$ بحيث أنه من أجل جميع $X, \hat{X} \in \square^n$ ، $t \in [0, +\infty)$

$$|g(t, X) - g(t, \hat{X})| \leq L |X - \hat{X}|$$

(2) التابع $g(., 0)$ محدود بالقيمة العظمى:

$$\|g(t, 0)\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, +\infty)} |g(t, 0)| < \infty$$

التابع $g(., 0)$ قابل للمكاملة في L^2 أي $\int_0^{\infty} |g(t, 0)|^2 dt < \infty$

عندئذ الجملة (3.1) تملك حل وحيد $X(t) \in \chi_t = L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ المعطى بالعلاقة (3.2) من أجل كل $\alpha \in (0, 1)$.

تعريف (6): [1] الحل الصفري للمعادلة (3.3) يكون مستقر عشوائياً إذا وجد من أجل كل $\varepsilon \in (0, 1)$ ، $r > 0$ عدد $\delta = \delta(\varepsilon, r, 0) > 0$ بحيث إن: $t \geq 0 ; P\{|X(t)| < r\} \geq 1 - \varepsilon$ طالما أن $|X_0| < \delta$.

تعريف (7): [1] الحل الصفري للمعادلة (3.3) يكون مستقر عشوائياً وبشكل تقاربي إذا كان مستقر عشوائياً ومن أجل كل $\varepsilon \in (0, 1)$ يوجد $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ بحيث إن $P\{\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0\} \geq 1 - \varepsilon$ طالما أن $|X_0| < \delta_0$.

تعريف (8): [1] يكون الحل الصفري للمعادلة (3.3) مستقر أسياً بشكل شبه أكيد إذا كان $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |X(t)| < 0$.

تعريف (9): [1] يكون الحل الصفري للمعادلة (3.3) مستقر أسيًا بالعزم من المرتبة p إذا حققت الثابت الموجبة λ, c العلاقة $E(|X(t)|^p) \leq c |X_0|^p e^{-\lambda t}$ من أجل جميع $X_0 \in \mathbb{R}, t \geq 0$

تمهيدية (2): [1] ليكن $\mathcal{F}$ جبر تام ولتكن $\mathcal{F} \ni \{A_k\}$ و $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$ عندئذٍ $P\left\{\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k\right\} = 0$

صيغة ايتو لمشتق كابتو: [1] لتكن $t \geq 0; W(t)$ حركة بروان السلمية المعيارية ولتكن $Y \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ يرمز لأسرة جميع التوابع الحقيقية $Y(Z(\cdot), \cdot)$ المعرفة على $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ والتي تكون قابلة للمفاضلة مرتين بالنسبة لـ Z وقابلة للمفاضلة مرة واحدة بالنسبة لـ t . ليكن $dZ(t) = \tilde{f}(t)dt + \tilde{g}(t)dW(t)$ عملية ايتو لـ $t \geq 0; Z(t)$ حيث $\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ، $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

تمهيدية (3): [1] لتكن $Y(\cdot) = Y(Z(\cdot), \cdot) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ عندئذٍ عملية ايتو لـ $t \geq 0; Y(t)$ تعطى بالشكل:

$$dY(t) = \left[Y_t(Z(t), t) + Y_z(Z(t), t)\tilde{f}(t) + \frac{1}{2}Y_{zz}(Z(t), t)\tilde{g}^2(t) \right] dt + Y_z(Z(t), t)\tilde{g}(t)dW(t)$$

نتيجة (1): [1] من أجل $T > 0$ وبفرض $\tilde{X}(t)$ عملية ايتو لـ:

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^{\alpha} \tilde{X}(t) = f(t) + g(t) \frac{dW(t)}{dt} \\ \tilde{X}(0) = X_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

حيث: $f, g: [0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $t \in [0, T], \alpha \in (0, 1)$

حسب التمهيدية (1) فإن (3.3) تملك حل وحيد من أجل $t \in [0, T]$

$$\tilde{X}(t) = X_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) dW(\tau) \right) \quad (3.4)$$

إن (3.4) تملك شكل مكافئ

$$d\tilde{X}(t) = \tilde{X}'(t) = \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} f(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} g(\tau) dW(\tau) \right) dt \quad (3.5)$$

حيث $g(\cdot)(t-\cdot)^{\alpha-2} \in L^2[0, T]$ ، $f(\cdot)(t-\cdot)^{\alpha-2} \in L^1[0, T]$

مبرهنة (2): [1] لتكن $Y(\cdot) = Y(\tilde{X}(\cdot), \cdot) \in C^{2,1}(\square \times \square^+, \square)$ عندئذٍ عملية إيتو $Y(\cdot)$ تعطى بالشكل

$$\begin{aligned} dY(\tilde{X}(t), t) &= Y_t(\tilde{X}(t), t) dt + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} Y_{\tilde{X}}(\tilde{X}(t), t) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} f(\tau) d\tau dt \\ &+ \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} Y_{\tilde{X}}(\tilde{X}(t), t) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} g(\tau) dW(\tau) dt \end{aligned}$$

البرهان: حسب التمهيدية (3) والعلاقة (3.5) لدينا:

$$\begin{aligned} dY(\tilde{X}(t), t) &= \frac{\partial Y(\tilde{X}(t), t)}{\partial t} dt + \frac{\partial Y(\tilde{X}(t), t)}{\partial \tilde{X}} d\tilde{X}(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y(\tilde{X}(t), t)}{\partial \tilde{X}^2} (d\tilde{X}(t))^2 \\ dY(\tilde{X}(t), t) &= Y_t(\tilde{X}(t), t) dt + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} Y_{\tilde{X}}(\tilde{X}(t), t) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} f(\tau) d\tau dt \\ &+ \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} Y_{\tilde{X}}(\tilde{X}(t), t) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} g(\tau) dW(\tau) dt \end{aligned}$$

نتيجة (2): من أجل $T > 0$ وبفرض $\tilde{X}(t)$ عملية إيتو لـ:

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^{\alpha} \hat{X}(t) = A \hat{X}(t) + g(t) \frac{dW(t)}{dt} \\ \hat{X}(0) = X_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

حيث: $t \in [0, T], \alpha \in (0, 1)$.

حسب التمهيدية (1) فإن (3.6) تملك حل وحيد من أجل $t \in [0, T]$

$$\hat{X}(t) = X_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} A \hat{X}(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) dW(\tau) \right) \quad (3.7)$$

إن (3.7) تملك شكل مكافئ

$$d\hat{X}(t) = \hat{X}'(t) = \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} A \hat{X}(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} g(\tau) dW(\tau) \right) dt \quad (3.8)$$

حيث $g(\cdot)(t-\cdot)^{\alpha-2} \in L^2[0, T]$

مبرهنة (3): لتكن $Y(\cdot) = Y(\hat{X}(\cdot), \cdot) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ عندئذٍ عملية إيتو لـ $Y(\cdot)$

تعطى بالشكل

$$\begin{aligned} dY(\hat{X}(t), t) &= Y_t(\hat{X}(t), t) dt + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} Y_{\hat{X}}(\hat{X}(t), t) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} A \hat{X}(\tau) d\tau dt \\ &+ \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} Y_{\hat{X}}(\hat{X}(t), t) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} g(\tau) dW(\tau) dt \end{aligned}$$

البرهان: حسب التمهيدية (3) والعلاقة (3.8) لدينا:

$$dY(\hat{X}(t), t) = \frac{\partial Y(\hat{X}(t), t)}{\partial t} dt + \frac{\partial Y(\hat{X}(t), t)}{\partial \hat{X}} d\hat{X}(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y(\hat{X}(t), t)}{\partial \hat{X}^2} (d\hat{X}(t))^2$$

$$dY(\hat{X}(t), t) = Y_t(\hat{X}(t), t) dt + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} Y_{\hat{X}}(\hat{X}(t), t) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} A\hat{X}(\tau) d\tau dt$$

$$+ \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} Y_{\hat{X}}(\hat{X}(t), t) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} g(\tau) dW(\tau) dt$$

ملاحظة (4): [11] ليكن $\kappa > 0$ ، $S_\kappa = \{X(\cdot) \mid |X(\cdot)| < \kappa\}$ ، $a \wedge b$ يرمز لأصغر العددين a, b ، $a \vee b$ يرمز لأكبر العددين a, b ، $I_{\{\cdot\}}$ تابع المؤشر.

مبرهنة (4): بفرض أن الشروط الآتية محققة:

(1) يوجد ثابت $L > 0$ بحيث إنه من أجل جميع $X, \hat{X} \in \square^n$ ، $t \in [0, +\infty)$

$$|g(t, X) - g(t, \hat{X})| \leq L |X - \hat{X}|$$

(2) التابع $g(\cdot, 0)$ محدود بالقيمة العظمى:

$$\|g(t, 0)\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in [0, +\infty)} |g(t, 0)| < \infty$$

التابع $g(\cdot, 0)$ قابل للمكاملة في L^2 أي $\int_0^\infty |g(t, 0)|^2 dt < \infty$

(3) يوجد تابع موجب تحديداً $V \in (S_\kappa \times [0, +\infty), \square^+)$ بحيث إنه من أجل جميع $\alpha \in (0, 1)$ ،

$(X(t), t) \in (S_\kappa \times [0, +\infty))$ ، فإن المؤثر المولّد للعملية العشوائية $(X(t), t)$ يعطى بالشكل:

$$L^\alpha V(X(t), t) = V_t(X(t), t) + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} V_X(X(t), t) \int_0^t A X(\tau) (t-\tau)^{\alpha-2} d\tau \leq 0 \quad (3.9)$$

كما أن $V(0, t) = 0$ ، يوجد تابع غير متناقص μ يحقق: $V(X(t), t) \geq \mu(|X(t)|)$ من أجل جميع $(X(t), t) \in (S_\kappa \times [0, +\infty))$.

عندئذ يكون الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر عشوائياً.

البرهان: ليكن $\varepsilon \in (0, 1)$ ، $r > 0$ اختياري ويفرض أن $r < \kappa$. كون V مستمر و $V(0, t) = 0$ نستطيع إيجاد $\delta = \delta(\varepsilon, r) > 0$ يحقق:

$$\frac{1}{\varepsilon} \sup_{X \in S_\delta} V(X(t), t) \leq \mu(r) \quad (3.10)$$

واضح أن $\delta < r$. بنشيت $X_0 \in S_\delta$ ، وقت الخروج الأول η من S_r ، أي

$$\eta = \inf \{t > 0 ; X(t) \notin S_r\}$$

حسب المبرهنة (3) من أجل أي $t > 0$ لدينا صيغة إيتو التفاضلية لتابع ليبانوف:

$$\begin{aligned} dV(X(\eta \wedge t), \eta \wedge t) &= V_t(X(t), t) + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} V_x(X(t), t) \int_0^t A X(\tau) (t-\tau)^{\alpha-2} d\tau dt \\ &+ \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} V_x(X(t), t) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} g(X(\tau), \tau) dW(\tau) dt \end{aligned}$$

بمكاملة طرفي العلاقة السابقة نحصل على:

$$\begin{aligned} V(X(\eta \wedge t), \eta \wedge t) &= V(X_0, 0) + \int_0^{\eta \wedge t} V_s(X(s), s) ds \\ &+ \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta \wedge t} V_x(X(s), s) \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-2} A X(\tau) d\tau ds \\ &+ \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta \wedge t} V_x(X(s), s) \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-2} g(X(\tau), \tau) dW(\tau) ds \end{aligned}$$

$$V(X(\eta \wedge t), \eta \wedge t) = V(X_0, 0) + \int_0^{\eta \wedge t} L^\alpha V(X(\tau), \tau) d\tau \\ + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta \wedge t} V_X(X(s), s) \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-2} g(X(\tau), \tau) dW(\tau) ds \quad (3.11)$$

بأخذ التوقع لطرفي (3.11) مع ملاحظة أن $L^\alpha V \leq 0$ من أجل أي $t > 0$ و $\alpha \in (0,1)$ لدينا

$$\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \left| E \left(\int_0^{\eta \wedge t} V_X(X(s), s) \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-2} g(X(\tau), \tau) dW(\tau) ds \right) \right| \\ \leq \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} E \left| \int_0^{\eta \wedge t} V_X(X(s), s) \left(\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-2} g(X(\tau), \tau) dW(\tau) \right) ds \right| \\ \leq 0$$

لدينا:

$$EV(X(\eta \wedge t), \eta \wedge t) \leq V(X_0, 0) \quad (3.12)$$

نلاحظ بأن:

$$|X(\eta \wedge t)| = |X(\eta)| = r \quad ; \eta \leq t$$

حسب الشرط (3) من نص المبرهنة لدينا:

$$EV(X(\eta \wedge t), \eta \wedge t) \geq E \left[I_{\{\eta \leq t\}} V(X(\eta), \eta) \right] \geq \mu(r) P\{\eta \leq t\}$$

حسب (3.10) و (3.12) نحصل على أن $P\{\eta \leq t\} \leq \varepsilon$ بجعل $t \rightarrow \infty$ نجد $P\{\eta \leq \infty\} \leq \varepsilon$ بالتالي $P\{|X(t)| \leq r\} \geq 1 - \varepsilon$ من أجل جميع $t \geq 0$. حسب التعريف (6) يكون الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر عشوائياً.

مثال (1): ليكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية العشوائية كسرية:

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^{\alpha} X(t) = A X(t) + g(X, t) \frac{dW(t)}{dt} \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, g(X, t) = (b \sin X(t) \quad 0)^T, A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ حيث:}$$

والمطلوب ادرس استقرار حل الجملة المعطاة.

الحل: باختيار تابع لييانوف بالصورة: $V(X, t) = X^2(t)$ لدينا $V(X, t) \geq 0$

كما أن:

$$L^{\alpha} V(X(t), t) = V_t(X(t), t) + \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} V_x(X(t), t) \int_0^t A X(\tau) (t - \tau)^{\alpha - 2} d\tau$$

$$L^{\alpha} V(X(t), t) = \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2} X^2 \right) \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2} X^2 \right) ([t - \tau]_0^t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$L^{\alpha} V(X(t), t) = -\frac{1}{2} X^2 \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \leq 0$$

حسب المبرهنة (4) حل الجملة المعطاة مستقر عشوائياً.

مبرهنة (5): بفرض أن الشروط الآتية محققة:

(1) يوجد ثابت $L > 0$ بحيث إنه من أجل جميع $X, \hat{X} \in \mathbb{R}^n$ ، $t \in [0, +\infty)$

$$|g(t, X) - g(t, \hat{X})| \leq L |X - \hat{X}|$$

(2) التابع $g(., 0)$ محدود بالقيمة العظمى:

$$\|g(t, 0)\|_{\infty} = \text{ess sup}_{t \in [0, +\infty)} |g(t, 0)| < \infty$$

التابع $g(.,0)$ قابل للمكاملة في L^2 أي $\int_0^\infty |g(t,0)|^2 dt < \infty$

(3) التابع المتناقص الموجب تحديداً $V \in (\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty), \mathbb{R}^+)$ يحقق $L^\alpha V < 0$ حيث $L^\alpha V$ معرف في (3.9)، $\alpha \in (0,1)$ ، $V(0,t) = 0$ ، يوجد توابع غير متناقصة مستمرة μ_1, μ_2, μ_3 تحقق أن:

$$\mu_1(|X(t)|) \leq V(X(t), t) \leq \mu_2(|X(t)|)$$

$$L^\alpha V(X(t), t) \leq -\mu_3(|X(t)|)$$

من أجل جميع $(X(t), t) \in (S_\kappa \times [0, +\infty))$.

عندئذٍ الحل الصفري للجلمة (3.1) مستقر عشوائياً بشكل تقاربي.

البرهان: حسب المبرهنة (4) لدينا الحل الصفري للجلمة (3.1) مستقر عشوائياً. لنثبت الآن أنه من أجل $\varepsilon \in (0,1)$ ، يوجد $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ بحيث إن $P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0\right\} \geq 1 - \varepsilon$ طالما أن $|X_0| < \delta_0$.

لدينا التابع $V(X, t)$ يحقق $V(0, t) = 0$. كما أن توجد توابع $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in K$ تحقق أن:

$$\mu_1(|X(t)|) \leq V(X(t), t) \leq \mu_2(|X(t)|) \quad \& \quad L^\alpha V(X(t), t) \leq -\mu_3(|X(t)|) \quad (3.13)$$

من أجل جميع $(X(t), t) \in (S_\kappa \times [0, +\infty))$. كون $\varepsilon \in (0,1)$ اختياري حسب المبرهنة (4) يوجد $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ يحقق أن:

$$P\left\{|X(t)| < \frac{h}{2}\right\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4} \quad (3.14)$$

طالما $X_0 \in S_{\delta_0}$ بجعل $0 < \beta < |X_0|$ وباختيار $0 < \alpha < \beta$ صغير كفاية بحيث:

$$\frac{\mu_2(\alpha)}{\mu_1(\beta)} \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad (3.15)$$

بتعريف زمن التوقف:

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \inf \{t \geq t_0 : |X(t)| \leq \alpha\} \\ &\& \\ \tau_\kappa &= \inf \left\{t \geq t_0 : |X(t)| \geq \frac{\kappa}{2}\right\} \end{aligned}$$

حسب صيغة إيتو التفاضلية والعلاقة (3.13)، نحصل على أنه من أجل $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq EV \left(X(\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa \wedge t), \tau_\alpha \wedge \tau_\kappa \wedge t \right) \\ &= V(X_0, 0) + E \int_0^{\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa \wedge t} L^\alpha V(X(\tau), \tau) ds \\ &\leq V(X_0, 0) - \mu_3(\alpha) E(\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa \wedge t) \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$tP\{\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa \wedge t\} \leq E(\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa \wedge t) \leq \frac{V(X_0, 0)}{\mu_3(\alpha)}$$

وهذا يقتضي مباشرة أن: $P\{\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa < \infty\} = 1$

لكن حسب (3.14) لدينا $P\{\tau_\kappa < \infty\} \leq \frac{\varepsilon}{4}$ من هنا:

$$1 = P\{\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa < \infty\} \leq P\{\tau_\alpha < \infty\} + P\{\tau_\kappa < \infty\} \leq P\{\tau_\alpha < \infty\} + \frac{\varepsilon}{4}$$

مما ينتج:

$$P\{\tau_\alpha < \infty\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4} \quad (3.16)$$

باختيار θ كبير كفاية بحيث:

$$P\{\tau_\alpha < \theta\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

من هنا:

$$\begin{aligned} P\{\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa < \theta\} &\geq (P\{\tau_\alpha < \theta\} \cap P\{\tau_\kappa < \theta\}) \\ &\geq P\{\tau_\alpha < \theta\} - P\{\tau_\kappa < \theta\} \geq 1 - \frac{3\varepsilon}{4} \end{aligned} \quad (3.17)$$

لنعرف الآن زمني توقف:

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{cases} \tau_\alpha & ; \tau_\alpha < \tau_\kappa \cap \theta \\ \infty & ; \text{فيما عدا ذلك} \end{cases} \\ \& \tau_\beta = \inf \{t > \sigma : |X(t)| \geq \beta\} \end{aligned}$$

باستخدام صيغة إيتو ومن أجل أي $t \geq \theta$:

$$EV(X(\tau_\beta \wedge t), \tau_\beta \wedge t) \leq EV(X(\sigma \wedge t), \sigma \wedge t)$$

$$\begin{aligned} \text{لاحظ بأن: } EV(X(\tau_\beta \wedge t), \tau_\beta \wedge t) &= EV(X(\sigma \wedge t), \sigma \wedge t) = V(X(t), t) \\ \omega &\in \{\tau_\alpha \geq \tau_\kappa \wedge \theta\} \end{aligned}$$

نحصل على:

$$E\left[I_{\{\tau_\alpha < \tau_\kappa \wedge \theta\}} V(X(\tau_\beta \wedge t), \tau_\beta \wedge t)\right] \leq E\left[I_{\{\tau_\alpha < \tau_\kappa \wedge \theta\}} V(X(\tau_\alpha), \tau_\alpha)\right]$$

باستخدام (3.14) وحقيقة كون: $\{\tau_\beta \leq t\} \subset \{\tau_\alpha < \tau_\kappa \wedge \theta\}$ ، نحصل على:

$$\mu_1(\beta)P\{\tau_\beta \leq t\} \leq \mu_2(\alpha)$$

ومن (3.15)، ينتج:

$$P\{\tau_\beta \leq t\} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

بجعل $t \rightarrow \infty$ نجد:

$$P\{\tau_\beta \leq \infty\} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

باستخدام (3.17)، ينتج أن:

$$P\{\sigma < \infty \& \tau_\beta = \infty\} \geq P\{\tau_\alpha < \tau_\kappa \wedge \theta\} - P\{\tau_\beta < \infty\} \geq 1 - \varepsilon$$

لكن هذا يعني أن:

$$P\{\omega: \limsup_{t \rightarrow \infty} |X(t)| \leq \beta\} \geq 1 - \varepsilon$$

بما أن β اختياري، بالتالي يجب أن يكون:

$$P\{\omega: \limsup_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = 0\} \geq 1 - \varepsilon$$

إذاً الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر عشوائياً بشكل تقاربي.

مثال (2): ليكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية العشوائية كسرية:

$$\begin{cases} {}^c D_{0+}^\alpha X(t) = AX(t) + g(X, t) \frac{dW(t)}{dt} \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

$$\text{حيث: } \alpha = \frac{1}{4}, g(X, t) = (X_1(t) \ X_2(t))^T, A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

$$dW(t) = \begin{pmatrix} dW(t_1) & 0 \\ 0 & dW(t_2) \end{pmatrix}$$

والمطلوب ادرس استقرار حل الجملة المعطاة.

الحل: باختيار تابع لييانوف بالشكل: $V(X, t) = X_1^2(t) + X_2^2(t)$ وهو موجب تحديداً.

كما أنَّ: $\mu_1(|X|) \leq V(X, t) \leq \mu_2(|X|)$ ، لدينا:

$$L^\alpha V(X(t), t) = V_t(X(t), t) + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} V_x(X(t), t) \int_0^t A X(\tau) (t-\tau)^{\alpha-2} d\tau$$

$$L^\alpha V(X(t), t) = \frac{-\frac{3}{4}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \left(\frac{1}{3} X_1(t) X_2(t) + \frac{3}{4} X_1(t) X_2(t) \right) \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{7}{4}} d\tau$$

$$L^\alpha V(X(t), t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4} \right) X_1(t) X_2(t) \left(-t^{-\frac{3}{4}} \right)$$

$$L^\alpha V(X(t), t) \leq \frac{13}{12} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} [X_1^2(t) + X_2^2(t)] \left[-t^{-\frac{3}{4}} \right]$$

$$L^\alpha V(X(t), t) \leq -\frac{13}{12} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} [X_1^2(t) + X_2^2(t)] \left[t^{-\frac{3}{4}} \right] < -\mu_3(|X|)$$

حسب المبرهنة (5) حل الجملة المعطاة مستقر عشوائياً وبشكل تقاربي.

مبرهنة (6): بفرض أن الشروط الآتية محققة:

(1) يوجد ثابت $L > 0$ بحيث إنه من أجل جميع $X, \hat{X} \in \mathbb{R}^n$ ، $t \in [0, +\infty)$

$$|g(t, X) - g(t, \hat{X})| \leq L |X - \hat{X}|$$

(2) التابع $g(., 0)$ محدود بالقيمة العظمى:

$$\|g(t, 0)\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in [0, +\infty)} |g(t, 0)| < \infty$$

التابع $g(., 0)$ قابل للمكاملة في L^2 أي $\int_0^\infty |g(t, 0)|^2 dt < \infty$

(3) التابع $(\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty), \mathbb{R}^+)$ ، يوجد ثوابت $c_3 \geq 0, c_2 \in \mathbb{R}, c_1 > 1$ تحقق:

$$(i) c_1 |X(t)| \leq V(X(t), t)$$

$$(ii) L^\alpha V(X(t), t) \leq c_2 V(X(t), t)$$

$$(iii) |V_X(X(t), t)|^2 \int_0^t |g(X(t), t)(s - \tau)^{\alpha-2}| d\tau \geq c_3 V^2(X(t), t)$$

من أجل جميع $t \geq 0$ ، $\alpha \in (0,1)$ ، $X(t) \neq 0$

عندئذٍ تتحقق العلاقة الآتية:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |X(t)| \leq -\frac{1}{\ln c_1} \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} (c_2 + c_3) \quad (3.18)$$

بشكل خاص من أجل $c_2 + c_3 > 0$ ، الحل الصفري لـ (3.1) يكون مستقر أسياً بشكل شبه أكيد.

البرهان: بتثبيت أي $X_0 \neq 0$ من المبرهنة (3) والفرضيات (ii) ، (iii) من الشرط (3) ، ومن أجل $\alpha \in (0,1)$ لدينا

$$\begin{aligned} \ln V(X(t), t) &= \ln V(X_0, 0) + \int_0^t \frac{V_s(X(s), s)}{V(X(s), s)} ds \\ &+ \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{V_X(X(s), s) \int_0^s A X(\tau)(s-\tau)^{\alpha-2} d\tau}{V(X(s), s)} ds \\ &+ \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{V_X(X(s), s) \int_0^s g(X(\tau), \tau)(s-\tau)^{\alpha-2} dW(\tau)}{V(X(s), s)} ds \\ \ln V(X(t), t) &\leq \ln V(X_0, 0) + \int_0^t \frac{L^\alpha V(X(s), s)}{V(X(s), s)} ds \\ &+ \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{V_X(X(s), s) \int_0^s g(X(\tau), \tau)(s-\tau)^{\alpha-2} dW(\tau)}{V(X(s), s)} ds \end{aligned}$$

بوضع:

$$M(t) = \int_0^t \frac{V_X(X(s), s) \int_0^s g(X(\tau), \tau)(s-\tau)^{\alpha-2} dW(\tau)}{V(X(s), s)} ds$$

عندئذٍ بجعل $n=1, 2, \dots$ ومن أجل $\varepsilon \in (0, 1)$ اختياري حسب الفرضية (iii) من الشرط (3) نحصل على:

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq n} \left| M(t) + \varepsilon \int_0^t \frac{V_X^2(X(s), s) \int_0^s |g(X(\tau), \tau)(s-\tau)^{\alpha-2}|^2 d\tau}{V^2(X(s), s)} ds \right| \geq c_3 t \right\} \leq \varepsilon$$

حسب التمهيدية (2)

$$M(t) \leq c_3 t - \varepsilon \int_0^t \frac{V_X^2(X(s), s) \int_0^s |g(X(\tau), \tau)(s-\tau)^{\alpha-2}|^2 d\tau}{V^2(X(s), s)} ds$$

$$M(t) \leq (1-\varepsilon)c_3 t$$

حسب الفرضية (iii) من الشرط (3) والعلاقة (3.19) يكون لدينا:

$$\ln V(X(t), t) \leq \ln V(X_0, 0) - \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} [c_2 + (1-\varepsilon)c_3] t$$

عندئذٍ نحصل:

$$\frac{1}{t} \ln V(X(t), t) \leq -\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} [c_2 + (1-\varepsilon)c_3] + \frac{\ln V(X_0, 0)}{t}$$

هكذا

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln V(X(t), t) \leq -\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} [c_2 + (1-\varepsilon)c_3]$$

باستخدام الفرضية (i) من الشرط (3)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln c_1 |X(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln V(X(t), t) \leq -\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} [c_2 + (1-\varepsilon)c_3]$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln c_1 |X(t)| \leq -\frac{1}{\ln c_1} \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} [c_2 + (1-\varepsilon)c_3]$$

كون ε اختياري، نحصل على (3.18)

$$-\frac{1}{\ln c_1} \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} (c_2 + c_3) < 0 \text{ ومن أجل } c_1 > 1 \text{ عندئذٍ إذا كان } c_2 + c_3 > 0 \text{ يكون لدينا}$$

حسب التعريف (8) يكون الحل الصفري للجملة (3.1) مستقرً أسياً بشكل شبه أكيد.

مثال (3): ليكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية العشوائية كسرية:

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\alpha} X(t) = A X(t) + g(X, t) \frac{dW(t)}{dt} \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

حيث: $\alpha = \frac{1}{5}$, $g(X, t) = (2 \sin X_1(t) \quad 2 \sin X_1(t))^T \in \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

والمطلوب ادرس استقرار حل الجملة المعطاة.

الحل: لنختار تابع لبيانوف بالشكل: $\lambda \in \mathbb{R}^+$ $V(X, t) = e^{-\lambda} X_1^2(t) + e^{-\lambda} X_2^2(t)$

إن: $V(0, t) = 0$ كما أن: $c_1 > 1$; $V(X, t) \leq c_1 |X(t)|$ لدينا:

$$L^{\alpha} V(X(t), t) = V_t(X(t), t) + \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} V_x(X(t), t) \int_0^t A X(\tau) (t - \tau)^{\alpha - 2} d\tau$$

$$L^{\alpha} V(X(t), t) = \frac{-\frac{4}{5}}{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)} e^{-\lambda} 2 \left(\frac{1}{2} X_1^2(t) + \frac{1}{2} X_2^2(t) \right) \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{9}{5}} d\tau$$

$$L^{\alpha} V(X(t), t) = \frac{e^{-\lambda}}{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)} (X_1^2(t) + X_2^2(t)) \left(-t^{-\frac{4}{5}} \right) \leq c_2 V(X(t), t) ; c_2 \in \mathbb{R}$$

كما أن:

$$\int_0^t |g(X(\tau), \tau) (t - \tau)^{\alpha - 2}| d\tau = \int_0^t |g(X(\tau), \tau)| (t - \tau)^{-\frac{9}{5}} d\tau = \sqrt{8} \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{9}{5}} d\tau$$

$$\int_0^t |g(X(\tau), \tau) (t - \tau)^{\alpha - 2}|^2 d\tau = 8 \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{18}{5}} d\tau = \frac{8}{-\frac{13}{5}} \left(-t^{-\frac{13}{5}} \right) = -\frac{40}{5} \left(-t^{-\frac{13}{5}} \right)$$

$$\Rightarrow \left| V_X(X(t), t) \right|^2 \int_0^t \left| g(X(\tau), \tau) (t - \tau)^{\alpha-2} \right|^2 d\tau \geq c_3 V(X(t), t) ; c_3 \geq 0$$

حسب المبرهنة (6) حل الجملة المعطاة مستقر أسياً بشكل شبه أكيد.

ملاحظة (5): بفرض أن الشروط الآتية محققة:

(1) يوجد ثابت $L > 0$ بحيث إنه من أجل جميع $X, \hat{X} \in \mathbb{R}^n$ ، $t \in [0, +\infty)$

$$\left| g(t, X) - g(t, \hat{X}) \right| \leq L |X - \hat{X}|$$

(2) التابع $g(., 0)$ محدود بالقيمة العظمى:

$$\|g(t, 0)\|_{\infty} = \text{ess sup}_{t \in [0, +\infty)} |g(t, 0)| < \infty$$

التابع $g(., 0)$ قابل للمكاملة في L^2 أي $\int_0^{\infty} |g(t, 0)|^2 dt < \infty$

(3) التابع $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty), \mathbb{R}^+)$ ، يوجد ثوابت $c_3 \geq 0, c_2 \in \mathbb{R}, c_1 > 1$ تحقق:

$$(i) c_1 |X(t)| \geq V(X(t), t) > 0$$

$$(ii) L^{\alpha} V(X(t), t) \geq c_2 V(X(t), t)$$

$$(iii) \left| V_X(X(t), t) \right|^2 \int_0^t \left| g(X(\tau), \tau) (s - \tau)^{p-1} \right|^2 d\tau \leq c_3 V^2(X(t), t)$$

من أجل جميع $t \geq 0$ ، $\alpha \in (0, 1)$ ، $X(t) \neq 0$

عندئذٍ نتحقق لدينا العلاقة التالية:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |X(t)| \geq -\frac{1}{\ln c_1} \frac{1 - \alpha}{\Gamma(\alpha)} (c_2 + c_3) \quad (3.20)$$

إذا كان $c_2 + c_3 < 0$ عندئذٍ $-\frac{1}{\ln c_1} \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} (c_2 + c_3) > 0$ وبالتالي $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty$ أي أن الحل الصفري للجملة (3.1) يكون غير مستقر أسياً بشكل شبه أكيد.

مبرهنة (7): بفرض أن الشروط الآتية محققة:

(1) يوجد ثابت $L > 0$ بحيث إنه من أجل جميع $X, \hat{X} \in \mathbb{R}^n$ ، $t \in [0, +\infty)$

$$|g(t, X) - g(t, \hat{X})| \leq L |X - \hat{X}|$$

(2) التابع $g(., 0)$ محدود بالقيمة العظمى:

$$\|g(t, 0)\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, +\infty)} |g(t, 0)| < \infty$$

التابع $g(., 0)$ قابل للمكاملة في L^2 أي $\int_0^{\infty} |g(t, 0)|^2 dt < \infty$

(3) المتراجحة الآتية محققة:

$$\int_0^t \|A\| (t - \tau)^{\alpha-2} d\tau \leq \kappa$$

عندئذٍ يكون الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر أسياً بالعزوم من المرتبة p (أيضاً يكون الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر أسياً بشكل شبه أكيد)

البرهان: لتكن $n = 1, 2, \dots$ حسب المبرهنة (3) من أجل أي $n-1 \leq t \leq n$ لدينا:

$$\begin{aligned} |X(t)|^p &= |X_0|^p + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t p |X(s)|^{p-1} \int_0^s A X(\tau) (s-\tau)^{\alpha-2} d\tau ds \\ &+ \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t p |X(s)|^{p-1} \int_0^s g(X(\tau), \tau) (s-\tau)^{\alpha-2} dW(\tau) ds \\ &\leq |X_0|^p + p \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |X(s)|^p ds \int_0^s A (s-\tau)^{\alpha-2} d\tau \\ &+ \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t p |X(s)|^{p-1} \int_0^s g(X(\tau), \tau) (s-\tau)^{\alpha-2} dW(\tau) ds \end{aligned}$$

بما أن $\alpha \in (0, 1)$ بأخذ القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} E \left(\int_0^t p |X(s)|^{p-1} \int_0^s g(X(\tau), \tau) (s-\tau)^{\alpha-2} dW(\tau) ds \right) \right| \\ & \leq \frac{p(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} E \left| \int_0^t |X(s)|^{p-1} \left(\int_0^s g(X(\tau), \tau) (s-\tau)^{\alpha-2} dW(\tau) \right) ds \right| \leq 0 \end{aligned}$$

وبأخذ تنظيم المصفوفة A نجد حسب الشرط (3) من نص المبرهنة:

$$\int_0^s \|A\| (s-\tau)^{\alpha-2} d\tau \leq \kappa$$

وبالتالي:

$$E \left(\sup_{0 \leq t \leq n} |X(t)|^p \right) \leq |X_0|^p + p\kappa \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t E \left(\sup_{0 \leq s \leq n} |X(s)|^p \right) ds$$

حسب متراجحة جرونول

$$E \left(\sup_{0 \leq t \leq n} |X(t)|^p \right) \leq |X_0|^p e^{-\lambda t} \quad ; \quad \lambda = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} p\kappa(1-\alpha) > 0$$

حسب التعريف (9) يكون الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر أسياً بالعزوم من المرتبة p .
الآن من أجل $\varepsilon \in (0,1)$ اختياري يكون:

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq n} |X(t)|^p \geq e^{-(\lambda-\varepsilon)t} \right\} & \leq e^{(\lambda-\varepsilon)t} E \left(\sup_{0 \leq t \leq n} |X(t)|^p \right) \\ & \leq |X_0|^p e^{-\varepsilon t} \end{aligned}$$

حسب التمهيدية (2) يكون:

$$\sup_{0 \leq t \leq n} |X(t)|^p \leq e^{-(\lambda-\varepsilon)t}$$

من أجل جميع $\omega \in \Omega$ ، $n-1 \leq t \leq n$

$$\frac{1}{t} \ln |X(t)| \leq \frac{1}{pt} \ln |X(t)|^p \leq -\frac{1}{pt} (\lambda-\varepsilon)t \leq -\frac{(\lambda-\varepsilon)}{pn} t$$

هنا:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |X(t)| \leq -\frac{\lambda-\varepsilon}{p}$$

بما أن $\varepsilon > 0$ اختياري نحصل

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |X(t)| \leq -\frac{\lambda}{p}$$

حسب التعريف (8) يكون الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر أسياً بشكل شبه أكيد.
مثال (4): ليكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية العشوائية كسرية:

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\alpha} X(t) = A X(t) + g(X, t) \frac{dW(t)}{dt} \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, g(X, t) = (0 \quad \sin X_1(t))^T \in \mathbb{R}^2, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ حيث:}$$

والمطلوب ادرس استقرار حل الجملة المعطاة.

الحل: لدينا:

$$\|A\| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{2}{32}} = \frac{1}{4}$$

كما أن:

$$\int_0^t \|A\| (t-\tau)^{\alpha-2} d\tau = \frac{1}{4} \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-t^{-\frac{5}{4}}\right) = \frac{3}{20} \left(t^{-\frac{5}{4}}\right)$$

حسب المبرهنة (7) حل الجملة المعطاة مستقر أسياً بالعزوم من المرتبة p.

التوصيات والمقترحات:

- (1) دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية ذات أمثال عشوائية.
- (2) دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية عشوائية باستخدام مشتق كابتو الكسري وباستخدام مشتق ريمان-ليوفيل والمقارنة بين النتائج التي يتم الحصول عليها.

(3) دراسة استخدام تحويل لابلاس العشوائي لإيجاد حل معادلة تفاضلية عشوائية كسرية.

References

[1]– Xiao G and Wang J, 2021– Stability of Fractional Stochastic Differential Equations, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 26(4): 581–596.

[2] Krishnan, V., 1984–Nonlinear Filtering and Smoothing, Johnwiley and Sons: USA.

- [3] حسين، العرجه، (2024). استقرار حل جملة معادلات تكاملية تفاضلية من مرتبة كسرية باستخدام تابع ليبيانوف التربيعي، مجلة جامعة حمص، سلسلة الأعداد للعلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية، المجلد 47: 1-15
- [4] حسين، (2021). دراسة استقرار حل جملة معادلات تكاملية- تفاضلية من مرتبة كسرية باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة، مجلة جامعة حمص، المجلد 43، 1-17.
- [5] حسين، العرجه، (2022). دراسة استقرار حل جملة معادلات تكاملية تفاضلية من مرتبة كسرية بطريقة ليبيانوف، جامعة حمص.