مجلة جامعة حمص

سلسلة العلوم الأساسية

مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 47 . العدد 12

1447 هـ - 2025 م

د.محمد فراس رمضان	عضو هيئة التحرير
د. مضر سعود	عضو هيئة التحرير
د. ممدوح عبارة	عضو هيئة التحرير
د. موفق تلاوي	عضو هيئة التحرير
د. طلال رزوق	عضو هيئة التحرير
د. أحمد الجاعور	عضو هيئة التحرير
د. الياس خلف	عضو هيئة التحرير
د. روعة الفقس	عضو هيئة التحرير
د. محمد الجاسم	عضو هيئة التحرير
د. خليل الحسن	عضو هيئة التحرير
د. هيثم حسن	عضو هيئة التحرير
د. أحمد حاج موسى	عضو هيئة التحرير

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة حمص

سورية . حمص . جامعة حمص . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : 2138071 31 963 ++

. موقع الإنترنت : www.homs-univ.edu.sy

. البريد الالكتروني : journal.homs-univ.edu.sy

ISSN: 1022-467X

شروط النشر في مجلة جامعة حمص

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
- طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
- **اذا كان الباحث طالب دراسات عليا:**

يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقته على النشر في المجلة.

- **اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:**

يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.

- **اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :**

يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.

- **اذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :**

يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.

- **يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):**

عنوان البحث . . ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1- مقدمة
2- هدف البحث
3- مواد وطرق البحث
4- النتائج ومناقشتها .
5- الاستنتاجات والتوصيات .
6- المراجع.

- **يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنســبة لكليات (الآداب – الاقتصــاد- التربية – الحقوق – السياحة – التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):**
- عنوان البحث . . ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1. مقدمة.
2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
3. أهداف البحث و أسئلته.
4. فرضيات البحث و حدوده.
5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
7. منهج البحث و إجراءاته.
8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
9. نتائج البحث.
10. مقترحات البحث إن وجدت.
11. قائمة المصادر والمراجع.

7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:

أ- قياس الورق 17.5×25 B5.

ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 – يمين 2.5- يسار 2.5 سم

ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8

ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20

ـ كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي ـ العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.

ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.

8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.

9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.

10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة ـ الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة ـ سنة النشر ـ وتتبعها معترضة (–) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة ـ دار النشر وتتبعها فاصلة ـ الطبعة (ثانية . ثالثة) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة.

وفيما يلي مثال على ذلك:

–MAVRODEANUS, R1986– **Flame Spectroscopy**. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

ـــ بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة ـــ المجلد والعدد (كتابة مختزلة) وبعدها فاصلة ـــ أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة.

مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases **Clinical Psychiatry News** , Vol. 4. 20 – 60

ج. إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد بالبنود (أ و ب) ويكتب في نهاية المراجع العربية: (المراجع In Arabic)

رسوم النشر في مجلة جامعة حمص

1. دفع رسم نشر (50000) ل.س أربعون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.
2. دفع رسم نشر (200000) ل.س مئة الف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .
3. دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .
4. دفع مبلغ (15000) ل.س ستة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.

المحتوى

استقرار حل جملة معادلات تكاملية تفاضلية من مرتبة كسرية باستخدام تابع ليبانوف التربيعي

ايمان احمد حسين[1] د. سامح العرجه[2]

ملخص

قدمنا من خلال هذا البحث طريقة فعالة لدراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية وهي طريقة ليبانوف، حيث أنه في البداية ذكرنا مبرهنات و تعاريف أساسية في الاستقرار بالإضافة إلى تعاريف و مفاهيم أساسية في الاشتقاق الكسري، ثمّ تطرقنا إلى عرض متراجحات أساسية لدراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية وهي تعتبر أداة مهمة في الدراسة، وانطلقنا في هذا البحث من دراسة استقرار جمل المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية ثمّ انتقلنا إلى دراسة استقرار جمل المعادلات التفاضلية الكسرية غير الخطية وبعد ذلك قمنا بدراسة استقرار جمل المعادلات التكاملية–التفاضلية الكسرية موضحين المعايير اللازمة لكل دراسة على حدا، ومن ثمّ دعمنا هذه الدراسات بأمثلة توضيحية.

كلمات مفتاحية: التفاضل والتكامل الكسري، تابع ليبانوف التربيعي، الاستقرار، القيم الذاتية.

Stability of A Class of Fractional-Order Systems Using Quadratic Lyapunov Functions

Abstrat

Through this research, we presented an effective method for studying the stability of solution of fractional differential systems, which is Lyapunov method.

Whereas at the beginning we mentioned theorems and basic definitions of stability in addition to definitions and basic concepts of fractional derivation, then we dealt with presenting basic inequalities to study the stability of solution of fractional differential systems, which is an important tool in the study. We started from studying the stability of linear fractional differential systems, then we moved on the studying the stability of nonlinear fractional differential systems. After that, we studied the stability of the fractional integro differential systems, explaining the necessary criteria for each study separately. Then we supported these studies with illustrative examples.

Keywords: fractional calculus, quadratic Lyapunov functions, stability, eigenvalues values

1-مقدمة:

إنّ حساب التفاضل والتكامل الكسري موضوع رياضي قديم يرجع تاريخه إلى القرن السابع عشر، وعلى الرغم من أنّ له تاريخاً طويلاً إلا أنه لم يتم استخدامه في الفيزياء والهندسة لسنوات عديدة، حيث أنه لمدة تزيد عن ثلاثة قرون تطورت نظرية حساب التفاضل والتكامل الكسري بشكل أساسي كمجال نظري للرياضيات فقط. وفي العقود القليلة الماضية أشار الكثير من الباحثين إلى أنّ العديد من مجالات الفيزياء[15] وهندسة التحكم [6] ومعالجة الإشارات [12] يمكن وصفها بدقة بالاعتماد على حساب التفاضل والتكامل الكسري.

المعادلات التفاضلية الكسرية والمعادلات التكاملية-التفاضلية الكسرية يتم استخدامها لنمذجة الكثير من المسائل العملية مثل الموجات الكهرومغناطيسية، اللزوجة، معادلات الانتشار وغير ذلك، تمّ إيلاء اهتمام كبير لدراسة حلول هذا النوع من المعادلات التفاضلية ومن ثمّ تمّ التطرق إلى دراسة كون هذه الحلول مستقرة أم غير مستقرة.

من خلال عدد كبير من الدراسات المخصصة للأنظمة الديناميكية الكسرية تمّ التوصل إلى أنّ كون هذه الأنظمة مستقرة على نطاق واسع يعد مؤشراً مهماً لأنظمة التحكم، وهناك عدة طرائق يتم اتباعها لدراسة استقرار الجمل التفاضلية الكسرية نذكر منها طريقة ليبانوف الثانية. في نظرية المعادلات التفاضلية الكسرية تعتبر توابع ليبانوف توابع عددية يمكن من استخدامها لإثبات استقرار حل معادلة تفاضلية.

تمّ تمديد طريقة ليبانوف المباشرة لدراسة استقرار الجمل التفاضلية الكسرية من قبل العالم Li [5]. إنّ طريقة ليباتوف الكسرية تعميم لفكرة أنّ شرط الاستقرار يوضع بالاعتماد على تابع ليبانوف

والمشتق الكسري لهذا التابع. إنّ قاعدة ليبنز غير صحيحة من أجل المشتقات من مراتب كسرية [12] لذلك لا توجد طريقة عامة لحساب المشتقات الكسرية لتابع ليبانوف. مؤخراً تمّ إجراء بعض التعديلات على طريقة ليبانوف المباشرة من أجل الجمل التفاضلية الكسرية [1] حيثُ تمّ وضع صيغة تربيعية لتابع ليبانوف من أجل مسألة دراسة استقرار حل جملة معادلات كسرية وتمّ التوصل إلى نتائج لدراسة استقرار حل جمل المعادلات التفاضلية الكسرية مشابهة لنتائج دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة $n \in \mathbb{N}$ [10].

2-أهمية البحث:

نظراً للدراسات المتزايدة في مجال استقرار حل جملة معادلات تفاضلية كسرية وجملة معادلات تكاملية-تفاضلية كسرية وللصعوبات البالغة التي تعترض الباحثين في تقدير كون حل الجمل المدروسة مستقراً أم لا نقدّم من خلال هذا البحث طريقة عملية وفعالة للحصول على الاستقرار، كون تابع ليبانوف يوفّر قالباً عملياً لمثل هذه الدراسات.

3-مشكلة البحث:

تأتي مشكلة البحث لتوضح الاستخدام الواسع لتابع ليبانوف في دراسة الاستقرار ضمن المجالات التطبيقية (فيزيائية-هندسية) نظم التحكم وغير ذلك.

4-مواد البحث:

تعاريف أساسية:

تعريف (1): تابع ليبانوف عبارة عن تابع مستمر: $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ يمتلك مشتقات مستمرة من المرتبة الأولى.

تعريف (2): يكون التابع $V(x,t)$ موجب تحديداً إذا كان:

$V(x,t) > 0$ من أجل $x \neq 0$ و $V(x,t) = 0$ من أجل $x = 0$

تعريف (3): يكون التابع $V(x,t)$ شبه موجب تحديداً إذا كان:

$V(x,t)\geq 0$ من أجل $x\neq 0$ و $V(x,t)=0$ من أجل $x=0$

طرائق ليبانوف في الاستقرار: [14]

الطريقة الأولى: لدراسة استقرار حل الجملة المدروسة ندرس استقرار حل الجملة الخطية الممثلة لثوابت الجملة المدروسة (أي الدراسة هنا تتم كما في حالة الجمل الخطية).

الطريقة الثانية: تعتمد هذه الطريقة على إيجاد تابع محدد موجب مشتقه أصغر من الصفر يدعى تابع ليبانوف إن وجود مثل هذا التابع يعني تماماً استقرار حل الجملة المدروسة. هذه الطريقة تصلح لدراسة استقرار حل الجملة التفاضلية الخطية وغير الخطية.

سوف نعتمد في دراستنا على الطريقة الثانية كونها أكثر فاعلية.

مبرهنة (1) (مبرهنة ليبانوف الأساسية في الاستقرار): [1]

ليكن لدينا تابع ليبانوف $V(x,t)$ ومشتقه $V'(x,t)$ فإذا تحقق:

1): $V(x,t)$ تابع موجب تحديداً و $V'(x,t)\leq 0$ فالحل الصفري للجملة المدروسة مستقر.

2): $V(x,t)$ تابع موجب تحديداً و $V'(x,t)<0$ فالحل الصفري للجملة المدروسة مستقر استقراراً تقاربياً.

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن: كيف يمكننا إيجاد تابع ليبانوف؟

يمكن إيجاد تابع ليبانوف بالاعتماد على الصيغة التربيعية التالية: $V(t,x(t))=x^T(t)px(t)$

حيث $t\in[0,\infty), x(t)\in\mathbb{R}^n$ أما بالنسبة للمصفوفة p فهي مصفوفة موجبة متناظرة وأنّ $p\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

نتيجة (1): يكون التابع $V(t,x(t))$ موجب تحديداً إذا وفقط إذا كان كانت المصفوفة p موجبة تحديداً.

نتيجة (2): يكون التابع $V\left(t,x(t)\right)$ شبه موجب تحديداً إذا وفقط إذا كانت المصفوفة p شبه موجبة تحديداً.

ملاحظة (1): المصفوفة p تكون موجبة تحديداً إذا وفقط إذا كانت $\lambda_i(p)>0$ حيث $\lambda_i(p)$ القيم الذاتية للمصفوفة p.

ملاحظة (2): المصفوفة p تكون شبه موجبة تحديداً إذا وفقط إذا كانت $\lambda_i(p)\geq 0$.

المبرهنة القادمة توضح لنا طريقة إيجاد المصفوفة p.

مبرهنة (2): لتكن $A\in\square^{n\times n}$ عندئذ القضايا الآتية متكافئة:

(1) – جميع القيم الذاتية للمصفوفة A جزئها الحقيقي سالب.

(2) – من أجل كل مصفوفة $Q=Q^T>0$ يوجد حل وحيد $p=p^T>0$ لمعادلة ليبانوف الآتية:

$$A^T p+pA+Q=0$$

الإثبات: لنفرض أنّ الشرط الأول محقق ولنعرّف: $p=\int_0^\infty e^{A^T t}Qe^{At}dt$

عندئذ:

$$\mathrm{A}^T p+p\mathrm{A}=\int_0^\infty\left[\mathrm{A}^T e^{\mathrm{A}^T t}Qe^{\mathrm{A}t}+e^{\mathrm{A}^T t}Qe^{\mathrm{A}t}\mathrm{A}\right]dt=\left[e^{\mathrm{A}^T t}Qe^{\mathrm{A}t}\right]_0^\infty=-Q$$

حيث: $\lim_{t\to\infty}e^{\mathrm{A}^T t}Qe^{\mathrm{A}t}=0$

وهذا الحل وحيد أيضاً ولنثبت ذلك: نفرض جدلاً أنه يوجد حلين لمعادلة ليبانوف p_1,p_2 بحيث:

$$\mathrm{A}^T p_1+p_1\mathrm{A}+Q=0$$
$$\mathrm{A}^T p_2+p_2\mathrm{A}+Q=0$$

بطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى نحصل على

$$\mathrm{A}^T\left(p_1-p_2\right)+\left(p_1-p_2\right)\mathrm{A}=0$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}0&=e^{\mathrm{A}^T t}\left[\mathrm{A}^T(p_1-p_2)+(p_1-p_2)\mathrm{A}\right]e^{\mathrm{A}t}\\&=e^{\mathrm{A}^T t}\mathrm{A}^T(p_1-p_2)e^{\mathrm{A}t}+e^{\mathrm{A}^T t}(p_1-p_2)\mathrm{A}e^{\mathrm{A}t}\\&=\frac{d}{dt}\left(e^{\mathrm{A}^T t}(p_1-p_2)e^{\mathrm{A}t}\right)\end{aligned}$$

هذا يعني بأنّ المقدار $e^{\mathrm{A}^T t}(p_1-p_2)e^{\mathrm{A}t}$ هو مقدار ثابت ومن أجل $\boxed{t=0}$ نحصل على

$$e^{\mathrm{A}^T t}\left(p_1-p_2\right)e^{\mathrm{A}t}=p_1-p_2$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $t\to\infty$ نحصل على أنّ $p_1=p_2 \Leftarrow p_1-p_2=0$

تعريف (4): [5] نقول عن التابع المستمر $\gamma:[0,t]\to[0,\infty]$ أنه ينتمي إلى الصف K إذا كان متزايد تماماً ويحقق $\gamma(0)=0$.

تعرفنا في الدراسات السابقة على علاقات تمكننا من حساب التفاضل والتكامل من المرتبة $n\in\mathbb{N}$ ونقدّم فيما يلي تعاريف تمكننا من حساب التفاضل والتكامل من مرتبة $\alpha\in\mathbb{R}^+$.

تعريف (5): [4] يعرّف التكامل الكسري بالعلاقة:

$$\mathrm{I}^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t} f(\tau)\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}d\tau \quad ;n-1<\alpha<n$$

حيث $t\geq t_0$، $f(t)$ دالة اختيارية قابلة للمكاملة، I^α مؤثر التكامل الكسري،

$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}\exp(-t)dt$ دالة غاما و $\exp(.)$ الدالة الأسية.

تعريف (6): [11] مشتق ريمان–ليوفيل الكسري يعرف بالعلاقة:

$$ {}^{RL}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} f(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \quad ; n-1 < \alpha < n $$

تعريف (7): [10] لتكن $t \in [t_0, T]$ ، $T > 0$ ، $f : [t_0, T] \to \square$ دالة قابلة للمفاضلة،

مشتق كابتو الكسري للتابع f يعرف كما يلي

$$ D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^{t} f(\tau)^{(n)} (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \quad ; n-1 < \alpha < n $$

تمهيدية (1): [3,5] لتكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية الكسرية غير الخطية من الشكل:

$$ D^{\alpha} x(t) = \mathrm{A} x(t) + g(t, x); \alpha \in (0,1) $$

وليكن $V(t,x)$ تابع ليبانوف الموافق والتوابع γ_i حيث $i = 1,2,3$ هي توابع من الصف K عندئذ إذا كان:

$$ 1)\ \gamma_1(\|x\|) \le V(t,x) \le \gamma_2(\|x\|) $$
$$ 2)\ D^{\alpha} V(t,x) \le -\gamma_3(\|x\|) $$

فإنّ الحل الصفري $x = 0$ للجملة المدوسة يكون مستقر تقاربيا.

تمهيدية (2): [8] من أجل الصيغة التربيعية لتابع ليبانوف $V = x^T p x$ تتحقق المتراجحة:

$$ \lambda_{\min}(p) \|x\|^2 \le x^T p x \le \lambda_{\max}(p) \|x\|^2 $$

$\lambda_{\min}(p)$: القيمة الذاتية الصغرى للمصفوفة p

$\lambda_{\max}(p)$: القيمة الذاتية العظمى للمصفوفة p

ونذكر في هذا السياق مبرهنة تعتبر الركيزة الأساسية للدراسة.

مبرهنة (3): [2,8] من أجل المتجه $x(t)\in\mathbb{R}^n$ والقابل للاشتقاق بمساقطه التابعية تتحقق المتراجحة التالية:

$$D^{\alpha}\left(x(t)\,p\,x(t)\right)\le 2x(t)\,p\,D^{\alpha}x(t) \qquad (1)$$

$\alpha\in(0,1),\forall t\ge t_0$; $p\in\mathbb{R}^{n\times n}$ عبارة عن مصفوفة ثابتة موجبة بكل عناصرها.

الإثبات: دون المساس بعمومية المسألة سوف نعتبر هنا بأنّ: $p=\mathrm{I}$ عندئذ تصبح العلاقة (1) بالشكل:

$$D^{\alpha}\left(x(t)\,\mathrm{I}\,x(t)\right)\le 2x(t)\,\mathrm{I}\,D^{\alpha}x(t) \quad\Rightarrow$$

$$D^{\alpha}x^{2}(t)\le 2x(t)D^{\alpha}x(t) \qquad (2)$$

إن إثبات (2) مكافئ لإثبات

$$x(t)D^{\alpha}x(t)-\frac{1}{2}D^{\alpha}x^{2}(t)\ge 0\ ;\alpha\in(0,1) \qquad (3)$$

باستخدام التعريف (7) نضع:

$$D^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\ ;n=1$$

كما أنّ:

$$\frac{1}{2}D^{\alpha}x^{2}(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{x(\tau)\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau$$

إذاً العلاقة (3) تصبح بالشكل:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{|x(t)-x(\tau)|}{(t-\tau)^{\alpha}}\dot{x}(\tau)d\tau\ge 0 \qquad (4)$$

وبفرض أنّ: $y(\tau)=x(t)-x(\tau)$ والذي يقتضي بأنّ: $y'(\tau)=\frac{dy(\tau)}{d\tau}=-\frac{dx(\tau)}{d\tau}$

إذاً العلاقة (4) تكتب بالشكل:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y(\tau)y'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\le 0 \qquad (5)$$

بمكاملة العلاقة (5) بالتجزئة حيث تفرض أنّ:

$$du=y(\tau)y'(\tau)d\tau, u=\frac{1}{2}y^2$$
$$v=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\tau)^{-\alpha}, dv=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\tau)^{-\alpha-1}$$

إذاً العلاقة (5) يمكن كتابتها بالشكل

$$-\left[\frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha}}\right]\Bigg|_{\tau=t}+\left[\frac{y_0^2}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^2}\right]+\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}}d\tau\ge 0 \qquad (6)$$

بأخذ نهاية طرفي العلاقة (6) عندما $t\to\tau$

$$\lim_{t\to\tau}\frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha}}=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{t\to\tau}\frac{|x(t)-x(\tau)|^2}{(t-\tau)}=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{t\to\tau}\frac{\left[x^2-2x(t)x(t)+x^2\right]}{(t-\tau)^{\alpha}}$$

باستخدام قاعدة أوبيتال

$$\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{t\to\tau}\frac{\left[x^2-2x(t)x(t)+x^2\right]}{(t-\tau)^{\alpha}}=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{t\to\tau}\frac{\left[-2x(t)\dot{x}(\tau)+2x(\tau)\dot{x}(t)\right]}{-\alpha(t-\tau)^{\alpha-1}}=0$$

إذاً العلاقة (6) تكتب بالشكل:

$$\frac{y_0^2}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^{\alpha}}+\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}}d\tau\geq 0 \qquad (7)$$

إذاً العلاقة صحيحة (7) وبهذا يتم المطلوب.

وكنتيجة على هذه المبرهنة نذكر

نتيجة (3): [11] من أجل المتجه $x(t)\in\mathbb{R}^n$ والقابل للاشتقاق بمساقطه التابعية عندها تتحقق المتراجحة التالية:

$$D^{\alpha}\left(x^T(t)\,p\,x(t)\right)\leq 2x^T(t)\,p\,D^{\alpha}x(t) \quad ;\ \alpha\in(0,1)$$

$\forall t\geq t_0$ حيث $p\in\mathbb{R}^{n\times n}$ عبارة عن مصفوفة ثابتة موجبة بكل عناصرها.

المبرهنة القادمة توضح لنا الشروط الواجب تحققها لكي يكون حل الجملة المدروسة مستقراً

مبرهنة (4): [11] بفرض أنه لدينا الجملة الخطية التالية:

$$D^{\alpha}x(t)=\mathrm{A}x(t) \qquad (8)$$

حيث $\alpha\in(0,1)$, $\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ عبارة عن مصفوفة عناصرها ثابتة, $x=(x_1,x_2,.....,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$

إذا كانت المصفوفة A جميع عناصرها تحقق $\mathrm{Re}\,\lambda(\mathrm{A})<0$ والمصفوفة p هي حل للمعادلة $p\mathrm{A}+\mathrm{A}^T p=-\mathrm{I}$ حيث I المصفوفة الواحدية عندها الحل الصفري للجملة (8) مستقر تقاربياً.

الإثبات: لنأخذ تابع ليبانوف بالصيغة التربيعية: $V(t,x(t))=x^T px\ ;\ p>0,\ p\in\mathbb{R}^{n\times n}$

الآن لدينا بحسب المبرهنة (3) والنتيجة (3) نكتب:

$$D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le 2x^{T}(t)pD^{\alpha}x(t)=2x^{T}(t)p\cdot \mathrm{A}x(t)$$
$$D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le x^{T}(t)p\,\mathrm{A}x(t)+x^{T}(t)(p\,\mathrm{A})^{T}x(t)=$$
$$\Rightarrow D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le x^{T}(t)\left(p\,\mathrm{A}+(p\,\mathrm{A})^{T}\right)x(t)=-x^{T}x=-\|x\|^{2}$$

بأخذ:

$$\lambda_{\min}(p)\|x\|^{2}=\gamma_{1}\left(\|x\|\right)\quad ,\lambda_{\max}(p)\|x\|^{2}=\gamma_{2}\left(\|x\|\right)\quad ,\|x\|^{2}=\gamma_{3}\left(\|x\|\right)$$

بالاعتماد على التمهيدية (2) والتمهيدية (1) نحصل على الاستقرار التقاربي لحل الجملة (8).

وإذا ما أردنا تعميم النتيجة التي تمّ التوصل إليها في المبرهنة (4) من أجل الجمل الغير خطية من الشكل:

$$D^{\alpha}x(t)=\mathrm{A}x(t)+f\left(t,x(t)\right) \qquad (9)$$

حيث $x=\left(x_{1},x_{2},.....,x_{n}\right)^{T}\in\mathbb{R}^{n},\alpha\in(0,1),\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ أما من أجل التابع $f\left(t,x(t)\right)$ حيث

$f:[t_{0},\infty[\times\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$ تابع غير خطي بالمتجه x والزمن t وأنّ التابع $f\left(t,x(t)\right)$ يحقق $f\left(t,x(t)\right)=0$

لنفرض الآن بأنه يوجد عدد $\varepsilon>0$ بحيث $\left\|f\left(t,x(t)\right)\right\|\le\varepsilon\|x\|\,;\,x\in\mathbb{R}^{n},\,t\in[t_{0},\infty[$

فإننا سنذكر شروط جديدة يجب تحققها للحصول على استقرار الحل للجملة المدروسة وذلك من خلال المبرهنة التالية.

مبرهنة (5): [8] لنأخذ الجملة (9) بحيث المصفوفة A الثابتة تحقق أن $\mathrm{Re}\,\lambda(\mathrm{A})<0$ وإذا كانت المصفوفة p التي تمثل حل المعادلة $p\mathrm{A}+\mathrm{A}^T p=-\mathrm{I}$ تحقق $1-2\varepsilon\lambda_{\max}(p)>0$ عندها الحل الصفري للجملة (9) مستقر تقاربياً وحيث أنّ I هي المصفوفة الواحدية.

الإثبات: لنفرض تابع ليبانوف بالصيغة التربيعية $V\left(t,x(t)\right)=x^T px\ ;\ p>0, p\in\mathbb{R}^{n\times n}$

بحسب المبرهنة (3) والنتيجة (3) نكتب:

$$D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le 2x^T(t)pD^{\alpha}x(t)=x^T\left[p\mathrm{A}+\left(p\mathrm{A}\right)^T\right]x+2x^T pf\left(t,x(t)\right)$$

الآن وباستخدام متراجحة كوشي شفارتز

$$x^T pf\left(t,x(t)\right)\le\|x\|\|p\|\left\|f\left(t,x(t)\right)\right\|\le\|x\|\lambda_{\max}(p)\left\|f\left(t,x(t)\right)\right\|$$

$$x^T pf\left(t,x(t)\right)\le\|x\|\lambda_{\max}(p)\varepsilon\|x\|=\lambda_{\max}(p)\varepsilon\|x\|^2=\varepsilon\lambda_{\max}(p)x^T x$$

$$D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le x^T\left[p\mathrm{A}+\left(p\mathrm{A}\right)^T\right]x+2\varepsilon\lambda_{\max}(p)x^T x$$

$$D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le -x^T x+2\varepsilon\lambda_{\max}(p)x^T x=-\left(1-2\varepsilon\lambda_{\max}(p)\right)\|x\|^2$$

بأخذ $1-2\varepsilon\lambda_{\max}(p)$ حسب الفرض و:

$$\gamma_1\left(\|x\|\right)=\lambda_{\min}(p)\|x\|^2\quad,\ \gamma_2\left(\|x\|\right)=\lambda_{\max}(p)\|x\|^2\quad,\ \gamma_3\left(\|x\|\right)=\left(1-2\varepsilon\lambda_{\max}(p)\right)\|x\|^2$$

نجد أنه من أجل تابع ليبانوف المفروض نحصل على الاستقرار التقاربي للحل الصفري للجملة المدروسة.

الآن لو كانت لدينا الجملة:

$$D^{\alpha}x(t)=\mathrm{A}x(t)+\mathrm{I}^{\alpha}f\left(t,x(t)\right)\qquad(10)$$

$x=(x_1,x_2,.....,x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \alpha \in (0,1), \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ أما من أجل التابع $f(t,x(t))$ حيث

$f:[t_0,\infty[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابع غير خطي بالمتجه x والزمن t وأنّ التابع $f(t,x(t))$ يحقق

$$f(t,x(t))=0$$

لنفرض الآن بأنه يوجد عدد $\varepsilon>0$ بحيث $\|f(t,x(t))\| \le \varepsilon \|x\| \; ; \; x \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0,\infty[$

وباستخدام التمهيدية (1) والتمهيدية (2) يمكن وضع المبرهنة التالية:

مبرهنة (6): لنأخذ الجملة (10) بحيث المصفوفة A الثابتة تحقق أنّ $\mathrm{Re}\,\lambda(\mathrm{A})<0$ وإذا كانت المصفوفة p التي تمثل حل المعادلة $p\mathrm{A}+\mathrm{A}^T p=-\mathrm{I}$ تحقق $\left(1-2\frac{\varepsilon}{\alpha\Gamma(\alpha)}\lambda_{\max}(p)\|t^{\alpha}\|\right)>0$ عندها الحل الصفري للجملة (10) يكون مستقر تقاربياً.

الإثبات: لنفرض تابع ليبانوف بالصيغة التربيعية $V(t,x(t))=x^T px \; ; \; p>0, p \in \mathbb{R}^{n\times n}$

بحسب المبرهنة (3) والنتيجة (3) نكتب:

$$D^{\alpha}V(t,x(t) \le 2x^T pD^{\alpha}x = x^T\left[p\mathrm{A}+(p\mathrm{A})^T\right]x+2x^T p\mathrm{I}^{\alpha}f(t,x(t))$$

وباستخدام متراجحة كوشي شفارتز

$$x^T p\,\mathrm{I}^{\alpha}f(t,x(t)) \le \|x^T\|\|p\|\|\mathrm{I}^{\alpha}f(t,x(t))\|$$

لكن

$$\|\mathrm{I}^{\alpha}f(t,x(t))\| \le \left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right\| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \|(t-\tau)^{\alpha-1}\|\|f(\tau,x(\tau))\|d\tau$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\varepsilon\int_0^t \|(t-\tau)^{\alpha-1}\|\|x\|d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\varepsilon\|x\|\left\{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)^{\alpha}\Big|_0^t\right\} = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\varepsilon\|x\|\|t^{\alpha}\|$$

$$\Rightarrow x^T p\mathrm{I}^\alpha f\left(t,x(t)\right) \le \|x\|\|p\|\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\varepsilon\|x\|\left\|t^\alpha\right\|$$

$$x^T p\mathrm{I}^\alpha f\left(t,x(t)\right) \le \|x\|^2 \lambda_{\max}(p)\frac{\varepsilon}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left\|t^\alpha\right\|$$

$$\Rightarrow x^T p\mathrm{I}^\alpha f\left(t,x(t)\right) \le x^T x\,\lambda_{\max}(p)\frac{\varepsilon}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left\|t^\alpha\right\|$$

$$\Rightarrow D^\alpha V\left(t,x(t)\right) \le -x^T x + 2x^T x\,\lambda_{\max}(p)\frac{\varepsilon}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left\|t^\alpha\right\|$$

$$D^\alpha V\left(t,x(t)\right) \le -\left(1-\frac{2\varepsilon}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\lambda_{\max}(p)\left\|t^\alpha\right\|\right)\|x\|^2$$

لدينا حسب الفرض $\left(1-2\frac{\varepsilon}{\alpha\Gamma\left(\alpha\right)}\lambda_{\max}(p)\left\|t^\alpha\right\|\right)>0$ وبأخذ

$$\gamma_1\left(\|x\|\right)=\lambda_{\min}(p)\|x\|^2,\ \gamma_2\left(\|x\|\right)=\lambda_{\max}(p)\|x\|^2,\ \gamma_3\left(\|x\|\right)=\left(1-\frac{2\varepsilon}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\lambda_{\max}(p)\left\|t^\alpha\right\|\right)\|x\|^2$$

نجد أنه من أجل تابع ليبانوف المفروض أنّ الحل الصفري للجملة المدروسة مستقر تقاربياً.

وفيما يلي نقدم أمثلة توضيحية حول ما تم ذكره.

مثال (1): بفرض أنه لدينا جملة المعادلات التفاضلية الكسرية:

$$D^\alpha x(t)=\mathrm{A}x(t)+f\left(t,x(t)\right);\ 0<\alpha\le 1$$

حيث أنّ:

$$x(t)=\left(x_1(t),x_2(t)\right)^T,\ f\left(t,x(t)\right)=\left(\frac{1}{2}\sin x_1(t),\frac{1}{2}\sin x_2(t)\right)^T,\ \mathrm{A}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

هنا لدينا:

$$\left\|f\left(t,x(t)\right)\right\|=\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 x_1(t)+\frac{1}{4}\sin^2 x_2(t)}\le\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)}\le\frac{1}{2}\left\|x(t)\right\|$$

إذاً ثابت ليبشتز $\varepsilon=\frac{1}{2}$

كما أنّ المصفوفة الموجبة p تحقق $\mathrm{A}^T p+p\mathrm{A}=-Q\ ;Q=\mathrm{I}$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & -3\end{bmatrix}=-\mathrm{I}$$

$$\begin{bmatrix}-p_1 & -p_2\\ 4p_1-3p_3 & 4p_3-3p_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-p_1 & 4p_1-3p_2\\ -p_3 & 4p_3-3p_4\end{bmatrix}=-\mathrm{I}$$

$$\begin{bmatrix}-2p_1 & 4p_1-4p_2\\ 4p_1-4p_3 & 8p_3-6p_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}-2p_1&=-1\\ +4p_1-4p_3&=0\\ +8p_3-6p_4&=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow p=\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}\Rightarrow\lambda_{\max}(p)=\frac{5}{6}$$

لدينا $1-2\varepsilon\lambda_{\max}(p)=1-2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{6}>0$

إذاً حل الجملة المدروسة مستقر تقاربياً حسب المبرهنة (5)

مثال (2): بفرض أنه لدينا جملة المعادلات التكاملية التفاضلية الكسرية:

$$D^{\alpha}x(t)=\mathrm{A}x(t)+\mathrm{I}^{\alpha}f\left(t,x(t)\right)\ ;\ 0<\alpha\le 1$$

باعتبار أنّ

$$x(t)=\left(x_1(t),x_2(t)\right)^T\ ,f\left(t,x(t)\right)=\left(\sin x_1(t),\sin x_2(t)\right)^T\ ,\mathrm{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

هنا لدينا

$$\left\|f\left(t,x(t)\right)\right\|=\sqrt{\sin^2 x_1(t)+\sin^2 x_2(t)}\le\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)}=\left\|x(t)\right\|$$

إذاً ثابت ليبشتز $\boxed{\varepsilon=1}$

لنوجد الآن مصفوفة موجبة p تحقق $\mathrm{A}^T p+p\mathrm{A}=-Q\ ;Q=\mathrm{I}$

$$\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-3p_1+p_3 & -3p_2+p_4\\ p_1-2p_2 & p_2-2p_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3p_1+p_2 & p_1-2p_2\\ -3p_3+p_4 & p_3-2p_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

بالحل نحصل على أنّ $p_1=p_4=1\ \&\ p_2=p_3=0$

$$\Rightarrow p=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

وبالتالي

$$V\left(t,x(t)\right)=x^T x=\left\|x\right\|^2>0$$

كما أنّ

$$D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le 2x^T(t)D^{\alpha}=\left[\mathrm{A}x+f\left(t,x(t)\right)\right]^T x+x^T\left[\mathrm{A}x+f\left(t,x(t)\right)\right]$$
$$D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le -6x_1^2+4x_1x_2-4x_2^2+2x_1\sin x_1+2x_2\sin x_2$$
$$D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le -6x_1^2+4x_1x_2-4x_2^2+2x_1^2+2x_2^2$$
$$D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le -4x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2\le -4\left(x_1-\frac{1}{2}x_2\right)^2-x_2^2$$

إذاً الحل الصفري للجملة المدروسة مستقر حسب المبرهنة الأساسية في الاستقرار كون أننا استطعنا إيجاد تابع ليبانوف الموجب $V\left(t,x(t)\right)$ ومشتقه السالب $D_*^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)<0$

يمكن التوصل إلى نفس النتيجة بالاعتماد على المبرهنة (6)

حيث أنّ $t\in\left[0,\frac{1}{16}\right],\alpha=\frac{1}{2},\varepsilon=1,\lambda_{\max}(p)=1$

وبالتالي

$$1-2\frac{\varepsilon}{\alpha\Gamma(\alpha)}\lambda_{\max}(p)\left\|t^{\alpha}\right\|=1-2\frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(1)\left(\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}>0$$

إذاً الحل الصفري للجملة المدروسة مستقر.

التوصيات والاستنتاجات: من خلال البحث المقدم حصلنا على النتائج التالية:

- إمكانية جعل جملة معادلات تكاملية–تفاضلية من مرتبة كسرية مستقرة وذلك باستخدام الصيغة التربيعية لتابع ليبانوف.
- إنّ الشروط اللازمة للحصول على استقرار الجملة المدروسة تكون أسهل فيما لو استخدمنا تابع ليبانوف في الإثبات.
- في دراساتنا القادمة سوف نتعمق في توضيح وشرح الأهمية النظرية والتطبيقية لتابع ليبانوف ودوره في استقرار الجمل الديناميكية.
- في الأبحاث القادمة سنوضّح أهمية الاشتقاق الكسري في التطبيقات الفيزيائية.

المراجع :

1-Benzaouia, A., Hmamed, A., Mesquiene, F., Benhayoun, M. and Tadeo, F., 2014-Stabilization of Continous- Time Fractional Positive Systems by Using a Lyapunov Function, IEEE Trans Autom. Cntrol, 59 (8): 2203- 2208.

2-Camacho, N.A., Mermoud, M. A. D. and Gallegos, J. A., 2014- Lyapunov Functions for Fractional Order Systems, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 19(9): 2951-2957.

3-Chen, Y. and Dadras, S., 2017- A Note On the Lyapunov Stability of Fractional- Order Nonlinear Systems.

4-Chen, L., He, Y., Wu, R. and Chai, Y., 2014- New Results On Stability and Stabilization of a Class of Non Linear Fractional Order Systems, Non Linear Dynamics, 75(4): 633-641.

5-Chen, Y. Q., Li, Y. and Podlubny, I., 2010- Stability of Fractional- Order Non Linear Dynamic Systemes: Lyapunov Direct Method and Generalized Mittag- Leffler Stability, Computers and Mathematics with Applications, 59(5): 1810-1821.

6-Chen, Y. Q. and Luo, Y., 2009- Fractional Order [Proportional Derivative] Controller for A Class of Fractional Order Systems, Automatica, 45(10): 2446-2450.

7-Chen, Y.Q. and Moore, K. L., 2002- Analytical Stability Bound for A Class of Delayed Fractional Order Dynamic Systems, Non Linear Dynamics, 29(1): 191-200.

8- Che, C., Xu, Q., Zhuang, S., Xu, X. and Xia, Y., 2018- Stabilization of A Class of Fractional- Order No Autonomous Systems Using Quadratic Lyapunov Functions, Advances in Difference Equations, (1): 1-14.

9-Ckreece, P. C. J., 2018- Finite Time Stability Criteria for Non Linear Foorder Dynamical Systems, Mathematical Theory and Modeling, 8(4): 145-155.

10-Hu, J. B., Lu, G.P., Zhang, S.B. and Zhao, L. D., 2015- Lyapunov Stability Theorem About Fractional System Without and with Delay, Communications in Non Linear Science and Numerical Simulation, 20(3): 905- 913.

11-Jiang, W., Liu, S., Li, X. and Zhou, X. F., 2016- Lyapunov Stability Analysis of Fractional Non Linear Systems, Applied Mathematics, 51(87): 13-19.

12-Magin, R., Ortigueira, M. D., Podlubny, I. and Trujillo, J., 2011- On The Fractional Signals and Systems, Signals Processing, 91(3): 350- 371.

13-Tarasov, V. E., 2013- No Violation of the Leibns Rule. No Fractional Derivative, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 18 (11): 2945- 2948.

14-Trinh, M. H. and Tuan, H. T., 2018- Stability of Fractioal Order Non Linear Systems by Lyapunov Direct Method, ET Control Theory and Applications, 12(7): 1-14.

15-Valdes- Parad, F. J. and Ocha- Tapia, J. A., 2007- Effective Medium Equations for Fractional Fick's Law In Porous Media, Physica A, 373(): 339-353.

أنصاف الزّمر على مجموعة الخماسيّات الفيثاغوريّة

الباحث: الدكتور باسل حمدو العرنوس

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كليّة العلوم – جامعة حمص

ملخّص البحث

قمنا في هذا البحث بتعريف عمليّة ثنائيّة مغلقة $*$ على مجموعة الخماسيّات الفيثاغوريّة PP_5، على النحو الآتي:

ليكن $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5),(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in PP_5$، نعرّف على PP_5 العمليّة الثّنائيّة الآتية:

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$$

حيث:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4 \\ c_2 &= a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3 \\ c_3 &= a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4 \\ c_4 &= a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2 \end{aligned} \quad , \quad c_5=a_5b_5$$

ومن ثمّ حصلنا على البنية الجبريّة $(PP_5,*)$.

قمنا بعد ذلك بإثبات أنّ هذه البنية هي نصف زمرة واحديّة.

الكلمات المفتاحيّة: خماسيّة فيثاغوريّة، رباعيّة فيثاغوريّة، ثلاثيّة فيثاغوريّة، بنية، نصف زمرة، محايد.

Semigroups on the Set of Pythagorean Pentads

Researcher: Dr. Basel Hamdo Al-Arnous

Assistant Professor, Department of Mathematics – Faculty of Science – Homs University.

Abstract

In this study, we define a closed operation $*$ on the set of Pythagorean pentads, denoted by PP_5, as follows:

Let $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5),(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in PP_5$. We define the following binary operation on PP_5:

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$$

Given that:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4 \\ c_2 &= a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3 \\ c_3 &= a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4 \\ c_4 &= a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2 \end{aligned} \quad , \quad c_5=a_5b_5$$

Accordingly, $(PP_5,*)$ forms an algebraic structure.

Then, We prove that this structure constitutes a semigroup.

Keywords:

Pythagorean pentad, Pythagorean quadruple, Pythagorean triple, structure, semigroup, identit.

1.مقدّمة

لتكن R حلقة صحيحة معرّفة فوق الحقل العددي K، نقول عن الثلاثيّة (a,b,c) حيث $a,b,c \in R$ ثلاثيّة فيثاغوريّة إذا كانت $a^2+b^2=c^2$.

في العام 1984 عرّف إيكيرت Eckert عمليّة جمع بين الثلاثيّات الفيثاغوريّة عندما $R=\mathbf{Z}$ على النحو الآتي:

$$(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2,c_1c_2)$$

بحيث تشكّل مجموعة كلّ الثّلاثيّات الفيثاغوريّة الصحيحة بالإضافة إلى $(1,0,1)$ مع العمليّة $+$ زمرة تبديلية $[1]$.

بعد ذلك وتحديداً في العام 1991 قام زناردو Zanardo و زانيير Zannier بتعميم المجال من $\mathbf{Z}$ إلى أي حلقة من الأعداد الصحيحة R $[2]$.

في العام 1996 قام بيوريجارد Beauregard و سوريانريان Suryanarayan بتعريف عمليّة مغلقة * على مجموعة كل الثلاثيّات الفيثاغوريّة الصحيحة، على النحو الآتي $[3]$:

$$(a_1,b_1,c_1)*(a_2,b_2,c_2)=(a_1a_2,b_1c_2,c_1b_2+b_1b_2+c_1c_2)$$

في هذا البحث، قمنا بتعريف الخماسيّات الفيثاغوريّة، ومن ثمّ تعريف عمليّة مغلقة * على مجموعة كل الخماسيّات الفيثاغوريّة PP_5، وأثبتنا أنّ البنية $(PP_5,*)$ هي نصف زمرة، وأوجدنا العنصر المحايد بالنسبة للعمليّة *.

استخدمنا في ذلك الأعداد فوق العقديّة (الكواترنيون)

2. هدف البحث

يهدف البحث إلى إيجاد عمليّة ثنائيّة على مجموعة كل الخماسيّات الفيثاغوريّة الصحيحة، وبالتالي توليد خماسيّة فيثاغوريّة من خماسيتين فيثاغوريّتين.

3. المناقشة و النّتائج

أوّلاً: مجموعة الأعداد فوق العقدية $[4]$:

تعريف1:

تعرّف مجموعة الأعداد فوق العقديّة (الكواتيرنيون) H، بأنّها مجموعة كلّ الأعداد التي لها الشّكل:

$$q = q_0 + q^* = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

حيث: $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ و i, j, k وحدات تحقّق الشروط الآتية:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = ijk &= -1 \\ ij = k &= -ji \\ jk = i &= -kj \\ ki = j &= -ik \end{aligned}$$

مثال 1: الأعداد الآتية فوق عقديّة:

$$4 + 2i - 2j + 3k \quad , \quad -5 \quad , \quad 2i - 3j + 3k \quad , \quad 5 - 4i$$

لكل عدد فوق عقدي قسمين: قسم حقيقي (سلّمي) وجزء متّجهي، فمن أجل العدد فوق العقدي:

$$q = q_0 + q^* = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

فإنّ الجزء الحقيقي: q_0، أمّا الجزء المتّجهي: $q^* = q_1 i + q_2 j + q_3 k$

ثانياً: جبر الأعداد فوق العقديّة $[5]$:

ليكن لدينا $p, q \in \mathrm{H}$ حيث:

$$p = p_0 + p^* = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$$
$$q = q_0 + q^* = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

تعريف2:

تُعرّف عمليّة جمع الأعداد فوق العقديّة $(+)$ على النّحو الآتي:

$$\begin{aligned} p + q &= (p_0 + q_0) + \left(p^* + q^*\right) \\ &= \left(p_0 + q_0\right) + \left(p_1 + q_1\right) i + \left(p_2 + q_2\right) j + \left(p_3 + q_3\right) k \end{aligned}$$

واضح أنّ الصّفر هو محايد بالنّسبة لعمليّة الجمع، وكذلك فإنّ لكل عدد p من H نظير جمعي، هو:

$$-p = -p_0 - p^* = -p_0 - p_1 i - p_2 j - p_3 k$$

تعريف3:

تُعرّف عمليّة ضرب الأعداد فوق العقديّة $(\cdot)$ على النّحو الآتي:

$$\begin{aligned} p.q = {} & (p_0.q_0) - \left(p_1.q_1 + p_2.q_2 + p_3.q_3\right) + \\ & + p_0\left(q_1 i + q_2 j + q_3 k\right) + q_0\left(p_1 i + p_2 j + p_3 k\right) + \\ & + \left(p_2.q_3 - p_3.q_2\right) i + \left(p_3.q_1 - p_1.q_3\right) j + \left(p_1.q_2 - p_2.q_1\right) k \end{aligned}$$

وهي تكتب بالشّكل الآتي:

$$p.q = (p_0.q_0) - p^* q^* + p_0 q^* + q_0 p^* + p^* \times q^*$$

حيث:

$$p^*.q^* = p_1.q_1 + p_2.q_2 + p_3.q_3$$
$$p^* \times q^* = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

ولأنّ: $p^* \times q^* \neq q^* \times p^*$ فإنّ الضّرب ليس عمليّة تبديليّة.

ثالثاً: المرافق، النّظيم، المقلوب $[6]$:

ليكن $q = q_0 + q^* = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ عدد فوق عقديّ.

تعريف4:

يُعرّف مرافق العدد q بانّه العدد $\bar{q}$ من H المعطى بالعلاقة الآتية:

$$\bar{q} = q_0 - q^* = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

من التّعريف ينتج أنّ:

1. $\overline{(\bar{q})} = q$ لأنّ: $\overline{(\bar{q})} = \overline{(q_0 - q^*)} = q_0 - (-q^*) = q_0 + q^* = q$
2. $q + \bar{q} = 2q_0$.
3. $q.\bar{q} = \bar{q}.q$ وعلاوةً على ذلك فإنّ:

$$q.\bar{q} = \bar{q}.q = q_0^{\ 2} + q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2} + q_3^{\ 2}$$

4. $\overline{(q.p)} = \bar{p}.\bar{q}$ حيث: $p \in \mathrm{H}$.

تعريف5:

يُعرّف نظيم العدد q بانّه العدد $|q|$ من المعطى بالعلاقة الآتية:

$$|q| = \sqrt{q.\bar{q}} = \sqrt{q_0^{\ 2} + q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2} + q_3^{\ 2}}$$

نتائج: ينتج من التّعريف أنّ:

1. $|q| = |\bar{q}|$.
2. $|p.q| = |p|.|q|$ حيث $p \in \mathrm{H}$ لأنّ:

$$|p.q|^2 = p.q.(\overline{p.q}) = p.q.\bar{q}.\bar{p} = p.|q|^2.\bar{p} = p.\bar{p}.|q|^2 = |p|^2.|q|^2$$

رابعاً: أعداد ليبشتز الصّحيحة $[7]$:

تعريف 6:

أعداد ليبشتز الصّحيحة هي مجموعة كلّ الأعداد فوق العقديّة التي مكوّناتها أعداد صحيحة، ونرمز لها بالرمز $\mathbb{L}$، أي أنّ:

$$\mathbb{L}=\{a+bi+cj+dk\in \mathrm{H};\ a,b,c,d\in\mathbb{Z}\}$$

خامساً: الخماسيّات الفيثاغوريّة $\mathbb{Z}$:

نعلم من نظريّة الأعداد، أنّ الثّلاثيّات الفيثاغوريّة في $\mathbb{Z}$ هي مجموعة كلّ الثّلاثيّات $\{x,y,z\}$ التي تحقّق معادلة ديوفانتس الآتية:

$$x^2+y^2=z^2\ ;\ \ x,y,z\in\mathbb{Z}$$

وعليه فإنّ الخماسيّات الفيثاغوريّة، هي مجموعة كلّ الخماسيّات $\{x,y,z,w,r\}$ والتي تحقّق معادلة ديوفانتس الآتية:

$$x^2+y^2+z^2+w^2=r^2\ ;\ \ x,y,z,w,r\in\mathbb{Z}^+$$

تعريف 7:

تسمّى خماسيّة فيثاغوريّة، كلّ خماسيّة (a,b,c,d,e)، حيث $a,b,c,d,e\in\mathbb{Z}$، وتحقّق الشّرط الآتي:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2$$

سنرمز لمجموعة كلّ الخماسيّات الفيثاغوريّة بالرّمز PP_5 وبالتّالي يكون:

$$PP_5=\{(a,b,c,d,e);\ a^2+b^2+c^2+d^2=e^2 : a,b,c,d,e\in\mathbb{Z}\}$$

مبرهنة 1 وتعريف 8:

ليكن $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5),(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in PP_5$، نعرّف على PP_5 العمليّة الثّنائيّة الآتية:

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$$

حيث:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 \\ c_2 &= a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 \\ c_3 &= a_1b_3 + a_3b_1 + a_4b_2 - a_2b_4 \\ c_4 &= a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2 \end{aligned} \quad , \quad c_5 = a_5b_5$$

عندئذٍ $(PP_5,*)$ بنية جبريّة.

الإثبات:

إنّ: $(0,0,0,0,0)\in PP_5$ وبالتّالي فإنّ: $PP_5 \neq \{\ \}$.

ليكن $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5),(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in PP_5$، ولنعرّف العددين p_1,p_2 بالشّكل الآتي:

$$p_1=\frac{a_1}{a_5}+\frac{a_2}{a_5}i+\frac{a_3}{a_5}j+\frac{a_4}{a_5}k \ , \quad p_2=\frac{b_1}{b_5}+\frac{b_2}{b_5}i+\frac{b_3}{b_5}j+\frac{b_4}{b_5}k$$

ويكون:

$$|p_1|=\sqrt{\frac{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+a_4^{\ 2}}{a_5^{\ 2}}}=\sqrt{\frac{a_5^{\ 2}}{a_5^{\ 2}}}=1\,,$$

$$|p_2|=\sqrt{\frac{b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+b_3^{\ 2}+b_4^{\ 2}}{b_5^{\ 2}}}=\sqrt{\frac{b_5^{\ 2}}{b_5^{\ 2}}}=1$$

وبالتّالي يكون: $|p_1.p_2|=|p_1|.|p_2|=1$

في الحقيقة فإنّ:

$$p_1.p_2=\frac{a_1.b_1}{a_5.b_5}-\left(\frac{a_2.b_2+a_3.b_3+a_4.b_4}{a_5.b_5}\right)+\frac{a_1}{a_5}\left(\frac{b_2}{b_5}i+\frac{b_3}{b_5}j+\frac{b_4}{b_5}k\right)$$

$$+\frac{b_1}{b_5}\left(\frac{a_2}{a_5}i+\frac{a_3}{a_5}j+\frac{a_4}{a_5}k\right)+\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{a_2}{a_5} & \frac{a_3}{a_5} & \frac{a_4}{a_5} \\ \frac{b_2}{b_5} & \frac{b_3}{b_5} & \frac{b_4}{b_5} \end{vmatrix}$$

بإصلاح العلاقة، يكون:

$$p_1.p_2=\left(\frac{a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4}{a_5.b_5}\right)+\left(\frac{a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3}{a_5.b_5}\right).i$$

$$=+\left(\frac{a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4}{a_5.b_5}\right).j+\left(\frac{a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2}{a_5.b_5}\right).k$$

وبحسب فرضيات المبرهنة يكون:

$$p_1.p_2=\left(\frac{c_1}{c_5}\right)+\left(\frac{c_2}{c_5}\right).i+\left(\frac{c_3}{c_5}\right).j+\left(\frac{c_4}{c_5}\right).k$$

ولأنّ $|p_1.p_2|=1$ فإنّ:

$$\left(\frac{c_1}{c_5}\right)^2+\left(\frac{c_2}{c_5}\right)^2+\left(\frac{c_3}{c_5}\right)^2+\left(\frac{c_4}{c_5}\right)^2=1$$

ومنه فإنّ:

$$c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2+c_4{}^2=c_5{}^2$$

وهذا يعني أنّ: $(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)\in PP_5$.

أي أنّ العمليّة $*$ هي قانون تشكيل داخلي على PP_5، وبالتّالي $(PP_5,*)$ تعرّف بنية جبريّة.

مثال 2:

ليكن: $(1,2,4,10,11),(1,2,8,10,13)\in PP_5$، لدينا:

$$(1,2,4,10,11)*(1,2,8,10,13)=(-135,-36,12,28,143)$$

إنّ:

$$(-135)^2+(-36)^2+(12)^2+(28)^2=20449$$
$$(143)^2=20449$$

وبالتّالي فإنّ: $(-135,-36,12,28,143)\in PP_5$.

مبرهنة 2:

تقبل العمليّة $*$ في البنية الجبريّة $(PP_5,*)$ عنصراً محايداً، هو $(1,0,0,0,1)$.

الإثبات:

لنفرض وجود عنصر محايد يميني (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) للعمليّة $*$، عندئذٍ يكون:

مهما يكن (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) من $PP_5\setminus\{(0,0,0,0,0)\}$، فإنّ:

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5)=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$$

وبالتّالي فإنّ:

$$\begin{aligned}
&a_1e_1-a_2e_2-a_3e_3-a_4e_4=a_1\\
&a_1e_2+a_2e_1+a_3e_4-a_4e_3=a_2\\
&a_1e_3+a_3e_1+a_4e_2-a_2e_4=a_3\\
&a_1e_4+a_4e_1+a_2e_3-a_3e_2=a_4\\
&a_5e_5=a_5
\end{aligned}\qquad(1)$$

من العلاقة الأخيرة ينتج أنّ $e_5=1$، ولأنّ $(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5)\in PP_5$ فإنّ إحدى الأعداد e_1,e_2,e_3,e_4 يساوي 1 أو -1 والباقي أصفاراً. بالعودة إلى الجملة (1)، تُكتب المعادلات الأربع الأولى منها بالشّكل الآتي:

$$\begin{aligned} a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3 - a_4e_4 &= a_1 \\ a_2e_1 + a_1e_2 - a_4e_3 + a_3e_4 &= a_2 \\ a_3e_1 + a_4e_2 + a_1e_3 - a_2e_4 &= a_3 \\ a_4e_1 - a_3e_2 + a_2e_3 + a_1e_4 &= a_4 \end{aligned} \qquad (2)$$

نضرب الأولى بـ a_2 والثانية بـ $-a_1$ ونجمع المعادلتين الناتجتين، ثمّ نضرب الأولى بـ a_3 والثالثة بـ $-a_1$ ونجمع المعادلتين الناتجتين، وأخيراً نضرب الأولى بـ a_4 والرابعة بـ $-a_1$ ونجمع المعادلتين الناتجتين، نحصل على:

$$\begin{aligned} -\left(a_1^{\,2} + a_2^{\,2}\right)e_2 + \left(a_1a_4 - a_2a_3\right)e_3 - \left(a_1a_3 + a_2a_4\right)e_4 &= 0 \\ -\left(a_1a_4 + a_2a_3\right)e_2 - \left(a_1^{\,2} + a_3^{\,2}\right)e_3 + \left(a_1a_2 - a_3a_4\right)e_4 &= 0 \\ \left(a_1a_3 - a_4a_2\right)e_2 - \left(a_1a_2 + a_3a_4\right)e_3 - \left(a_1^{\,2} + a_4^{\,2}\right)e_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

الجملة (3) هي جملة متجانسة، وحيث أنّ اثنين من e_2, e_3, e_4 على الأقل تساوي الصفر، فإنّ $e_2 = e_3 = e_4 = 0$، بالتعويض في الجملة (2) نحصل على:

$$a_1e_1 = a_1, \quad a_2e_1 = a_2, \quad a_3e_1 = a_3, \quad a_4e_1 = a_4$$

وهي تكافئ: $e_1 = 1$، وعلى هذا يكون:

$$\left(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\right) = \left(1,0,0,0,1\right)$$

وبنفس الطريقة نستنتج أنّ: $(1,0,0,0,1)$ محايد يساري للعمليّة $*$.

مبرهنة 3:

إنّ العمليّة $*$ المعرّفة على البنية الجبريّة $(PP_5, *)$ هي عمليّة تجميعيّة.

الإثبات:

ليكن: $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5), (b_1,b_2,b_3,b_4,b_5), (c_1,c_2,c_3,c_4,c_5) \in PP_5$ لنفرض أنّ:

$$\begin{aligned}&(d_1,d_2,d_3,d_4,d_5)=\\&=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*\left[(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)*(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)\right]\end{aligned}$$

عندئذٍ يكون:

$$\begin{aligned}(d_1,d_2,d_3,d_4,d_5)=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*\\(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4,b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3,\\b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4,b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2,b_5c_5)\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}d_1=a_1(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)-a_2(b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3)\\-a_3(b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4)-a_4(b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2)\end{aligned}$$

وكذلك:

$$\begin{aligned}d_2&=a_1(b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3)+a_2(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)+\\&\quad+a_3(b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2)-a_4(b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4)\\d_3&=a_1(b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4)+a_3(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)+\\&\quad+a_4(b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3)-a_2(b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2)\\d_4&=a_1(b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2)+a_4(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)+\\&\quad+a_2(b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4)-a_3(b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3)\\d_5&=a_5(b_5c_5)=a_5b_5c_5\end{aligned}$$

الآن بفرض أنّ:

$$\begin{aligned}&(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)=\\&=\left[(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\right]*(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)\end{aligned}$$

عندئذٍ يكون:

$$\begin{aligned}(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5) = (&a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4,\\ &a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3, a_1b_3 + a_3b_1 + a_4b_2 - a_2b_4,\\ &a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2, a_5b_5) * (c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}f_1 &= (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4).c_1 - (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3).c_2 -\\ &-(a_1b_3 + a_3b_1 + a_4b_2 - a_2b_4).c_3 - (a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2).c_4\\ &= a_1(b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3 - b_4c_4) - a_2(b_2c_1 + b_1c_2 - b_4c_3 + b_3c_4) -\\ &-a_3(b_3c_1 + b_1c_3 + b_4c_2 - b_2c_4) - a_4(b_4c_1 + b_1c_4 - b_3c_2 + b_2c_3)\end{aligned}$$

وبالمثل نجد:

$$\begin{aligned}f_2 &= a_1(b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_4 - b_4c_3) + a_2(b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3 - b_4c_4) +\\ &+a_3(b_1c_4 + b_4c_1 + b_2c_3 - b_3c_2) - a_4(b_1c_3 + b_3c_1 + b_4c_2 - b_2c_4)\\ f_3 &= a_1(b_1c_3 + b_3c_1 + b_4c_2 - b_2c_4) + a_3(b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3 - b_4c_4) +\\ &+a_4(b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_4 - b_4c_3) - a_2(b_1c_4 + b_4c_1 + b_2c_3 - b_3c_2)\\ f_4 &= a_1(b_1c_4 + b_4c_1 + b_2c_3 - b_3c_2) + a_4(b_1c_1 - b_2c_2 - b_3c_3 - b_4c_4) +\\ &+a_2(b_1c_3 + b_3c_1 + b_4c_2 - b_2c_4) - a_3(b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_4 - b_4c_3)\\ f_5 &= (a_5b_5)c_5 = a_5b_5c_5\end{aligned}$$

واضح أنّ: $(d_1,d_2,d_3,d_4,d_5) = (f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)$، وبالتّالي فإنّ العمليّة * هي عمليّة تجميعيّة.

مثال 3:

ليكن: $(1,1,3,5,6),(1,1,1,1,2),(1,2,4,10,11) \in PP_5$:

لدينا من جهة أولى:

$$\left[(1,1,3,5,6)*(1,1,1,1,2)\right]*(1,2,4,10,11)=$$
$$=(-8,0,8,4,12)*(1,2,4,10,11)=$$
$$=(-80,48,-16,-92,132)$$

من جهة أخرى:

$$(1,1,3,5,6)*\left[(1,1,1,1,2)*(1,2,4,10,11)\right]=$$
$$=(1,1,3,5,6)*(-15,9,-3,13,22)=$$
$$=(-80,48,-16,-92,132)$$

4. المقترحات والتوصيات

قمنا في هذا البحث بتعريف عملية ثنائيّة * على مجموعة الخماسيات الفيثاغوريّة PP_5، وأوجدنا العنصر المحايد في البنية الجبرية $(PP_5,*)$، وأثبتنا أنّ هذه البنية هي نصف زمرة.

لذلك يمكن متابعة العمل في هذه البنية كدراسة كونها زمرة أم لا، وإيجاد صيغة مقلوب خماسية فيثاغوريّة وفق العمليّة *، وإيجاد الحالات الخاصّة.

5.المراجع العلمية

1. Ernest J. Eckert, The Group of Primitive Pythagorean Triangles, Mathematics Magazine, 57 (Jan., 1984
2. P. Zanardo and U. Zannier, The group of pythagorean triples in number fields, Annali di Matematica pura ed applicata (IV), CLIX (1991)
3. Raymond A. Beauregard and E. R. Suryanarayan, Pythagorean Triples: The Hyperbolic View, The College Mathematics Journal, 27 (May, 1996)
4. Ant_onio Machiavelo and Lu__s Ro_cadas, Some connections between the arithmetic and geometry of Lipschitz integers,(2011)
5. John H. Conway and Derek Smith, On Quaternions and Octonions, AK Peters (2003)
6. J. B. Kuipers. Quaternions and Rotation Sequences. Princeton University Press, (1999).
7. S. L. Altmann. “Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal,” *Mathematics Magazine* 62(5), (December 1989).

دراسة كيفية تحديد الخصائص الضوئية للمركبات الكيميائية كوانتياً: بعض مكونات مواد التجميل كأمثلة

أ.د. عدنان كودلأ (*)

ملخص البحث

تمّ في هذا العمل توضيح كيفية دراسة الخصائص الضوئية للمركبات الكيميائية كوانتياً عن طريق تطبيق ذلك على بعض مكونات التجميل. حيث تمّ اختيار مركبين من مكونات مواد التجميل أحدهما في أثناء تنفيذ الحسابات هو حمض الأكريليك (Acrylic acid) من أجل توضيح كيفية تنفيذ خطوات العمل والآخر في أثناء مناقشة الخصائص هو بروبيلين غليكول (Propylene glycol) من أجل توضيح كيفية مناقشة النتائج. أظهرت نتائج التطبيق:

- أن كلا المركبين يمتصان الأشعة فوق البنفسجية UVC ، حيث يبلغ طول موجة الامتصاص في حالة حمض الأكريليك (257.24 nm) وفي حالة بروبيلين غليكول (189.53 nm).
- يتأثر كلا المركبين بالضوء حيث يبلغ المردود الكوانتي بالنسبة لـ حمض الأكريليك (27 %) وبالنسبة لـ بروبيلين غليكول (49 %).
- يتمتع كلا المركبين بخاصية الفلورة، حيث يلاحظ تألق باللون البنفسجي في حالة حمض الأكريليك ويمتلك طيف الفلورة قمة وحيدة عند طول الموجة (404.54 nm)، كما يلاحظ تألق باللون البنفسجي في حالة بروبيلين غليكول وتظهر أيضاً قمة وحيدة في طيف الفلورة عند طول الموجة (437.37 nm).
- لا يتمتع أي من المركبين بخاصية الفسفرة لعدم إمكانية حدوث اقتران مدار–سبين المرتبط بحدوث تداخل بين السويات الاهتزازية في الحالتين الثلاثية والأحادية وهذا غير ممكن لكون

طاقة العبور بين الأنظمة كبيرة جداً، حيث تبلغ (2.0203 eV) في حالة حمض الأكريليك بينما في حالة بروبيلين غليكول فتبلغ (2.5070 eV).

وللتأكد من مصداقية الخطوات المعتمدة ودقة الطريقة الكوانتية المستخدمة تمّ تحديد طيف الأشعة المرئية وفوق البنفسجية (UV-Vis Spectrum) وكذلك طيف الأشعة تحت الحمراء (Infra-Red Spectrum) لـ بروبيلين غليكول ومقارنتها مع الأطياف التجريبية المرجعية حيث وجد توافق جيد.

الكلمات المفتاحية: الكيمياء الكوانتية ، نظرية تابعية الكثافة ، خطوات العمل ، الخصائص الضوئية ، الفلورة ، الفسفرة ، مخطط جابلونسكي ، مواد التجميل ، حمض الأكريليك ، بروبيلين غليكول.

(*) أستاذ في قسم الكيمياء–كلية العلوم–جامعة حمص–حمص، سورية

A study on how to determine the optical properties of chemical compounds by quantum-chemistry: Some cosmetic ingredients as examples

Prof. Dr. Adnan Kodlaa (*)

Abstract

In this work, it was demonstrated how to study the optical properties of chemical compounds quantitatively by applying this to some cosmetic ingredients. Two components of cosmetics were chosen, one of which was acrylic acid during the calculations, in order to clarify how to implement the working steps, and the other, during the discussion of properties, was propylene glycol, in order to clarify how to discuss the results. Application results showed:

- Both compounds are affected by light, as the quantum yield for acrylic acid is (27%) and for propylene glycol (49%).
- Both compounds have the property of florescence, as violet photoluminescence is observed in the case of acrylic acid at the wavelength (404.54 nm), too violet photoluminescence is observed in the case of propylene glycol at the wavelength (437.37 nm).
- Neither compound has the property of phosphorescence because it is not possible for spin-orbit coupling to occur associated with interference between the vibrational levels in the triple and single states. This is not possible because the crossing energy between the systems is very large, reaching (1.5556 eV) in the case of acrylic acid while in the case of propylene glycol it reaches (2.4070 eV).

To ensure the reliability of the steps adopted and the accuracy of the quantum method used, the visible-ultraviolet spectrum (UV-Vis spectrum) as well as the infra-red spectrum (IR-spectrum) of propylene glycol were

determined and compared with the returned experimental spectra, where good agreement was found.

Keywords: Quantum chemistry, density functional theory , working steps , optical properties fluorescence , phosphorescence , Jablonsky diagram , cosmetics , acrylic acid , propylene glycol.

(*) Department of chemistry-Faculty of sciences – Albaath university-Homs , Syria

I- المقدمة (Introduction):

I-1- تمهيد (Preface):

لعبت الكيمياء الضوئية دوراً كبيراً ومهماً في الصناعات بمختلف أنواعها ومنها صناعة العقاقير والمستحضرات الصيدلانية وصناعة مستحضرات التجميل، إذ تُعد مستحضرات التجميل إحدى أهم تطبيقات الكيمياء التي تستخدم في الحياة اليومية، حيث تحتوي على مواد طبيعية ومواد كيميائية وتُعد المواد الكيميائية هي المواد الأكثر شيوعاً واستخداماً. فهناك الألاف من منتجات التجميل المختلفة في الأسواق وكلها تحتوي على مجموعات مختلفة من المكونات، يحتوي المكون الواحد مايقارب (10-15) مادة.

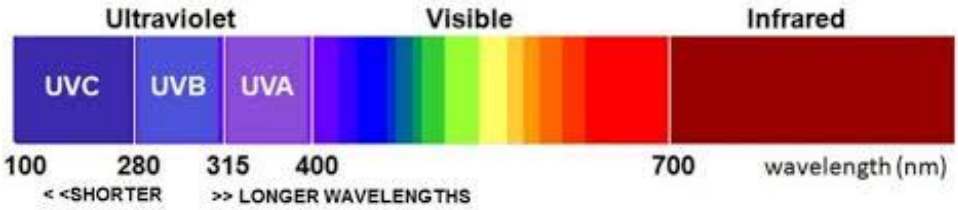
يُسمى التفاعل الناتج عن امتصاص الطاقة على شكل ضوء بالتفاعل الكيميائي الضوئي حيث أن نتيجة امتصاص الجزيئات للضوء تُخلق حالات مُثارة انتقالية تختلف خصائصها الفيزيائية والكيميائية بشكل كبير عن الجزيئات الأصلية. ولفهم آلية تأثير الضوء على خصائص المركبات الكيميائية كان لابد من تطوير طريقة تسمح بدراسة هذه التأثيرات على المستوي الجزيئي.

I-2- مفاهيم أساسية (Basic concepts):

I-2-1- تعاريف (Definitions):

- **الضوء:** عبارة عن أمواج كهرومغناطيسية (كهرطيسية) لأنها تنشأ عن تداخل الحقلين الكهربائي والمغناطيسي المتعامدين معاً [1]. يتم استخدام تعبير "الضوء" للإشارة إلى الإشعاع الكهرومغناطيسي القادر على التسبب في الإثارة الإلكترونية أو التخميد الإلكتروني للجزيئات، وهو يتضمن جزء من الطيف الكهرومغناطيسي ضمن المجال (100-1000

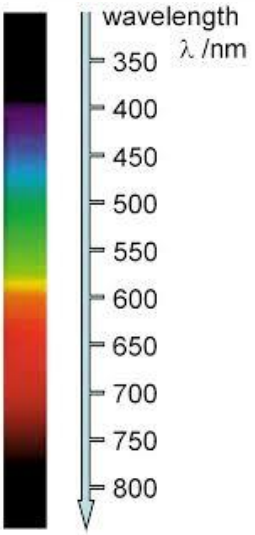
(nm [2]، بما في ذلك المناطق القريبة من الأشعة فوق البنفسجية والمرئية وقريبة من الأشعة تحت الحمراء. كما هو موضح في الشكل (1). ويبين الجدول (1) أطوال أمواج الضوء المرئي.



الشكل (1): المجال المرئي وفوق البنفسجي في الطيف

الجدول (1): أطوال أمواج الضوء المرئي (Wavelengths of visible Light).

Color	Wavelength (nm)	Frequency (THz)	Photon energy (eV)
violet	380–450	670–790	2.75–3.26
blue	450–485	620–670	2.56–2.75
cyan	485–500	600–620	2.48–2.56
green	500–565	530–600	2.19–2.48
yellow	565–590	510–530	2.10–2.19
orange	590–625	480–510	1.98–2.10
red	625–750	400–480	1.65–1.98



- **الكيمياء الضوئية:** هي فرع من الكيمياء تهتم بالآثار الكيميائية للضوء (التفاعلات والتماكب والسلوك الفيزيائي التي تحدث تحت تأثير الضوء). عموماً يُستخدم هذا المصطلح لوصف التفاعلات الكيميائية الناتجة عن امتصاص الأشعة فوق البنفسجية التي تتراوح أطوال أمواجها (100-400 nm) والتي تقسم إلى ثلاثة مناطق { UVC [100-280] , UVB [280-315] . UVA [315-400] } أو الضوء المرئي

الذي تتراوح أطوال أمواجه (400-750 nm) أو الأشعة تحت الحمراء التي تتراوح أطوال أمواجها (750-2500 nm).

- **التفاعل الكيميائي الضوئي:** هو تفاعل ناتج عن امتصاص الطاقة على شكل ضوء؛ حيث نتيجة امتصاص الجزيئات للضوء تُخلق حالات مُثارة انتقالية تختلف خصائصها الفيزيائية والكيميائية بشكل كبير عن الجزيئات الأصلية. إن استخدام الضوء لتحفيز التفاعلات الكيميائية هي واحدة من أكثر الطرائق فعالية وانتقائية؛ حيث عندما تمتص جزيئة ما فوتوناً ضوئياً، تتغير بنيتها الالكترونية، وتتفاعل بشكل مختلف مع الجزيئات الأخرى. إن الطاقة التي تمتصها الجزيئة نتيجة تعرّضها للضوء تسبب تغيرات ضوئية في الجزيئة، أو في جزيئة مجاورة (على سبيل المثال، حساسية ضوئية). إن الفائض من الطاقة يُمكن أن يُعطى في صورة حرارة، (مثال ذلك الاسترخاءات الاهتزازية) أو ضوء أخفض طاقياً (مثال ذلك الفلورة أو الفسفرة) من أجل عودة الجزيئة إلى الحالة الأساسية. إذ ترتبط الطاقة الزائدة للحالات المثارة إلكترونياً في معظم الأحيان ببنية إلكترونية مختلفة تماماً عن الحالة الأساسية. قد يؤدي هذا إلى تفاعل مختلف نوعياً. كما يمكن اعتبار الجزيئات المثارة إلكترونياً أنواع كيميائية جديدة تماماً ولها خصائص تفاعلية خاصة بها وتختلف عن الحالة الأساسية [3].
- **أنواع التفاعلات الكيميائية التي يسببها الضوء:**
  - التفكك الضوئي Photodissociation (photofragmentation)
  - التحلق الضوئي Photocycloaddition
  - التماكب الضوئي Photoisomerization
  - البلمرة الضوئية Photopolymerization
  - إعادة الترتيب Photorearrangements
  - تفاعلات الاضافة Photo addition
  - تفاعلات التبادل Photosubstitution
  - الاكسدة الضوئية Photooxidation
  - الارجاع الضوئي Photoreduction

- التمثيل الضوئي في النبات.

I-2-2- القوانين الأساسية في الكيمياء الضوئية

(The basic Laws in Photochemistry):

هناك عدة مبادئ أساسية لفهم التحولات الكيمياضوئية والمتمثلة بالقوانين الآتية:

- **قانون ماكس بلانك (Max Plank Law)** [4]**:** إن أيـــة جـــملة (ذرة ، جزيئة، ...) لا يمكنها أن تمتص أو تصدر الطاقة (الضوء) بشكل عشوائي، وإنما فقط على شكل مقادير هي من مضـاعفات طاقة أسـاسـية (ε) تُسـمى الكوانتوم أو الفوتون وتتناسـب هذه الطاقة طرداً مع تواتر الاشعاع.

$$E_n = n\,\varepsilon = n\,h\,\nu = n\,hc\bar{\nu} = n\frac{hc}{\lambda} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

حيث:

h : ثابت بلانك وقيمته ($h = 6.626 \times 10^{-34}$ J.s).

c : سرعة انتشار الإشعاع (سرعة الضوء) ($c = 3 \times 10^{10}$ cm.s^{-1}).

ν : تواتر الإشعاع ، $\bar{\nu}$: العدد الموجي ، λ : طول موجة الإشعاع.

- **قانون غروتهاس- درابر (Grotthuss–Draper)** [5]**:** حتى يحدث التفاعل الكيمياضوئي يجب امتصاص الضوء. فإذا كان طول موجة الضوء مختلف عن طول الموجة التي تمتصها الجزيئة لا يحصل تفاعل كيميائي ولا يكون له تأثير بيولوجي مهما طال زمن إشعاع الضوء مختلف طول الموجة.
- **قانون ستارك-آينشتاين (Stark-Einstein)** [6]**:** لكل فوتون ضوئي تمتصه المواد المتفاعلة يتم تنشيط جزيئة واحدة فقط من أجل التفاعل اللاحق (ويُسمى بقانون التكافؤ الضوئي؛ حيث تمّ اشتقاقه من قبل ألبيرت آينشتاين (Albert Einstein) في أثناء تطويره للنظرية الكوانتية للضوء). هذا القانون صحيح بالنسبة لشدة الضوء العادي، أما بالنسبة لأشعة الليزر ذات الطاقة العالية يمكن لفوتونين أن يحدثا تفاعل، مثلا يتم إثارة الجزيئة

إلى حالة طاقية أعلى من التي يسببها امتصاص فوتون واحد. وفي مثل هذه الحالة يُمكن أن تكون طاقة الفوتون الصادر أكبر من طاقة الفوتون الممتص.

- **قانون بيير–لامبيرت (Beer-Lambert)** [7]: إذا سقطت حزمة من الأشعة فوق البنفسجية أو الضوء المرئي (UV-Vis) على محلول مادة كيميائية، فإن جزء منها (I_a) (يُمتص والجزء الآخر(I_t) ينفذ وتكون شدة الأشعة النافذة دوماً أقل من شدة الأشعة الواردة (I_0). حيث وجد العالم بيير أن الامتصاصية (A) تتناسب طرداً مع التركيز (C)، كما وجد لامبيرت أن الامتصاصية تتناسب طرداً مع طول المسار الضوئي داخل المحلول (L). وترتبط الأشعة النافذة بالواردة بالعلاقة الآتية:

$$A = \log\left(\frac{I_0}{I_t}\right) = \varepsilon\, C\, L$$

حيث ε : معامل الامتصاص الجزيئي واحدته ($Lit\ .\ mol^{-1}.\ cm^{-1}$)

- **المردود الكوانتي (Quantum-Yield)** [6]: يُستخدم هذا المصطلح للتعبير عن فعالية التفاعل الكيمياضوئي، أي مدى استغلاله للطاقة الممتصة. حيث يُعرّف المردود الكوانتي لعملية كيمياضوئية أو فيزياضوئية بنسبة عدد الجزيئات المتفاعلة أو المتشكلة في زمن معين إلى عدد الفوتونات الممتصة خلال نفس الزمن ويُرمز له بـ **(Φ)** ويُعطى بالعلاقة الآتية :

$$\Phi = \frac{N_A \times n}{I_a \times t}$$

حيث

n : عدد المولات ، I_a : شدة الضوء الممتص (عدد الفوتونات الممتصة في الثانية)

N_A : عدد أفوكادرو وقيمته ($6.022 \times 10^{23}\ mol^{-1}$) ، t : زمن التفاعل بالثانية.

- **مراحل التفاعل الكيميائي الضوئي:**

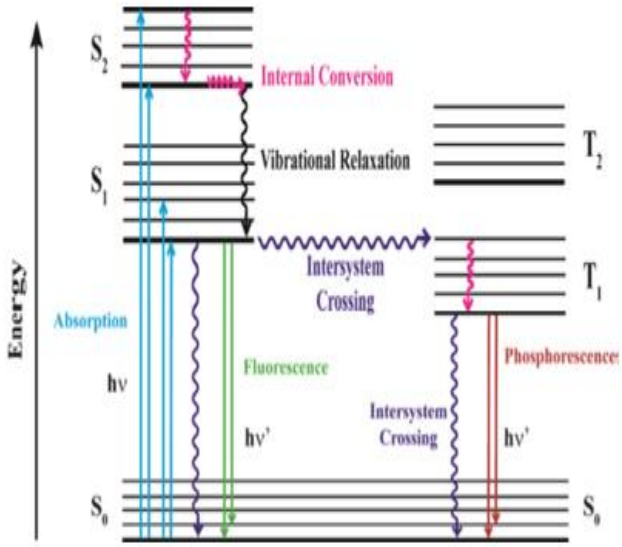
تحدث معظم التفاعلات الكيميائية الضوئية في ثلاث مراحل [8]:

1. امتصاص الضوء (الإشعاع الكهرومغناطيسي) لإنتاج الحالات الإلكترونية المثارة.
2. التفاعلات الكيمياضوئية الأولية المتضمنة على الحالات الإلكترونية المثارة.

3. تحول نواتج التفاعل الكيمياضوئي لمنتجات مستقرة.

I-2-3- مخطط جابلونسكي (Jablonski Diagram) [9]:

يُستخدم مخطط جابلونسكي لتصوّر العمليات الفيزياضوئية الممكنة لجزيئة مُثارة في المحلول: امتصاص الفوتون التحول الداخلي ، الفلورة ، العبور بين الأنظمة ، الفسفرة ، تخميد الفلورة والانتقالات بين الحالات الثلاثية. ويُشار إلى الحالات (المستويات) الإلكترونية الأحادية S_0 (الحالة الإلكترونية الأساسية) S_1 ، S_2 ، . . . (الحالات المُثارة) وإلى الحالات الثلاثية المُثارة T_1، T_2 . . . والسويات الاهتزازية ضمن كل حالة 0 ، 1 ، 2 ، .... .



الشكل (1): مخطط جابلونسكي

- **الامتصاص أو الإثارة (Absorption or Excitation):**

عندما تتعرض جزيئة ما لضوء مناسب تمتص الطاقة وتنتقل إلى الحالة المُثارة نتيجة الانتقالات بين المستوي الإلكتروني الأساسي (S_0) والمستويات الإلكترونية المثارة (S_1 , S_2 ,...) والسويات الاهتزازية ضمن هذه المستويات الإلكترونية (0 , 1 , 2 , ...).

- **التحول الداخلي (Internal Conversion):**

هو انتقال غير إشعاعي بين مستويين إلكترونيين من نفس التعددية (أي لهما نفس مضروب السبين) في المحلول، ويتبع هذه العملية استرخاء نحو السوية الاهتزازية الأخفض من الحالة الإلكترونية الأخيرة. تنتقل الطاقة الاهتزازية الزائدة إلى المذيب خلال اصطدام الجزيئة المثارة مع جزيئات المذيب المحيطة بها. إن التحول الداخلي من S_1 إلى S_0 ممكن ولكن أقل كفاءة من التحول S_2 إلى S_1، لأن فجوة الطاقة بين S_1 و S_0 أكبر بكثير. لذلك فالتحول الداخلي من S_1 إلى S_0 يُمكن أن يتنافس مع الفلّورة والعبور بين الأنظمة.

- **الفلّورة (Fluorescence):**

هي انبعاث الفوتونات المرافقة للاسترخاء ($S_1 \rightarrow S_0$)، أي المرافقة للاسترخاء من المستوي الإلكتروني المثار الأول إلى المستوي الإلكتروني الأساسي أو إلى السويات الاهتزازية ضمن هذا المستوي. إن الانتقال 0−0 هو نفسه بالنسبة للامتصاص والفلورة. لكن يقع طيف الفلورة عند أطوال موجية أعلى (طاقة أخفض) من طيف الامتصاص بسبب فقدان الطاقة في الحالة المثارة العائد للاسترخاءات الاهتزازية. وينبغي التأكيد على أنه وبصرف النظر عن بعض الاستثناءات القليلة، يحدث انبعاث الفلّورة من S_1، وبالتالي خصائصه (باستثناء الاستقطاب) لا تعتمد على طول موجة الإثارة. وفقا لقاعدة ستوكس، يجب أن يكون طول موجة اصدار الفلورة دائما أكبر من طول موجة الامتصاص ومع ذلك في معظم الحالات يحصل تداخل جزئي بين طيف الامتصاص والفلّورة.

- **العبور بين الأنظمة ISC (InterSystem Crossing):**

هو انتقال غير اشعاعي بين سويتين اهتزازيتين تنتمي لحالات إلكترونية مختلفة التعددية. على سبيل المثال، جزيئة مثارة في السوية الاهتزازية 0 في الحالة المثارة S_1 يُمكن أن تنتقل إلى

سوية اهتزازية في الحالة المثارة T الثلاثية وهنا يغير السبين اتجاهه ويكون للإلكترونين نفس السبين، ويكون العبور بين الأنظمة أسرع من عمليات المنافسة الأخرى (التحول الداخلي والفلّورة $S_1 \rightarrow S_0$). إن العبور بين الأنظمة لتعدديات مختلفة من حيث المبدأ ممنوع، ولكن الاقتران مدار– سبين (مثلا: العزم المغناطيسي المداري والعزم المغناطيسي السبيني) يُمكن أن يكون كبير كفاية لجعل ذلك مُمكن. إن احتمال العبور بين الأنظمة يعتمد على الحالات الأحادية والثلاثية الممكنة. وإذا كان الانتقال ($S_0 \rightarrow S_1$) من النمط ($n \rightarrow \pi^*$) فإن العبور يكون فعال غالباً. كما تجدر الإشارة إلى أن وجود الذرات الثقيلة (مثل: البروم، والرصاص) يزيد الاقتران سبين– مدار وهذا يزيد احتمال العبور بين الأنظمة.

- **الفسفرة (Phosphorescence):**

هي انبعاث الفوتونات المرافقة للاسترخاء ($T_1 \rightarrow S_0$)، أي الانتقال من أدنى حالة ثلاثية متوازنة حرارياً الى الحالة الأساسية S_0. تحدث الفسفرة عند أطوال موجية أطول من الفلّورة. لأن الحالة T_1 أخفض طاقياً من الحالة S_1.

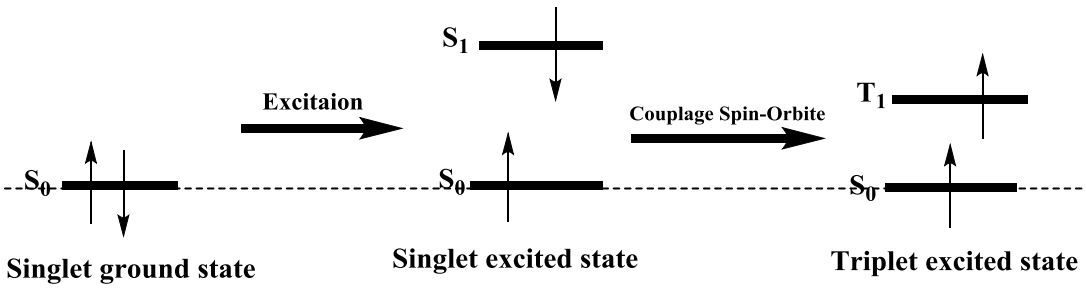
إن الانتقال ($T_1 \rightarrow S_0$) ممنوع في المحلول عند درجة حرارة الغرفة (ولكن يمكن ملاحظته بسبب التزاوج مدار– سبين)، وثابت معدل الإشعاع منخفض جداً. وبالتالي هذه العملية بطيئة وبسبب التصادمات مع جزيئات المذيب تكون عملية العبور بين الأنظمة والاسترخاء الاهتزازي أفضل من الفسفرة. وعلى العكس من ذلك يُمكن ملاحظة عملية الفسفرة في درجات حرارة منخفضة و/أو في الاوساط الصلبة ومراقبتها على مقياس زمني حيث تصل إلى ثوان، دقائق أو أكثر، لأن عمر الحالة الثلاثية تكون طويلة بما فيه الكفاية في هذه الظروف. ويقع طيف الفسفرة عند أطوال موجية أعلى من طيف الفلّورة لأن طاقة الحالة الثلاثية أخفض من طاقة الحالة المثارة الأحادية.

- **تخميد الفلّورة (Fluorescent Damping):**

يُمكن تخفيض كثافة الفلّورة عن طريق مجموعة متنوعة واسعة من العمليات. وتُسمى هذه الانخفاضات تخميد. يحدث التخميد الفعال عندما تتصادم الجزيئات المُثارة مع جزيئات أخرى في المحلول التي تدعى مخمد. حيث يتم إرجاع الجزيئة المثارة الى الحالة الأساسية ولا تتغير

الجزيئات كيميائياً في هذه العملية (يوصف الانخفاض في الكثافة بمعادلة ستيرن- فولمر المعروفة). هناك مجموعة واسعة من الجزيئات التي يُمكن أن تكون بمثابة مخمد مثال ذلك: الأكسجين ، الهالوجينات ، الأمينات ، الجزيئات التي تعاني من نقص الإلكترون مثل مادة الأكريلاميد. إن آلية التخميد تختلف باختلاف الزوج (مخمد-جزيئة مثارة). ويحدث التخميد بوساطة الهالوجينات والذرات الثقيلة بسبب الاقتران مدار- سبين والعبور إلى الحالة الثلاثية.

- **توضيح الاقتران مدار- سبين والعبور إلى الحالة الثلاثية:**



يُعد العبور بين الأنظمة (ISC) عملية بدون إشعاعات تنطوي على انتقال بين حالتين إلكترونيتين مختلفتين بمضروب السبين.

يُمكن للإلكترونات المُثارة أن تخضع لمرحلة العبور بين الأنظمة لخلق حالة متدنية ذات مضروب سبين مختلف. عندما يتم تحفيز إلكترون في جزيئة بحالته الأساسية (عن طريق امتصاص الإشعاع) إلى مستوى طاقة أعلى، ستتشكل إما حالة مُثارة أحادية أو حالة مُثارة ثلاثية. إن الحالة الأحادية هي حالة إلكترونية جزيئية بحيث تكون سبينات جميع الإلكترونات متزاوجة. وهذا يعني أن سبين الإلكترون المُثار لا يزال متزاوجاً بإلكترون الحالة الأساسية (يجب على زوج من الإلكترونات في نفس مستوى الطاقة أن يكون لهما سبينات متعاكسة، وفقًا لمبدأ استبعاد باولي). في الحالة الثلاثية، لم يعد الإلكترون المُثار متزاوجاً مع إلكترون الحالة الأساسية؛ أي أنها متوازية (لهما نفس الاتجاه). بما أن الإثارة إلى الحالة الثلاثية تنطوي على انتقال إضافي "ممنوع"، فمن غير المحتمل أن تتشكل حالة ثلاثية عندما تمتص الجزيئة الإشعاع. عندما يتم العبور غير المشع من الحالة الأحادية إلى الحالة الثلاثية، أو من الحالة

الثلاثية إلى الحالة الأساسية، تُعرف هذه العملية باسم العبور بين الأنظمة. في جوهرها، يتم عكس اتجاه سبين الإلكترون المُثار. إن احتمال حدوث هذه العملية يكون أكثر ملاءمة عندما تتداخل السويات الاهتزازية بين الحالتين المُثارتين، حيث يجب أن تكون كمية الطاقة المكتسبة أو الضائعة قليلة أو معدومة. بما أن التأثيرات السبينية – المدارية في مثل هذه الجزيئات تكون كبيرة، وبالتالي يكون التغيير في السبين أكثر تفضيلاً، يكون العبور بين الأنظمة الأكثر شيوعاً في جزيئات الذرات الثقيلة (على سبيل المثال تلك التي تحتوي على اليود أو البروم). تُسمى هذه العملية "اقتران مدار–سبين". ببساطة يحصل تزاوج السبين الإلكتروني مع العزم الزاوي المداري لمدارات غير دائرية. بالإضافة إلى ذلك، فإن وجود المواد البارامغناطيسية في المحلول يعزز العبور بين الأنظمة . ويعرف الانتقال الإشعاعي نتيجة عودة الإلكترون من الحالة الثلاثية المُثارة إلى الحالة الأحادية باسم الفسفرة. ونظراً لحدوث انتقال في مضروب السبين، فإن الفسفرة هو مظهر من مظاهر العبور بين الأنظمة. النطاق الزمني للعبور بين الأنظمة هو من 10^{-8} إلى 10^{-3} ثوانٍ، أحد أبطأ أشكال الاسترخاء.

- **نورد في الجدول الآتي الزمن التقريبي للتحولات في مخطط جابلونسكي:**

اسم العملية	الانتقال	الزمن بالثواني
امتصاص الضوء (الإثارة)	$S_0 \longrightarrow S_n$	10^{-15} (فوري)
التحوّل الداخلي	$S_n \longrightarrow S_1$	10^{-14} to 10^{-11}
الاسترخاء الاهتزازي	$(S_n)^* \longrightarrow S_n$	10^{-12} to 10^{-10}
العبور بين الأنظمة	$S_1 \longrightarrow T_1$	10^{-11} to 10^{-6}
الفلّورة	$S_1 \longrightarrow S_0$	10^{-9} to 10^{-6}
الفسفرة	$T_1 \longrightarrow S_0$	10^{-3} to 100
التلاشي غير الإشعاعي (**)	$S_1 \longrightarrow S_0$ $T_1 \longrightarrow S_0$	10^{-7} to 10^{-5} 10^{-3} to 100

توضيح (**) : يُمكن أن يحدث التلاشي غير الإشعاعي عن طريق نقل الطاقة الداخلية للجزيئة المُثارة إلى جزيئة أخرى مختلفة. تُسمى هذه العملية بالتخامد فيما يخص الجزيئات المُثارة، أو الحساسية فيما يخص الحالات المُثارة التي تم إنشاؤها حديثًا. يحدث التحسس الكيميائي الضوئي عادة بوساطة تفاعل **T1 + S0 → S0 + T1** ، حيث التحوّل الأحمر هو للمحسس الضوئي والأسود للمخمد الضوئي. قد تخضع الحالة المثارة الثلاثية الجديدة بعد ذلك لردود الفعل المميزة الخاصة بها.

يُمكن توضيح عملية امتصاص الإشعاع الكهرطيسي من قيل الجزيئة وإعادة إصداره بعمليتي الفلّورة والفسفرة كما يأتي:

- نتيجة امتصاص الجزيئة للضوء تنتقل من الحالة الأساسية (Ground state) إلى إحدى الحالات المثارة الأحادية (Singlet excited states)، مثلاً الحالة المثارة الأحادية الأولى:

$$^{1}T_{1u} \leftarrow {}^{1}A_{g} \qquad (\mathbf{S_0} \rightarrow \mathbf{S_1})$$

- تنتقل الجزيئة المثارة إلى حالتها الأساسية مصدرة ضوء مرئي للعين ويُسمى بالفلّورة:

$$^{1}T_{2g} \rightarrow {}^{1}A_{g} \qquad (\mathbf{S_1} \rightarrow \mathbf{S_0})$$

- أما الفسفرة فهي عملية إصدار الضوء المرئي ببطء شديد:

$$^{3}T_{2g} \rightarrow {}^{1}A_{g} \qquad (\mathbf{T_1} \rightarrow \mathbf{S_0})$$

II- الطريقة الكوانتية وخطوات العمل (Quantum method and working steps):

II-1- الطريقة الكوانتية (Quantum method):

تمّ في هذا العمل استخدام طريقة DFT/B3LYP [10,11] ؛ حيث تمكّن كل من بيكي (A.D. Becke) [10] و لي و يانغ و بار (C. Lee , W. Yang and R.G. Parr) [11] من

إدخال تعديلات على نظرية تابعية الكثافة المستقلة عن الزمن DFT (Density Functional Theory) وكذلك المتعلقة بالزمن TD-DFT (Time-Dependent Density Functional Theory) [12]، التي سمحت بحل معادلات شرودينغر وتطبيقها على الذرات والجزيئات والمركبات المختلفة من خلال استخدام المجموعة القاعدية المناسبة، والمجموعة القاعدية هي مجموعة من التوابع الرياضية التي تُستخدم للمساعدة في حل معادلات شرودينغر من أجل الجمل التي تمتلك أكثر من إلكترون. إن المجموعة القاعدية المستخدمة هنا هي ((6-311+g(d,p) حيث تُمثل (6-311G) االمجموعة التكافؤية التي تعتمد على فصل المدارت التكافؤية عن المدارات الداخلية (split-valence)، وتُشير (d,p) إلى أنه تمّ الأخذ بعين الاعتبار استقطاب المدارات وإشارة الزائد (+) تعني توسيع المجموعة القاعدية لتشمل توابع الانتشار. وهنا لابد من التأكيد على أن دراسات عديدة قد أثبتت أن تطبيق طريقة DFT/B3LYP المستقلة عن الزمن وكذلك طريقة TD-DFT/B3LYP المتعلقة بالزمن [13-20] باستخدام مجموعات قاعدية مختلفة سواء في الطور الغازي (جزيئات معزولة) أو الطور المكثف (بوجود مذيب) مع نموذج المذيبات الضمني SMD (the Salvation Model based on Density)، على جملة ما (ذرة ، جزيئة ، أيون،... الخ) قد أعطى نتائج عالية الدقة، كما أنها تسمح بحساب الخصائص البنيوية والإلكترونية والترموديناميكية والطيفية والضوئية والبيولوجية والدوائية...الخ للجمل المدروسة، ويؤخذ عليها أنها مكلفة (لكون زمن الحسابات طويل جداً) بالمقارنة مع غيرها من الطرائق وخاصة الطرائق نصف الاختبارية.

يتم هنا حل معادلات شرودينغر باستخدام طريقة DFT/B3LYP/6-311+g(d,p) حاسوبياً عبر أحد برامج غاوسيان Gaussian03 [21] وGaussian09 [22,23] من أجل الذرات (الهيدروجين والكربون والنتروجين والأكسجين و ...الخ) وكذلك من أجل الجزيئات المدروسة المكونة من بعض أو كل الذرات السابقة. من أجل ذلك لابد من إدخال المعاملات الخاصة بالذرة أو المركب المدروس عبر واجهات بيانية صُممت لعمل برامج غاوصيان (Gaussian 09W , Gaussian 03W ... الخ) مثل (GaussView5.0[24] ، GaussView6.0[25] ... الخ) وهي عبارة عن برامج مستقلة. الأمر الذي يسهل العمل كثيراً ويجعله أكثر دقة ويقلل من الأخطاء المحتملة في أثناء إدخال المعاملات وخاصة تلك المتعلقة بمعاملات الهندسة الفراغية (إحداثيات

تموضع الذرات داخل المركب بتابعية المسافات والزوايا بالنسبة لجملة إحداثيات فراغية). فمثلاً في حالة الذرات يكفي أن نرسم الكرة التي تمثل الذرة في شاشة الواجهة وفي حالة المركبات أن نرسم المركب باستخدام هذه الواجهة أو أحد برامج الرسم الكيميائية (ChemSketch11 أو ChemBioDraw14أو

ChemBio3D Ultra 14 أو ...) ومن ثم ننسخه ونلصقه على شاشة الواجهة وبذلك نكون قد أدخلنا رموز الذرات المختلفة وعدد الإلكترونات في كل منها إضافةً إلى إحداثيات الذرات المختلفة داخل المركب وكذلك التعدد السبيني (مضروب السبين) SM (Spin Multiplicity)، الذي يُحسب من العلاقة الآتية:

$$SM = 2S + 1 \qquad (1)$$

حيث S يمثل العدد الكوانتي السبيني الكلي للجملة المدروسة (ذرة ، جزيئة ، أيون ، ... الخ) ويحسب من العلاقة:

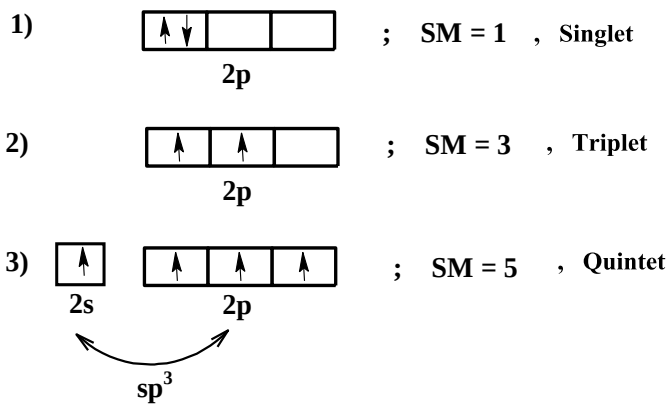
$$S = k\,s \qquad (2)$$

حيث يمثل s العدد الكوانتي السبيني للإلكترون وقيمته دائماً ($s = ½$) و k يمثل عدد الإلكترونات الفردية (العازبة) في الجملة المدروسة.

فمثلاً لذرة الكربون ذات التركيب الإلكتروني:

$$C\ (Z=6) : 1s^2\ 2s^2\ 2p^2$$

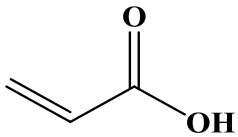
ثلاث قيم لـ SM تبعاً لحالات الذرة وهي:



والحالة الأكثر استقراراً هي الحالة الثلاثية، أي الموافقة للقيمة (SM = 3).

II-2- خطوات العمل (Working steps):

لتوضيح كيفية تطبيق خطوات العمل نأخذ كمثال أحد مكونات مواد التجميل: حمض الأكريليك (Acrylic acid)، يُسمى أيضاً (2-propenoic acid) وهو مركب عضوي صيغته الجزيئية (المجملة) ($C_3H_4O_2$) يستخدم لتعليق الأصباغ في مستحضرات التجميل أو منتجات الشمس كما يقوم بتثبيت المستحلبات مثل الكريمات أو المستحضرات، صيغته البنائية:



2-propenoic acid

II-2-1- تحديد طاقتي الامتصاص والإصدار بالفلورة (إثارة الجزيئات من الحالة الأساسية إلى الحالات المُثارة الأحادية):

أولاً– خطوات العمل:

ملاحظة عامة: منعاً للالتباس يتم رسم البنية الفراغية الافتراضية للمركب المدروس بوساطة إحدى الواجهات البيانية (Chembiooffice أو GausView أو ...الخ) وحفظه باسم ما (ويفضل أن يكون الملف باسم المركب وليكن M) كملف من نوع (.mol) ضمن مجلد ما (ويفضل أن يكون المجلد باسم المركب) على قرص ما وليكن القرص D.

الخطوة الأولى: إيجاد البنية الهندسية الفُضلى في الحالة الأساسية GS (Ground State) وكذلك طيف الأشعة تحت الحمراء IR (Infra-Red Spectrum) للجزيئة M:

– يجب أن يبدو ملف الإدخال كما يأتي:

```
%chk=D:\ 1-M.chk
 # opt  freq=noraman  b3lyp/6-311+g(d,p)  scrf=(smd,solvent=Solvent-name)
    geom=connectivity
 M : Opt + IR  in  Ground State
   0    1
```

يجب أن يظهر الإخراج كما يأتي:

SCF Done: E(RB3LYP) = ……. a.u. after …. cycles

وهي الطاقة الكلية الإلكترونية للمركب في الحالة الأساسية (أي E_1). يجب تسجيل هذه القيمة لأنها سوف تُستخدم في حساب طاقة الامتصاص.

- وفي الفراغ أو الحالة الغازية (أي بدون مذيب) يجب أن يكون سجل الكلمات المفتاحية كما يأتي:

opt freq=noraman b3lyp/6-311+g(d,p) geom=connectivity

الخطوة الثانية: إثارة الجزيئة من الحالة الأساسية إلى الحالة المثارة باستخدام TD-DFT.

- ملاحظة: قبل الانتقال إلى الخطوة الثانية يتم نسخ الملف (1-M.chk) باسم جديد (2- M.chk)، ثمّ يُفتح الملف من النوع (.mol) عن طريق واجهة GaussView يُعدّل ثمّ يُحفظ باسم (2-M) كملف إدخال فتظهر نافذة بعنوان (Saving Gaussian Input File) عليها خيارين يتم تفعيل الخيار الثاني.

- يجب أن يبدو ملف الإدخال كما يأتي:

%chk=D:\ 2-M.chk

td=(nstates=6) rb3lyp/6-311+g(d,p) scrf=check guess=read geom=check

M: Vertical excitation with linear response solvation

0 1

- يجب أن يظهر الإخراج كما يأتي:

Excited State 1: Singlet-A" … eV … nm f=….
<S**2>=…..

- وفي الفراغ أو الحالة الغازية (أي بدون مذيب) يجب أن يكون سجل الكلمات المفتاحية كما يأتي:

td=(nstates=6) rb3lyp/6-311+g(d,p) guess=read geom=check

الخطوة الثالثة: نوعية حالات الإثارة العمودية وهي تتطلب خطوتين:

- ملاحظة: قبل الانتقال إلى الخطوة الثالثة يتم نسخ الملف (1-M.chk) باسم جديد (3-M.chk) ثمّ يُفتح الملف من النوع (.mol) عن طريق واجهة GaussView يُعدل ثمّ يُحفظ باسم (3-M) كملف إدخال فتظهر نافذة بعنوان (Saving Gaussian Input File) عليها خيارين يتم تفعيل الخيار الثاني.
- يجب أن يبدو ملف الإدخال كما يأتي:

```
%chk=D:\ 3-M.chk
# rb3lyp/6-311+g(d,p)    scrf=(smd,solvent=Solvent-name,read)
geom=check
  guess=read
M :  prepare for state-specific non-eq solvation by saving the solvent
                    reaction  field  from the ground state

    0    1
NonEq=write
-- link1 --
%chk=D:\ 3-M.chk
# td=(nstates=6, root=1)    rb3lyp/6-311+g(d,p)    geom=check
guess=read
   scrf=(smd,solvent= Solvent-name,ExternalIteration,read)
 M : read non-eq solvation from ground state and compute energy of
                    the first  excited with the state-specific method
    0    1
NonEq=read
```

- يجب أن يظهر الإخراج كما يأتي:

After PCM corrections, the energy is ….. a.u.

وهي الطاقة الكلية الإلكترونية للمركب في الحالة المُثارة (أي E_3). يجب تسجيل هذه القيمة لأنها سوف تُستخدم في حساب طاقة الامتصاص.

– وفي الفراغ أو الحالة الغازية (أي بدون مذيب) يجب أن يكون سجل الكلمات المفتاحية كما يأتي:

```
# rb3lyp/6-311+g(d,p)    geom=check    guess=read
--------------------------------
-- link1 --
# td=(nstates=6, root=1)    rb3lyp/6-311+g(d,p)    geom=check
guess=read
--------------------------------
```

الخطوة الرابعة: تهذيب هندسة الحالة المثارة الأولى باستخدام TD-DFT في حالة التوازن.

– ملاحظة: قبل الانتقال إلى الخطوة الرابعة يتم نسخ الملف (2- M.chk) باسم جديد (4- M.chk) ثمّ يُفتح الملف من النوع (.mol)عن طريق واجهة GaussView يُعدل ثمّ يُحفظ باسم (4-M) كملف إدخال فتظهر نافذة بعنوان (Saving Gaussian Input File) عليها خيارين يتم تفعيل الخيار الثاني.

– يجب أن يبدو ملف الإدخال كما يأتي:

```
%chk=D:\ 4- M.chk
# opt=readfc td=(read,nstates=6,root=1)   rb3lyp/6-311+g(d,p)
   scrf=(smd,solvent=Solvent-name)    guess=read      geom=modify
M : excited state opt
            Modify geometry to break Cs symmetry since first excited state
is A"
0     1
```

– يجب أن يظهر الإخراج كما يأتي:

```
Excited State   1:      Singlet-A"     …. eV        …. nm        f=….
<S**2>=…..
Total Energy, E(TD-HF/TD-KS) =  … a.u.
```

سوف تتم مقارنة طاقة الحالة المُثارة الأولى (… eV) مع نتيجة الخطوتين السادسة والسابعة وسيُلاحظ الفرق (حيث يجب أن يكون أكبر قليلاً بما لايتجاوز (0.5 eV)) .

- وفي الفراغ أو الحالة الغازية (أي بدون مذيب) يجب أن يكون سجل الكلمات المفتاحية كما يأتي:

 # opt=readfc td=(read,nstates=6,root=1) rb3lyp/6-311+g(d,p) guess=read geom=modify

الخطوة الخامسة: إنجاز حسابات تواتر الاهتزاز للتأكد من أننا في الحالة المثارة المهذبة (الفُضلى) ولسنا في إحدى الحالات الانتقالية. ومن أجل ذلك يجب تفحص التواترات الاهتزازية فيما إذا كان هناك بعض التواترات السالبة حيث يكون المركب في إحدى الحالات الانتقالية وهكذا نحتاج لتفحص ملف الإدخال للحصول على نتائج صحيحة.

- ملاحظة: قبل الانتقال إلى الخطوة الخامسة يتم نسخ الملف (4-M.chk) باسم جديد (5- M.chk)، ثمّ يُفتح الملف من النوع (.mol)عن طريق واجهة GaussView يُعدل ثمّ يُحفظ باسم (5- M) كملف إدخال فتظهر نافذة بعنوان (Saving Gaussian Input File) عليها خيارين يتم تفعيل الخيار الثاني.

- يجب أن يبدو ملف الإدخال كما يأتي:

%chk=D:\ 5- M.chk

freq=noraman td=(read, nstates=6, root=1) b3lyp/6-311+g(d,p) scrf=(smd,solvent= Solvent-name) guess=read geom=check

M : excited state Vibrational fq

0 1

- يجب التأكد أن جميع قيم الاهتزازات موجبة. وفي حال كانت إحداها أو أكثر سالبة، علينا مراجعة ملف الإدخال وإعادة الحسابات من جديد. وإلا علينا حساب طاقة الحالة المُثارة بطريقة أخرى كما سنرى لاحقاً.

- وفي الحالة الغازية (أي بدون مذيب) يجب أن تكون سجل الكلمات المفتاحية كما يأتي:

freq=noraman td=(read, nstates=6, root=1) b3lyp/6-311+g(d,p) guess=read geom=check

الخطوة السادسة: توصيف حالة الإصدار (المذيب المثار).

- ملاحظة : قبل الانتقال إلى الخطوة السادسة يتم نسخ الملف (5- M.chk) باسم جديد (6- M.chk) فإن الحسابات ستأخذ الإدخال من الملف (5- M.chk) في الخطوة الخامسة، ثمّ يُفتح

الملف من النوع (.mol) عن طريق واجهة GaussView يُعدل ثمّ يُحفظ باسم (6- M) كملف إدخال فتظهر نافذة بعنوان (Saving Gaussian Input File) عليها خيارين يُفعل الخيار الثاني.

– يجب أن يبدو ملف الإدخال كما يأتي:

```
%chk=D:\ 6- M.chk
# td=(read,nstates=6,root=1)  b3lyp/6-311+g(d,p)
  scrf=(smd,solvent=Solvent-name,ExternalIteration,read)  guess=read
   geom=check
 M : emission state-specific solvation at first excited state optimized
      geometry
    0  1
NonEq=write
```

– يجب أن يظهر الإخراج كما يأتي:

.After PCM corrections, the energy is ….. a.u

وهي الطاقة الإلكترونية الكلية للمركب (أي E_6). يجب تسجيل هذه القيمة لأنها سوف تُستخدم في حساب طاقة الإصدار بالفلورة.

– وفي الفراغ أو الحالة الغازية (أي بدون مذيب) يجب أن تكون سجل الكلمات المفتاحية كما يأتي:

```
# td=(read,nstates=6,root=1)  b3lyp/6-311+g(d,p)  guess=read
geom=check
```

نُلاحظ أن نتيجة هذه الخطوة هي نفسها نتيجة الخطوة الرابعة.

الخطوة السابعة: الإصدار إلى الحالة الأساسية النهائية (حالة اللاتوازن).

– ملاحظة: قبل الانتقال إلى الخطوة السابعة يتم نسخ الملف (6- M.chk) باسم جديد (7- M.chk) فإن الحسابات ستأخذ الإدخال من الملف (6- M.chk) في الخطوة السادسة، ثمّ يُفتح الملف من النوع (.mol) عن طريق واجهة GaussView يُعدل ثمّ يُحفظ باسم (7-M) كملف إدخال فتظهر نافذة بعنوان (Saving Gaussian Input File) عليها خيارين يتم تفعيل الخيار الثاني.

– يجب أن يبدو ملف الإدخال كما يأتي:

%chk=D:\ 7- M.chk

# b3lyp/6-311+g(d,p) scrf=(smd,solvent=Solvent-name,read) guess=read
  geom=check

M : emission state-specific solvation at first excited state optimized geometry

0 1

NonEq=read

– يجب أن يظهر الإخراج كما يأتي:

SCF Done: E(RB3LYP) = ….. a.u. after … cycles

وهي الطاقة الكلية الإلكترونية للمركب (أي E_7). يجب تسجيل هذه القيمة لأنها سوف تُستخدم في حساب طاقة الإصدار بالفلورة.

– وفي الفراغ أو الحالة الغازية (أي بدون مذيب) يجب أن تكون سجل الكلمات المفتاحية كما يأتي:

b3lyp/6-311+g(d,p) guess=read geom=check

ثانياً- الحسابات:

لتوضيح كيفية إجراء الحسابات تمّ تطبيق خطوات العمل السابقة على حمض الإكريليك (M=Acrylic acid) بوجود أسيتو نتريل كمذيب (Solvent-name=Acetonitrile) باستخدام المجموعة القاعدية (6-311++g(2d,p)):

1- يتم تحويل قيم الطاقات الكلية الإلكترونية إلى (eV) أو إلى جملة الوحدات الدولية (أي إلى kJ/mol)، كما يأتي :

$$\mathbf{1\ a.u. = 1\ Hartree = 27.2\ eV = 27.2 \times 23.0702\ kcal/mol = 27.2 \times 23.0702 \times 4.18\ kJ/mol = 2622.989\ kJ/mol}$$

2– حساب طاقة الامتصاص في الحالة الأُحادية (من الخطوة الأولى ومن الخطوة الثالثة):

$$\varepsilon_{absorption} = h\nu_{absorption} = |E_1 - E_3| = |-4.8199|\ eV = 4.8199\ eV$$

3– حساب طول موجة الضوء الممتص (أي الضوء اللازم لإثارة الجزيئة):

$$\varepsilon_{absorpion} = h\nu_{absorpion} = h\frac{c}{\lambda_{absorpion}}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{absorpion} = \frac{h\,c}{\varepsilon_{absorpion}} = 257.24\ nm$$

4- تسجيل طاقة الحالة المثارة الأولى الأحادية أو الطاقة الأديابانية (من الخطوة الرابعة و الخامسة):

$$\varepsilon_{adiabatic} = \varepsilon_{first\ excited\ singlet\ state} = 3.6007\ eV$$

Excited State 1: Singlet-A" 3.6007 eV 344.34 nm f=0.0001
<S2>=0.000**

5- حساب طاقة الإصدار بالفلورة (من الخطوة السادسة و الخطوة السابعة):

$$\varepsilon^{F}_{emission} = h\nu^{F}_{emission} = |E_6 - E_7| = |+3.0649|\,eV = 3.0649\ eV$$

في حال تعثر إيجاد طاقة الحالة المثارة الأولى سواء الأحادية أو الثلاثية، يُمكن إيجاد طاقة الحالة المثارة الأولى من خلال (مثلاً في الحالة الأحادية):

$$\varepsilon_{adiabatic} = \varepsilon(S_1) = \varepsilon^{F}_{emission} + \varepsilon_{freq}(S_0) = 3.0649 + 0.4647 = 3.5296\ eV$$

6- حساب طول موجة الضوء الصادر بالفلورة:

$$\lambda^{F}_{emission} = \frac{h\,c}{\varepsilon^{F}_{emission}} = 404.54\ nm$$

7- حساب مردود الفلورة:

$$Q^{F} = \frac{\varepsilon^{F}_{emission}}{\varepsilon^{S}_{absorption}} = \frac{3.0649}{4.8199} = 0.64$$

8- حساب الطاقة التي امتصتها الجزيئة واستخدمت في التنشيط (تغيير البنية الإلكترونية وبالتالي الهندسية للجزيئة) في الحالة الأحادية:

$$\varepsilon^{S}_{activation} = \varepsilon^{S}_{absorption} - \varepsilon^{F}_{adiabatic} = 1.2903\ eV$$

9- حساب المردود الكوانتي:

$$Q^{s} = \frac{\varepsilon^{S}_{activation}}{\varepsilon^{S}_{absorption}} = \frac{1.2903}{4.8199} = 0.268$$

10- مقارنة عرض المجال المحظور في الحالة المنشطة (من الخطوة الرابعة) مع عرض المجال المحظور في الحالة الأساسية (من الخطوة الأولى):

- عرض المجال المحظور في الحالة الأساسية (من الخطوة الأولى):

$$\varepsilon_{gap} = \left|E_{LUMO} - E_{HOMO}\right| = 6.3036\ eV$$

- عرض المجال المحظور في الحالة المنشطة (من الخطوة الرابعة):

$$\varepsilon_{gap} = \left|E_{LUMO} - E_{HOMO}\right| = 5.0132\ eV$$

- نجد أن الفرق بينهما (-1.2904 eV). أي أن الضوء قد أدى إلى تقليص عرض المجال المحظور بمقدار (20.5 %). أي أنه أدى إلى زيادة تفاعلية المركب المدروس بنسبة (20.5 %).

11- مقارنة عزم ثنائي الأقطاب في الحالة المنشطة (من الخطوة الرابعة) مع عزم ثنائي الأقطاب في الحالة الأساسية (من الخطوة الأولى):

- عزم ثنائي الأقطاب في الحالة الأساسية (من الخطوة الأولى):

$$\mu_p = 2.927\ Debye$$

- عزم ثنائي الأقطاب في الحالة المنشطة (من الخطوة الرابعة):

$$\mu_p = 4.352\ Debye$$

- نجد أن الفرق بينهما (1.425 Debye). أي أن الضوء قد أدى إلى زيادة عزم ثنائي الأقطاب بمقدار (48.7 %). أي أدى إلى زيادة استقطابية المركب المدروس بنسبة (48.7 %).

II-2-2- تحديد طاقتي الامتصاص و الإصدار بالفسفرة (إثارة الجزيئات من الحالة الأساسية إلى الحالات المُثارة الثلاثية):

أولاً– طريقة العمل:

لمعرفة طاقة الإصدار بالفسفرة، تتم إعادة خطوات العمل (الثانية ، الرابعة – السابعة)، كما في الفقرة السابقة مع إجراء بعض التعديلات على ملفات الإدخال:

حيث يبدو ملف الإدخال في الخطوة الثانية كما يأتي:

```
%chk=D:\ 2-M.chk
 # td=(nstates=6)   ub3lyp/6-311+g(d,p)   scrf=check   guess=read
   geom=check
 M : Vertical excitation triplet states
 0    3
```

والخطوة الرابعة كما يأتي:

```
%chk=D:\ 4-M.chk

 # td=(nstates=6,root=1,read)   ub3lyp/6-311+g(d,p)
   scrf=(smd,solvent=Solvent-name)  guess=read    geom=modify
opt=readfc

 M : exited triplet state optimization

  0     3
```

والخطوة الخامسة كما يأتي:

```
%chk=D:\ 5-M.chk

 #  freq=noraman    td=(nstates=6,root=1,read)   b3lyp/6-311+g(d,p)
    scrf=(smd,solvent= Solvent-name)    guess=read    geom=check

 M : excited triplet-state Vibrational Fq

  0     3
```

والخطوة السادسة كما يأتي:

%chk=D:\ 6- M.chk

 # td=(nstates=6,root=1,read) b3lyp/6-311+g(d,p) scrf=(smd,solvent=Solvent-name,ExternalIteration,read) guess=read geom=check

M : emission state-specific solvation at first excited state optimized geometry

0 3

NonEq=write

والخطوة السابعة كما يأتي:

%chk=D:\ 7- M.chk

 # b3lyp/6-311+g(d,p) scrf=(smd,solvent=Solvent-name,read) guess=read
geom=check

M : emission state-specific solvation at first excited state optimized geometry

0 3

NonEq=read

ثانياً- الحسابات:

لتوضيح كيفية إجراء الحسابات تمّ تطبيق خطوات العمل السابقة على حمض الإكريليك (M=Acrylic acid) بوجود أسيتو نتريل كمذيب (Solvent-name=Acetonitrile) باستخدام المجموعة القاعدية ((6-311++g(2d,p)) :

1- يتم تحويل قيم الطاقات الكلية الإلكترونية إلى (eV) أو إلى جملة الوحدات الدولية (أي إلى kJ/mol)، كما يأتي :

$$\mathbf{1\ a.u. = 1\ Hartree = 27.2\ eV = 27.2 \times 23.0702\ kcal/mol = 27.2 \times 23.0702 \times 4.18\ kJ/mol = 2622.989\ kJ/mol}$$

2- حساب طاقة الإصدار بالفسفرة (من الخطوة السادسة و الخطوة السابعة):

$$\varepsilon^{Ph}_{emission} = h\nu^{Ph}_{emission} = |E_6 - E_7| = |+0.5744|\,eV = 0.5744\,eV$$

3- حساب طول موجة الضوء الصادر بالفسفرة:

$$\lambda^{Ph}_{emission} = \frac{h\,c}{\varepsilon^{Ph}_{emission}} = 2158.51\ nm$$

4- حساب مردود الفسفرة:

$$Q^{Ph} = \frac{\varepsilon^{Ph}_{emission}}{\varepsilon^{S}_{absorption}} = \frac{0.5744}{4.8199} = 0.12$$

5- حساب طاقة الحالة المثارة الأولى الثلاثية أو الطاقة الأديابانية (من الخطوة الرابعة):

لم يتم هنا إيجاد الحالة المثارة الأولى الثلاثية:

Excited State 1: 3.010-A" -0.9897 eV -1252.75 nm f=-0.0000 <S2>=2.016**

ملاحظة: في حال تعثر إيجاد طاقة الحالة المثارة الأولى سواء الأحادية أو الثلاثية، يُمكن إيجاد طاقة الحالة المثارة الأولى من خلال (مثلاً في الحالة الثلاثية):

$$\varepsilon_{adiabatic} = \varepsilon(T_1) = \varepsilon^{Ph}_{emission} + \varepsilon_{freq}(S_0) = 0.5744 + 0.4674 = 1.0418\ eV$$

6- حساب طاقة العبور بين الأنظمة (أي الطاقة اللازمة لاقتران مدار- سبين):

$$\varepsilon_{intersystem\ crossing} = \varepsilon(S_1) - [\varepsilon(T_1) + \varepsilon_{freq}(T_1)]$$

$$= 3.5296 - [1.0418 + 0.4675] = 2.0203\ eV$$

II-2-3- مخطط جابلونسكي:

- طاقة الحالة الأساسية (S_0) تُعادل الصفر:

$$(\varepsilon_{ground\ state} \equiv 0.0\ eV)$$

- السويات الاهتزازية في الحالة الأساسية:

Frequencies --	99.6616	283.2471	482.2406
Frequencies --	534.1493	565.8305	586.6724
Frequencies --	837.1164	838.0763	1015.6377
Frequencies --	1026.1913	1032.9170	1196.440
Frequencies --	1316.5075	1364.9944	1444.6422
Frequencies --	1671.0551	**1733.5243**	3153.1550
Frequencies --	3185.8232	3242.4496	**3748.4659**

3748.4659 cm^{-1} = 2667.76 nm = 0.4647 eV

1733.5243 cm^{-1} = 1233.74 nm = 0.2149 eV

- طاقة الحالة المُثارة الأولى الأحادية (S_1):

$$\left(\varepsilon_{(S_1)_{\text{first excited singlet state}}} \equiv 3.5296 \text{ eV} \right)$$

Excited State 1: Singlet-?Sym 3.6007 eV 344.34 nm f=0.0001
<S2>=0.000**

وتُعادل الصفر بالنسبة للسويات الاهتزازية في هذه الحالة.

- السويات الاهتزازية في الحالة المُثارة الأولى الأحادية:

Frequencies --	-45.9798	223.1984	239.7439
Frequencies --	414.7571	419.2538	568.3987
Frequencies --	572.0217	678.5184	852.3595
Frequencies --	886.3429	1019.7641	1157.2669
Frequencies --	1231.5076	1278.0153	1367.1411
Frequencies --	1488.6216	**1622.4559**	3165.4976
Frequencies --	3182.0061	3261.6579	**3740.7663**

3740.766 cm^{-1} = 2673.25 nm = 0.4638 eV
1622.4559 cm^{-1} = 1154.69 nm = 0.2011 eV

- طاقة الحالة المُثارة الأولى الثلاثية (T_1):

$$\left(\varepsilon_{(T_1)_{\text{first excited triplet state}}} \equiv 1.0418 \text{ eV} \right)$$

Excited State 1: 3.010-?Sym -0.9897 eV -1252.76 nm f=-0.0000

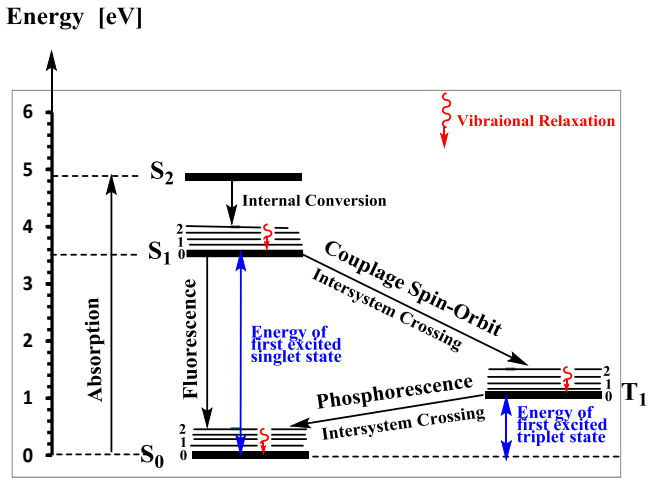
<S2>=2.016**

وتُعادل الصفر بالنسبة للسويات الاهتزازية في هذه الحالة.

– السويات الاهتزازية في الحالة المُثارة الأولى الثلاثية:

Frequencies --	**-487.6826**	**152.2332**	**211.8206**
Frequencies --	**250.1663**	**505.8970**	**543.5833**
Frequencies --	**631.3712**	**639.6549**	**810.6789**
Frequencies --	**861.7500**	**986.9526**	**1063.0995**
Frequencies --	**1215.0417**	**1319.4104**	**1405.3142**
Frequencies --	**1453.8203**	**1664.3757**	**3181.6230**
Frequencies --	**3230.2617**	**3302.2478**	**3770.4928**

3770.4928 cm^{-1} = 2652.17 nm = 0.4675 eV
1405.3142 cm^{-1} = 1000.15 nm = 0.1742 eV



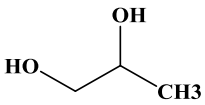
III– النتائج والمناقشة (Results and Discussion):

لتوضيح كيفية مناقشة نتائج تطبيق خطوات العمل السابقة تمّ اختيار بروبيلين غليكول (Propylene glycol) كأحد مكونات مواد التجميل.

بروبيلين غليكول هو مركب عضوي اصطناعي صيغته الجزيئية (المجملة) ($C_3H_8O_2$) وكتلته المولية (76.09g/mol)، يسمى أيضاً (Propane-1,2-diol) وهو سائل لزج عديم اللون، وتعود أهمية بروبيلين غليكول كونه من المواد الحافظة المضادة للجراثيم (Antimicrobial preservative) فهو يستخدم بشكل واسع كمذيب ومادة حافظة في العديد من

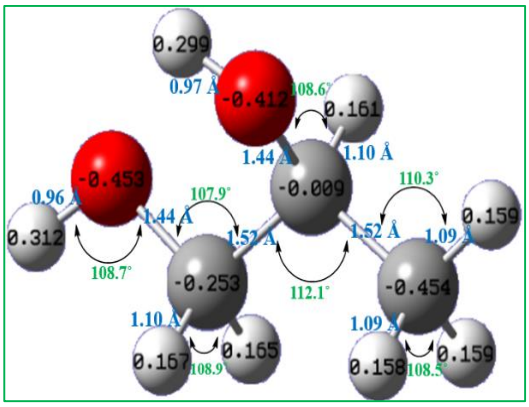
المستحضرات الصيدلانية، ويتمتع بتأثير مطهر فهو يشبه في ذلك الكحول، إلا أن فعاليته أقل بقليل، كما يستخدم في منتجات التجميل كونه مادة مرطبة (Humectant) ويستخدم كعامل مثبت (stabilizer) يُضاف إلى مادة أخرى من أجل حفظ خصائصها الطبيعية والكيميائية من التغيير.

صيغته البنائية:

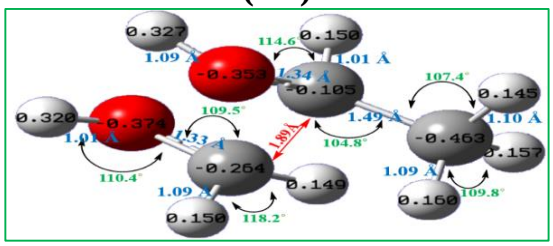


Propane-1,2-diol

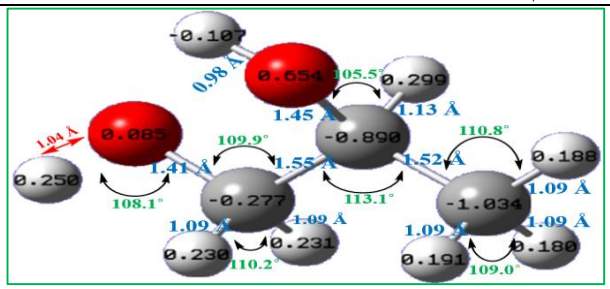
تمّت دراسة تأثير الضوء في الخصائص البنيوية والإلكترونية لبروبيلين غليكول في الحالة السائلة بوجود مذيب الإيتانول، حيث وُجدت البنى الهندسية الفضلى لمركب بروبيلين غليكول في الحالة الأساسية (أي قبل التعريض للضوء) والحالات المثارة الأحادية والثلاثية (أي بعد التعريض للضوء)، كما هو مبين في الشكل (1) مع توزع الشحنات الجزئية مقدرة بالإلكترون وأطوال الروابط بالأنغستروم والزوايا بالدرجات. ويتضمن الجدول (1) قيم بعض المقادير المميزة للخصائص الطاقية والإلكترونية لمركب بروبيلين غليكول قبل التعريض للضوء وبعده.



(a-1)



(b-1)



(c-1)

الشكل (1): البنى الهندسية الفراغية لـ بروبيلين غليكول

(a-1): البنية الهندسية الفضلى لـ بروبيلين غليكول قبل التعريض للضوء في الحالة الأساسية.

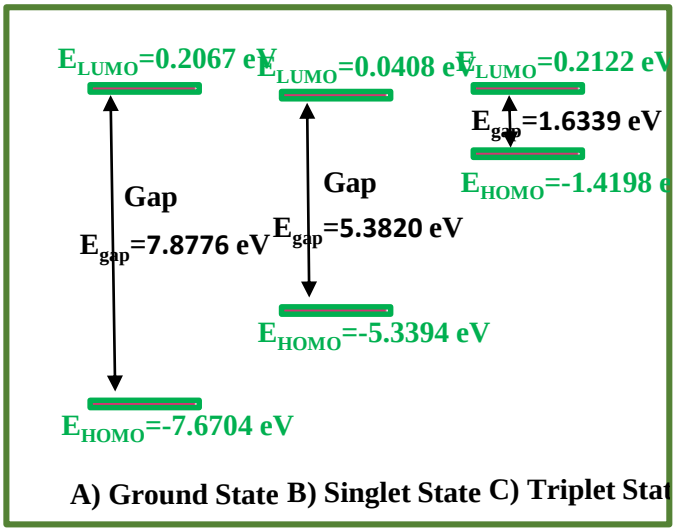
(b-1): البنية الهندسية الفضلى لـ بروبيلين غليكول بعد التعريض للضوء في الحالة المُثارة الأحادية.

(c-1): البنية الهندسية الفضلى لـ بروبيلين غليكول بعد التعريض للضوء في الحالة المُثارة الثلاثية.

الجدول (1): الخصائص الطاقية والإلكترونية لـ بروبيلين غليكول.

الخاصية الإلكترونية	قبل التعريض للضوء	بعد التعريض للضوء		نسبة التغير (E_{rel} %)	
		الحالة المثارة الأحادية	الحالة المثارة الثلاثية	الحالة المثارة الأحادية	الحالة المثارة الثلاثية
$D_e(M)$ (eV)	52.0415	46.2374	45.3753	-11.15	-12.80
E_{LUMO} (eV)	0.2067	0.0408	0.2122	-80.26	-2.63
E_{HOMO} (eV)	-7.6704	-5.3394	-1.4198	-30.39	-81.48
E_{gap} (eV)	7.8776	5.3820	1.6339	-31.68	-79.25

تمثل طاقات HOMO و LUMO لمركب بروبيلين غليكول في الشكل **(2)** حيث يُلاحظ تغيّر واضح في عرض المجال المحظور (E_{gap}) بعد التعريض للضوء.



الشكل (2): عرض المجال المحظور لـ بروبيلين غليكول

(A) **الحالة الأساسية** ، (B) **الحالة المثارة الأحادية** ، (C) **الحالة المثارة الثلاثية**

باستقراء القيم في الجدول **(1)** والشكلين (1) و(2) نلاحظ أن تعريض بروبيلين غليكول للضوء أدى إلى:

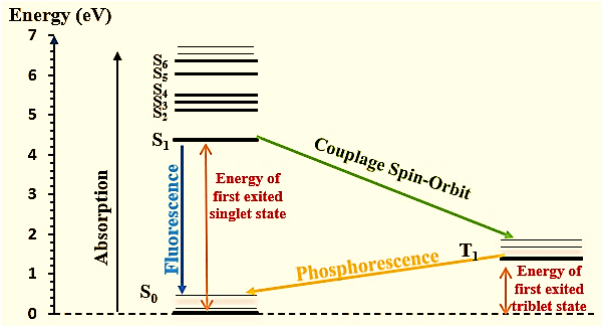
1. تخرّب مركب بروبيلين غليكول، وتفكّك بعض الروابط في الحالتين المثارة الأحادية والثلاثية، ففي الحالة الأحادية تفككت الرابطة d_{C1-C3} لتصبح المسافة بين الذرتين (1.898 Å).
2. تناقص طاقة التفكك (وبالتالي طاقة الارتباط) بمقدار (-11%) أي أن الروابط تصبح أضعف والمركب أقل ارتباطاً بعد تعريض جزيئة بروبيلين غليكول للضوء.
3. انخفاض طاقة المدار LUMO في الحالة المثارة الأحادية مما يدل على فعالية المركب وميوله لاكتساب إلكترونات (خاصية المواد المؤكسدة)[26].
4. ارتفاع طاقة المدار HOMO نتيجة تعريض المركب للضوء، مما يدل أن المركب يصبح أقل استقراراً عند تعريضه للضوء وأكثر نشاطاً كيميائياً.
5. تناقص في عرض فجوة الطاقة أي أن الضوء أدى إلى تقليص عرض المجال المحظور بمقدار (-31.7%) وبالتالي إلى تناقص ثباته واستقراره وازدياد تفاعلية جزيئة بروبيلين غليكول.

لتفسير أسباب التغيرات البنيوية والإلكترونية السابقة تمّ حساب قيم بعض المقادير المميزة للخصائص الضوئية لـ بروبيلين غليكول (مثل: طاقات الامتصاص ($\varepsilon_{Absorption}$) والإصدار بالفلورة ($\varepsilon^{F}_{emission}$) والإصدار بالفسفرة ($\varepsilon^{Ph}_{emission}$) وطاقة التنشيط ($\varepsilon_{Activation}$) وطاقة العبور بين الأنظمة إضافةً إلى المردود الكوانتي Φ ومردود كل من الفلورة Φ^{F} والفسفرة Φ^{Ph}) بوجود الإيتانول كمذيب، ثمّ أدرجت النتائج في الجدول (2).

الجدول (2): الخصائص الضوئية لـ بروبيلين غليكول

الخاصية الضوئية	المقادير الفيزيائية وقيمها		الانتقال الإلكتروني الموافق	نوع الأشعة الضوئية
الامتصاص	$\varepsilon_{Absorption}$ (eV)	6.5460	$S_0 \rightarrow S_6$	UVC
	$\lambda_{Absorption}$ (nm)	189.53		
الإصدار بالفلورة	$\varepsilon^{F}_{emission}$ (eV)	2.8367	$S_1 \rightarrow S_0$	Vis (Violet)
	$\lambda^{F}_{emission}$ (nm)	437.37		
الإصدار بالفسفرة	$\varepsilon^{Ph}_{emission}$ (eV)	0.9333	$T_1 \rightarrow S_0$	IR
	$\lambda^{Ph}_{emission}$ (nm)	1329.35		
العبور بين الأنظمة	$\varepsilon_{Intersystem\ Crossing}$ (eV)	2.5070	$S_1 \rightarrow T_1$	-
التنشيط	$\varepsilon_{Activation}$ (eV)	3.2407	-	–
المردود الكوانتي	Φ	0.49	-	–
مردود الفلورة	Φ^{F}	0.50	-	–

مردود الفسفرة	Φ^{Ph}	0.14	-	–



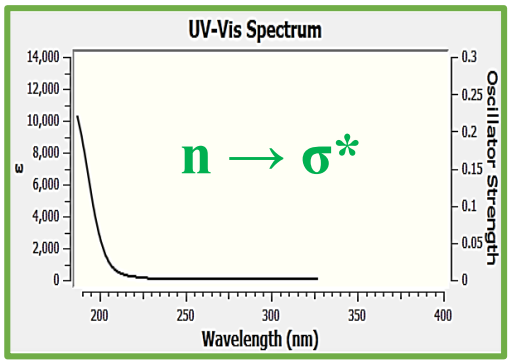
الشكل (3): مخطط جابلونسكي لـ بروبيلين غليكول

باستقراء قيم الجدول (2) والشكل (3) نخلص إلى النتائج الآتية:

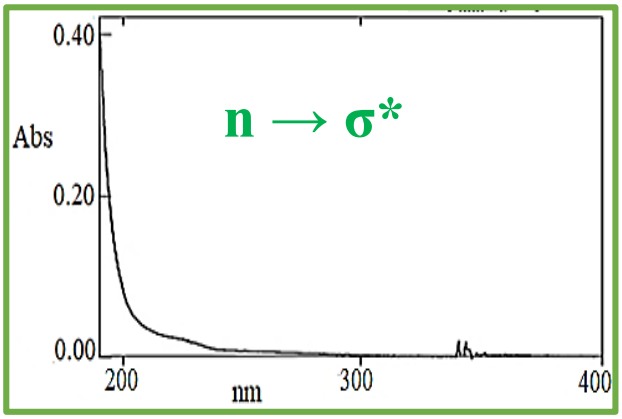
1. لا تتمتع جزيئة بروبيلين غليكول بخاصية الفسفرة (أي ليس لها طيف فسفرة) لعدم إمكانية حدوث اقتران مدار–سبين المرتبط بحدوث تداخل بين السويات الاهتزازية في الحالتين الثلاثية والأحادية وهذا غير ممكن لكون طاقة العبور بين الأنظمة كبيرة جداً (2.5070 eV). بينما تتمتع بخاصية الفلورة. حيث تظهر قمة وحيدة في طيف الفلورة عند طول الموجة (437.37 nm) وهناك تألق باللون البنفسجي.
2. يمكن استخدام البروبيلين غليكول في التفاعلات الضوئية نظراً لكون المردود الكوانتي جيد (49%). حيث أن قسماً كبيراً من طاقة الضوء الممتص يتحول إلى طاقة تفاعل (3.2407 eV) ويستهلك في تنشيط الجزيئة وهذا ما لاحظناه من خلال التغيرات في أطوال الروابط في الشكل (1) وكذلك في طاقة التفكك وعرض المجال المحظور في الجدول (1). لذلك لا ينصح بتعريض مواد التجميل التي تحوي البروبيلين غليكول إلى الأشعة فوق البنفسجية في منطقة الـ UVC،

وكخطوة أخيرة تتم دراسة الخصائص الطيفية الضوئية من خلال إيجاد طيف الأشعة المرئية وفوق البنفسجية (UV-Vis Spectrum) وكذلك طيف الأشعة تحت الحمراء (IR Spectrum).

عند دراسة امتصاصية بروبيلين غليكول للأشعة المرئية وفوق البنفسجية (UV-Vis) كوانتياً وفق الشكل (4) ومقارنته بالطيف المرجعي التجريبي[27] وفق الشكل (5) نجد قمة امتصاص واحدة ناتجة عن الانتقال ($n \rightarrow \sigma^*$).



الشكل (4): طيف UV-Vis المحسوب كوانتياً لـ بروبيلين غليكول.



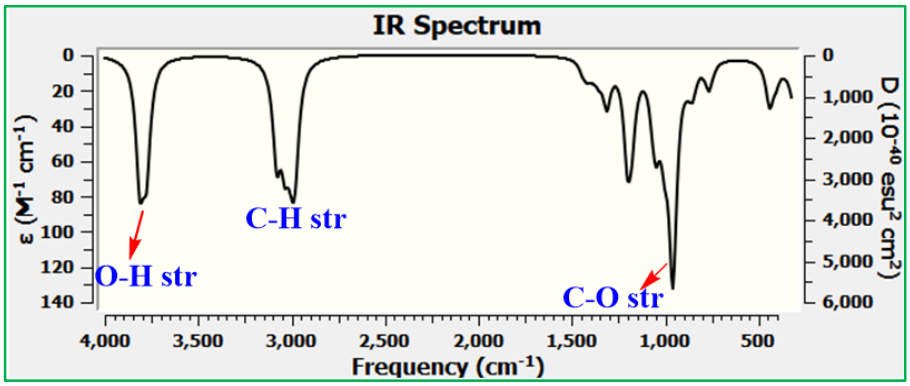
الشكل (5): طيف UV-Vis التجريبي المرجعي[27] لـ بروبيلين غليكول.

يُوضِّح الجدول (3) مقارنة الأطوال الموجية المحسوبة كوانتياً مع القيم التجريبية المرجعية حيث كانت القيم شبه متطابقة.

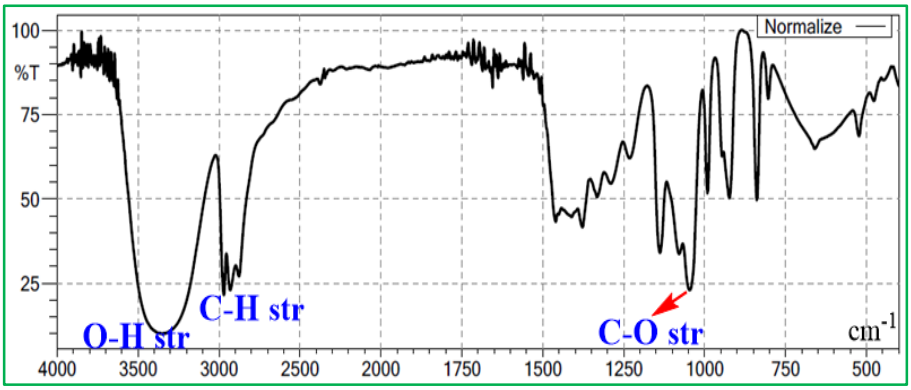
الجدول (3): الأطوال الموجية والانتقالات الإلكترونية الموافقة لـ بروبيلين غليكول.

No.	الانتقالات الإلكترونية	طول الموجة (nm)	
		المحسوب كوانتياً	المرجعي التجريبي [27]
λ_1	$n \rightarrow \sigma^*$	189.9	190.0

أما عند دراسة امتصاصية بروبيلين غليكول للأشعة تحت الحمراء نحصل على طيف الـ IR كما في الشكل (6)، وحُددت عصابات الامتصاص عليه ومقارنته مع الطيف التجريبي المرجعي [27] كما في الشكل (7).



الشكل (6): طيف الأشعة تحت الحمراء IR المحسوب كوانتياً لـ بروبيلين غليكول.



الشكل (7): طيف الأشعة تحت الحمراء IR التجريبي المرجعي[27] لـ بروبيلين غليكول.

بعد حساب طيف IR الكوانتي لمركب بروبيلين غليكول يمكن تنظيم أهم قيم تواترات الاهتزاز في الجدول (4) ثمّ مقارنتها مع قيم مرجعية.

الجدول (4): قيم بعض تواترت الاهتزاز لـ بروبيلين غليكول.

نوع الحركة	العدد الموجي (cm^{-1})		المجموعة الوظيفية
	المرجعي التجريبي [27]	المحسوب كوانتياً	
امتطاط	3360 free	3781 & 3816	O-H stretch
امتطاط	2995-2890	3096-2998	C-H stretch
امتطاط	1045	1021	C-OH stretch

تدل نتائج الجدول (4) أن القيم متقاربة بين النتائج المحسوبة كوانتياً في هذا العمل والنتائج التجريبية المرجعية. ولكن عصابة الامتصاص العائدة لاهتزاز امتطاط الرابطة (O-H stretch) تظهر في الطيف التجريبي عريضة نظراً لتشكل روابط هيدروجينية بين الجزيئات أما شدة امتصاصها الكبير فهي مقياس لقوة الروابط الهيدروجينية[28]. حيث يتم إهمال هذه القوة وقوى فيزيائية أخرى في الدراسة الكوانتية الأمر الذي يفسر انزياح عصابة الامتصاص العائدة لامتطاط اهتزاز الروابط (O-H stretch) نحو القيم الكبيرة.

IV- الخلاصة والاستنتاجات (Summary and Conclusions):

تّم اعتماد مجموعة من الخطوات لدراسة تأثير الضوء على أي مركب كيميائي وتحديد خصائصه البنيوية والإلكترونية والضوئية والطيفية كوانتياً من خلال:

- إيجاد البُنى الهندسية الفراغية الفُضلى للمركب المدروس في الحالة الأساسية (أي قبل تعريض المركب للضوء) وفي الحالات المثارة (أي بعد تعريض المركب للضوء).
- حساب أطوال الروابط والزوايا ومراقبة التغيرات التي تطرأ عليها.
- حساب قيم بعض المقادير المميزة للخصائص الإلكترونية والطاقية ومراقبة التغيرات الحاصلة.

- حساب قيم بعض المقادير المميزة للخصائص الضوئية، مثل (طاقة وطول موجة الضوء الممتص، طاقة وطول موجة الضوء الصادر كتألق فلورة أو فسفرة، المردود الكوانتي، ...).

إن تنفيذ تلك الخطوات لا يحتاج إلى مهارات خاصة أو إمكانيات كبيرة. إذ يكفي أن يتقن الباحث الكيميائي العمل على الحاسوب والبرامج الخاصة اللازمة لإجراء مثل تلك الحسابات باستخدام حواسيب ذات مواصفات جيدة. وعليه تُعد الكيمياء الكوانتية أداة هامة من أدوات البحث العلمي الحديثة المرادفة للأدوات البحثية التجريبية وهي غير مكلفة ومتاحة للباحث الكيميائي.

****

المراجع References

[1] Aydogan B.,**Photoinitiated Polymerizations by Electron Transfer Reactions**, Istanbul Technical University, (2010).

[2] Coyle J. D., **Introduction to Organic Photochemistry**, British Library Cataloguing in Publication Data (1989).

[3] Simonovich S**., Physical Organic Photochemistry and Basic Photochemical Transformations**, Journal of Organic Chemistry, (2011).

[4] Ghanoum K., **Photosynthesis and Quantum-chemical Study of Some Aromatic Compounds**, Doctorate -Thesis , Albaath-University-Syria, chapter1 (2020).

[5] Wiley J., **Advances in Photochemistry**, Center for Photochemical Sciences, Bowling Green State University, Bowling Green, Ohio, Vol. 27 (2002).

[6] Belzoni V., Ceroni P., Alberto Juris A., **Photochemistry and Photophysics,** Wiley-VCH Verlag GmbH, Boschstr Weinheim, Germany (2014).

[7] Klessinger M., Michl J., University of Colorado, **Excited state and Photochemistry of Organic Molecules** (1995).

[8] Nunn A., **Experimental and Theoretical Investigations of The Photochemistry of Styrene and The Creation and Characterization of Shaped Femtosecond Ultraviolet Laser Pulses**, Doctoral thesis, University College London, chapter1 (2010).

[9] Simonovich S**., Physical Organic Photochemistry and Basic Photochemical Transformations**, Journal of organic *chemistry*, (2011).

[10] Becke A.D. , **Density-functional exchange-energy pproximation with correct asymptotic behavior**, Phys. Rev. A38 (1988) p.3098.

[11] Le C. , Yang W. , Parr R.G., **Development of the Colle-Salvetti correlation- Energy formula into a functional of the electron density**, Phys. Rev. B37 (1988) p.785.

[12] Runge E. , Gross E.K.U., **Density-Functional Theory for Time-Dependent Systems**, Phys. Rev. Lett. 52 (1984) p. 997.

[13] Ghanoum K., Kodlaa A., Merza J., **DFT and Experimental Study of Synthesis a Quinoxaline Derivative Using Photocatalysis,** Chemistry and Materials Research, Vol.9, No.9 (2017)p.96-102 .

[14] Ghanoum K., Kodlaa A., Merza J., **Quantum-Chemical Study of Photo-chemical Properties of some Unsaturated Compounds .** Journal of Al-Baath university, Vol. 41, No.16 (2019)p.55-80. & Vol. 41, No.17 (2019)p.147-172.

[15] Ghanoum K., Kodlaa A., Merza J., **Quantum-Chemical and Experimental Study of Spectroscopic and Photochemical Properties of 2-methyl quinoxaline 1,4-dioxide,** Journal of Al-Baath university, Vol. 41, No.17 (2019)p.127-146.

[16] Edrees L., Kodlaa A., Alali A., **STUDY OF THE SPECTROSCOPIC AND PHOTOCHEMICAL PROPERTIES OF SEVERAL NAIL POLISHES USING THE QUANTUM-CHEMICAL AND EXPERIMENTAL METHODS,** Alley-science.ru, №5(44) (2020)p.21-29.

[17] Idris L., Kodlaa A., Alali A., **Quantum-Chemical Study of Photochemical Effect of some Nail polish components,** Journal of Al-Baath university, Vol. 41, No.21 (2019)p.37-66.

[18] رنيم خانكان، عدنان كودلأ، **دراسة تأثير الضوء في الخصائص البنيوية والإلكترونية لحمضي السيتريك والأسكوربيك المستخدمان في منتجات العناية بالشعر**، مجلة جامعة البعث، المجلد 44، العدد 18، (2022) ص (117-147).

[19] طلال غسان وردة، سليمان ديبو، عدنان كودلأ، **دراسة كوانتية لتأثير الضوء على الخصائص البنيوية والترموديناميكة لبعض الأكاسيدالمعدنية**، مجلة جامعة البعث– سلسلة العلوم الأساسية، المجلد 44، العدد 3، (2022) ص (97-127).

[20] عالية الرفاعي، عدنان كودلأ، فاطمة الرحال ؛ **دراسة تأثير الضوء على الفينول وبعض مشتقاته**، مجلة جامعة البعث المجلد 44، العدد 15، (2022) ص (11-38).

[21] Frisch M.J. , et. al: **GAUSSIAN 03, Revision B.05**, Gaussian, Inc., Pittsburgh, PA, (2003).

[22] Frisch M. J. , et.al : **GAUSSIAN 09, Revision A.02**، Gaussian, Inc., Wallingford CT, (2009).

[23] Frisch M. J. , et.al : **GAUSSIAN 09, Revision D.01**، Gaussian, Inc., Wallingford CT, (2013).

[24] Roy D. Dennington II, Todd A. Keith and John M. Millam, **GaussView 5.0.8**, Semichem, Inc. 2000-2008

[25] Roy D. Dennington II, Todd A. Keith and John M. Millam, **GaussView 6.0.16**, Semichem, Inc. 2000-2016 .

[26] Ali, J. H., & Kazar, K. O. **Theoretical Study on Bromofulvene isomers (3-Bromofulvene, 4-Bromofulvene and 6-Bromofulvene) and their positive and negative radical ions.** Part A. journal of kerbala university, (2013),11(3).

[27] Khankan R., **A Quantum and Experimental Study of the Effect of Light on Some Components of Hair Dyes**, Master -Thesis , 2023, Albaath-University-Syria.

[28] Silva, E.R., Queiroz, A.N., Almeida, E.D. and Borges, R.S., **A DFT study of aminophenol stability. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience**, 6(7), (2009), P.1694.

تحسين النمذجة الخطية للبيانات الترتيبية والاسمية باستخدام خوارزمية مبتكرة

*د. فاطمة شلاف

الملخص

يهدف هذا البحث إلى بناء خوارزمية فعالة لاختيار النموذج الخطي الأنسب لتحليل البيانات الترتيبية المقاسة بمقياس ليكرت، وذلك من خلال تحويلها إلى بيانات كمية قابلة للتحليل الإحصائي باستخدام تقنية المركبات الأساسية الفئوية .(CATPCA) تتيح هذه التقنية معالجة البيانات الاسمية والترتيبية وتحويلها إلى صيغ كمية، مع الحفاظ على العلاقات الخطية بين المتغيرات، ما يسمح بتقييم النماذج الخطية المختلفة ضمن إطار بيانات بانل.

طُبقت الخوارزمية على بيانات المشاريع الصغيرة في مدينة حمص وريفها، مع التركيز على البعدين الاجتماعي والمالي، حيث تم تحويل البيانات الترتيبية إلى كمية باستخدامCATPCA ، ثم اختبار ثلاثة نماذج بانل (التجميعي، التأثيرات الثابتة، التأثيرات العشوائية) لتحديد النموذج الأكثر كفاءة.

أظهرت النتائج أن النموذج التجميعي هو الأنسب، وكشفت عن علاقة إيجابية قوية بين البعد الاجتماعي والمركبة المالية الأولى، المرتبطة بالربح والاستدامة والتوجه الاستثماري. كما ظهر تأثير إيجابي لمركبة التوسع والنجاح الاستراتيجي، في حين كان للتقييم النقدي الصرف أثر سلبي على الأثر الاجتماعي. تعكس هذه النتائج أهمية الأداء المالي المستدام والتوسّع المدروس في تعظيم العائد الاجتماعي للمشاريع الصغيرة.

الكلمات المفتاحية: البيانات الفئوية، البيانات الترتيبية، البيانات الاسمية، تحليل المركبات الأساسية الفئوي (CATPCA)، نماذج بيانات البانل، نموذج التأثيرات الثابتة، مقياس ليكرت، اختيار النموذج الخطي، المشاريع الصغيرة، الأبعاد الاجتماعية والمالية.

*مدرس- قسم الإحصاء الرياضي- كلية العلوم -جامعة حمص.

Optimizing Linear Modeling for Ordinal and Nominal Data Using a Novel Algorithm

Fatima Shallaf*

Abstract

This study aims to develop an effective algorithm for selecting the most appropriate linear model for analyzing ordinal data measured using the Likert scale. The approach involves transforming the ordinal data into quantitative data suitable for statistical analysis using the Categorical Principal Components Analysis (CATPCA) technique. This method allows for the conversion of nominal and ordinal variables into quantitative forms while preserving linear relationships among variables, enabling the evaluation of different linear models within a panel data framework.

The proposed algorithm was applied to data from small-scale projects in Homs city and its countryside, with a focus on the social and financial dimensions. The ordinal data were transformed using CATPCA, followed by testing three panel data models—pooled, fixed effects, and random effects—to determine the most efficient one.

The results indicated that the pooled model was the most suitable. A strong positive relationship was found between the social dimension and the first financial component, associated with profit, sustainability, and investment orientation. A positive effect was also observed for the component related to expansion and strategic success, while a negative effect was noted for the purely evaluative financial component. These findings highlight the importance of sustainable financial performance and strategic growth in maximizing the social impact of small enterprises.

Keywords: Categorical Data, Ordinal Data, Nominal Data, Categorical Principal Components Analysis (CATPCA), Panel Data Models, Fixed Effects Model, Likert Scale, Linear Model Selection, Small Enterprises, Social and Financial Dimensions

*Teacher, Dept. of Mathematical Statistics, Faculty of Science, Homs University.

مقدمة (Introduction):

تُعدّ البيانات متعددة الأبعاد والمصـــنفة زمنياً من أهم أشـــكال البيانات التي تواجه الباحثين في مجالات الاقتصاد والاجتماع والتنمية، وخاصة ما يُعرف بـ بيانات البانل، والتي تجمع بين البُعدين الزماني والمكاني، مما يوفر معلومات أعمق ويساعد على تتبّع التغيرات في الظواهر المدروسة.

وفي كثير من الحالات، تكون هذه البيانات غير كمية (اســـمية أو ترتيبية)، مما يحدّ من إمكانية استخدامها ضمن النماذج الاقتصادية القياسية التقليدية، وهنا تبرز الحاجة إلى تقنيات تحليلية قادرة على التعامل مع هذا النوع من البيانات.

من بين هذه التقنيات، يأتي تحليل المركبات الأساسية الفئوية (CATPCA) كأداة إحصائية فعالة تتيح تحويل البيانات الاسمية والترتيبية إلى مركبات كمية يمكن إدراجها ضمن النماذج الإحصائية المتقدمة، مع الاحتفاظ بالمعلومات البنيوية الكامنة فيها.

يركّز هذا البحث على توظيف تقنية CATPCA في معالجة وتحليل بيانات ترتبط بـــ المشاريع الصـــغيرة، بهدف دراســـة العوامل المؤثرة عليها، وتحديد النموذج الأنســـب من بين نماذج بيانات البانل (المجمّع، التأثيرات الثابتة، التأثيرات العشـــوائية). ويُشـــكل هذا التطبيق العملي خطوة نحو دعم صناع القرار بمؤشرات دقيقة يمكن الاعتماد عليها في رسم السياسات التنموية المستندة إلى معطيات واقعية.

مشكلة البحث:

يواجه الاستثمار الاجتماعي في سوريا والعالم العربي تحديات كبيرة نتيجة نقص الوسم الإحصائي الدقيق لهذه الاســـتثمارات، مما يعيق فهم وتقييم العوامل المؤثرة على نجاحها. يعتمد كثير من الدراسات على بيانات ترتيبية مأخوذة من استبيانات تقديرية ذات دقة محدودة، وصعوبة في تحليلها بالطرق الإحصـائية التقليدية. بالإضـافة إلى ذلك، يفتقر المجال إلى خبراء متخصـصـين وأبحاث متعمقة، مما يحدّ من تطوير أدوات تحليلية فعالة. يسـعى هذا البحث لسـد هذه الفجوة عبر تطوير خوارزمية مبتكرة لتحليل البيانات الترتيبية باستخدام نماذج بانل، بهدف توفير أساس علمي موثوق يدعم اتخاذ قرارات استثمارية أكثر دقة وفعالية.

أهمية البحث:

1. **تطوير أدوات تحليل البيانات** :ابتكار خوارزميات تدعم تحليل البيانات الاسمية والترتيبية وتحسين تحليل مقياس ليكرت لزيادة دقة النتائج الإحصائية.
2. **تعزيز الابتكار في التحليل الإحصائي** :تمكين الباحثين من اتخاذ قرارات دقيقة ومستندة إلى نمذجة خطية متقدمة للبيانات.
3. **توفير إطار عملي** :يساهم البحث في دعم مجالات الاستثمار الاجتماعي والمشاريع الصغيرة، مما يعزز النمو الاقتصادي.

ويحول البحث البيانات المقاسة بمقياس ليكرت إلى بيانات كمية باستخدام تقنيةCATPCA ، ليتم بعدها مقارنة النماذج الخطية الثلاث لبيانات البانل ذات البعدين المكاني والزماني.

الهدف من البحث:

1–تطوير مقياس ليكارت الخماسي لفهم وتحليل البيانات بشكل أكثر دقة، مما يعزز من دقة ووضوح النتائج ويسهم في اتخاذ قرارات مستنيرة.

2–استخدام CATPCA لتحويل البيانات الفئوية (الاسمية والترتيبية) إلى قيم كمية، مما يعزز دقة النتائج في الأبحاث الاجتماعية.

3–تقديم توصيات قابلة للتنفيذ لتحسين السياسات الدراسات الاحصائية التي تدعم التنمية الاجتماعية والاقتصادية، استناداً إلى فهم عميق للعوامل المؤثرة المستخلصة منCATPCA.

4- تقديم دراسة حالة باستخدام التحليل الإحصائي للاستثمار الاجتماعي :تتضمن نماذج إحصائية لتحديد المتغيرات الأساسية المؤثرة وتقديم توصيات لتحسين أداء الاستثمارات الاجتماعية في سوريا.

تحليل المركبات الأساسية الفئوية (Principal Components Analysis Categorical):[1] [2]

مقدمة:

في العلوم الاجتماعية والسلوكية غالباً ما يواجه الباحثون عدداً كبيراً من المتغيرات التي يرغبون في تقليلها إلى عدد أصغر من المركبات مع أقل قدر ممكن من فقدان المعلومات، يعتبر تحليل المركبات الأساسية (PCA) طريقة مناسبة لإجراء تقليل البيانات. تعاني PCA من اثنين من القيود الهامة أولاً: يفترض أن العلاقات بين المتغيرات خطية، وثانياً: يكون تفسيرها معقولاً فقط إذا تم افتراض أن جميع المتغيرات يتم قياسها كمياً، ولكن في العلوم الاجتماعية والسلوكية غالباً ما تكون هذه الافتراضات غير متوفرة وبالتالي قد لا تكون PCA التقليدية دائماً الأنسب للتحليل، لذا تم تطوير بديل يشار إليه باسم تحليل المركبات الأساسية الفئوية(CATPCA)، وهذه الطريقة

البديلة لها نفس أهداف تحليل المركبات الأساسية التقليدية، ولكنها مناسبة لمتغيرات مستويات القياس المختلطة (الاسمية، الترتيبية، الفئوية).

تعريف تحليل المركبات الأساسية الفئوية CATPCA:[1] [2]

هو تقنية إحصائية تهدف إلى تقليل عدد الأبعاد في مجموعة بيانات متعددة المتغيرات مع متغيرات فئوية، مع الحفاظ على أكبر قدر ممكن من التباين في البيانات، يختلف CATPCA عن PCA التقليدي في أنه يستطيع التعامل مع المتغيرات الفئوية باستخدام عملية تعرف بالقياس الكمي الأمثل(Optimal Scaling) .

CATPCA وPCA يقدمان نفس الحلول تماماً عندما نتعامل مع البيانات الكمية.

القياس الكمي الأمثل Gifi ودالة الخسارة:[4][3]

القياس الكمي الأمثل هو عملية تحويل المتغيرات الفئوية إلى قيم كمية بطريقة تحافظ على البنية الأساسية للبيانات وتسمح بتحقيق الأهداف التحليلية لـــPCA ، يستخدم القياس الكمي الأمثل لتحويل المتغيرات الفئوية إلى قيم عددية تعظم مقدار التباين المفسر VAF في البيانات.

تُعتبر دالة الخسارة (Loss Function) في CATPCA مقياساً لمدى اختلاف القيم المحولة (المقاسة كمياً) للفئات الفئوية عن القيم المثلى التي نهدف إليها، يتمثل الهدف في تقليل هذه الاختلافات إلى الحد الأدنى لتحقيق أفضل قياس كمي للفئات.

صياغة دالة الخسارة:[6][5][4]

لنأخذ مصفوفة درجات الفئات Hوالتي تحتوي على n من الأفراد (المشاهدات) و m من المتغيرات، يمثل كل عمود jفي H المتغير الفئوي .Xj

بعد تحويل المتغيرات الفئوية إلى قيم كمية Q، يمكننا التعبير عن دالة الخسارة على النحو التالي:

$$\left\| \mathbf{S}\mathbf{A}^T - \mathbf{H} \right\|_F^2 = L(\mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{A})$$

تفسير دالة الخسارة:

- **مصفوفة درجات الفئاتH** : تمثل البيانات الأصلية للمتغيرات الفئوية.
- **مصفوفة القيم المحولة Q** : تحتوي على القيم العددية المحولة من المتغيرات الفئوية بعد عملية القياس الكمي الأمثل.
- **مصفوفة درجات الكائنS:** تحتوي على درجات الأفراد على المركبات الأساسية المحسوبة للقيم المحولة.

- **مصفوفة تحميلات المركبات A** : تحدد العلاقة بين المتغيرات الأصلية والمركبات الأساسية.
- $\|\cdot\|_F$: هي الدالة المعيارية الفروبينوسية(Frobenius norm) ، التي تحسب مجموع مربعات الفروقات بين العناصر في المصفوفتين.

تهدف دالة الخسارة L إلى تقليل الفرق بين المصفوفة الأصلية H والمصفوفة المحسوبة SA^T، يُستخدم هذا التخفيض في الفرق لضمان أن التحويل الفئوي يعكس أعظم تباين بين البيانات.

مراحل حساب دالة الخسارة[6][5][4] :

1. **التحويل الأولي للمتغيرات الفئوية:**

تبدأ العملية بتحويل مبدئي لفئات المتغيرات إلى قيم باستخدام أي طريقة مناسبة أو استخدام تقديرات مبدئية معروفة.

2. **حساب دالة الخسارة:**

باستخدام التحويل المبدئي، يتم حساب دالة الخسارة L التي تقيس الفرق بين القيم الفعلية والقيم المحولة.

3. **تحديث القيم المحولة:**

تُحدث القيم المحولة Q في اتجاه تقليل دالة الخسارة L هذا يمكن أن يتضمن طرق التحسين مثل المربعات الصغرى.

4. **إعادة تقييم دالة الخسارة:**

بعد كل تحديث، تُعاد حساب دالة الخسارة لتحديد مدى فعالية التحسين، إذا كانت دالة الخسارة لا تزال فوق عتبة معينة أو لم تتغير كثيراً، فإن العملية تستمر.

5. **التكرار حتى التقارب:**

تتكرر العملية السابقة حتى تصل دالة الخسارة إلى الحد الأدنى أو حتى يتم تحقيق التقارب، مما يعني أن القيم المحولة أصبحت مستقرة ولا تتحسن بشكل كبير مع التكرارات الإضافية

بعد تطبيق هذه الخوارزمية نضمن قاعدة بيانات جديدة تتألف من متغيرات جديدة كمية وهنا بعد إضافة البعد الزماني والمكاني لقاعدة البيانات تتحول البيانات الى بيانات بانل.

مفهوم بيانات البانل(Panel Data) [8][7]

بيانات البانل هي نوع من قواعد البيانات التي تجمع بين خصائص البيانات المقطعية والبيانات الزمنية في آنٍ واحد.

- **البيانات المقطعية :(Cross–sectional data)** تصف سلوك مجموعة من الوحدات أو الأفراد في لحظة زمنية واحدة، مثل الدول أو الشركات أو الأسر في سنة معينة.
- **البيانات الزمنية :(Time series data)** تركز على متابعة سلوك وحدة واحدة عبر فترات زمنية متتالية.

أما بيانات البانل، فهي تتكون من **ملاحظات لمجموعة من الوحدات (مثل دول أو محافظات أو مؤسسات) تم رصدها عبر عدة فترات زمنية**، مما يسمح بدراسة تأثير المتغيرات عبر الزمن والمكان معًا.

يمكن تلخيص مكونات بيانات البانل في ثلاثة أبعاد رئيسية:

1. **البُعد الموضوعي** :أي المتغيرات التي يتم دراستها (مثل المتغير التابع والمتغيرات المستقلة).
2. **البُعد الزمني** :يمثل الفترات الزمنية التي تمت فيها الملاحظات.
3. **البُعد المقطعي (المكاني)** :مثل الوحدات الجغرافية أو المؤسسات أو الأفراد.

تكمن أهمية بيانات البانل في قدرتها على دمج التحليل الزمني مع التحليل المقطعي، مما يوفر معلومات أغنى وأدق من تحليل كل نوع على حدة.

توجد تسميات متعددة لهذا النوع من البيانات، مثل البيانات المدمجة أو البيانات الطولية، والتسمية الأكثر شيوعًا واستخدامًا هي **البيانات الطولية.(Panel Data)**

النماذج الأساسية لتحليل بيانات بانل : [7][11]

Basic Models for Panel Data Analys:

اقترح العالم (w.green) عام 1993 الصيغة الأساسية لانحدار البيانات الطولية، ومن هنا تأتي نماذج البيانات الطولية في ثلاثة أشكال رئيسية هي:

1) نموذج الانحدار التجميعي PRM (Pooled Regression Model)
2) نموذج التأثيرات الثابتة FEM (Fixed Effect Model)
3) نموذج التأثيرات العشوائية REM (Random Effect Model)

1- نموذج الانحدار التجميعي Pooled Regression Model [11][12]

يعدُ هذا النموذج من أبســـط نماذج البيانات الطولية حيث تكون فيه جميع المعاملات $\beta_{0(i)}, \beta_j$ ثابتة لجميع اللحظات الزمنية (يهمل أي تأثير للزمان والمكان).

بإعادة كتابة النموذج في المعادلة (1.1) نحصـــل نموذج الانحدار التجميعي بالصـــيغة الآتية:

$$Y_{it} = \beta_0 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j X_j(it) + \varepsilon_{it} \qquad (1)$$

حيث أن:

$$\varepsilon_{it} \sim N(0, \sigma^2) \text{ و } t = 1,2,\cdots,T \text{ و } i = 1,2,\cdots,N$$

نســتخدم طريقة المربعات الصــغرى العادية في تقدير معلمات النموذج في المعادلة (1) بعد أن يتم ترتيب القيم الخاصـــة بمتغير التابع والمتغير المســـتقل بدءاً من أول مجموعة بيانات مكانية وهكذا بحجم مشاهدات مقداره $N * T$.

2- نموذج التأثيرات الثابتة Fixed Effect Model [11][13][12]

يكون الهدف منها معرفة ســـلوك كل مجموعة بيانات مكانية على حدة، من خلال جعل β_0 تتفـاوت من مجموعـة الى أخرى مع بقـاء معـاملات الميـل β_j ثـابتـة لكـل المجموعـات المقطعية(المكانية)، وعليه فإن نموذج التأثيرات الثابتة يكون بالصيغة الآتية:

$$Y_{it} = \beta_{0(i)} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j X_j(it) + \varepsilon_{it} \qquad (2)$$

حيث أن:

$$\varepsilon_{it} \sim N(0, \sigma^2) \text{ و } t = 1,2,\cdots,T \text{ و } i = 1,2,\cdots,N$$

ويقصـد بمصـطلح التأثيرات الثابتة بأن المعلمة β_0 لكل مجموعة بيانات مكانية لا تتغير خلال الزمن وأن التغير فقط في مجموعات البيانات المكانية (المقاطع) و لتقدير معلمات النموذج في المعادلة (2) السماح للمعلمة بالتغيير بين المجاميع المقطعية.

3_ نموذج التأثيرات العشوائية Random Effect Mode [13][14]

في نموذج التأثيرات الثابتة يكون حد الخطأ ε_{it} ذا توزيع طبيعي متوســطه مقداره صــفر وتباينه مســاوٍ إلى σ^2 ولكي تكون معلمات نموذج التأثيرات الثابتة صــحيحة وغير متحيزه، وعادة ما يفرض بأن تباين الخطأ ثابت (متجانس) لجميع المشـــاهدات المكانية وليس هناك أي ارتباط ذاتي خلال الزمن بين كل مجموعة من مجاميع المشاهدات المكانية في لحظة زمنية محددة.

في نموذج التأثيرات العشـــوائية يتكون حد الخطأ من جزئين v_i يمثل حد الخطأ في البيانات المكانية و ε_{it} حد الخطأ الناتج من دمج البيانات المكانية مع الســـلاســـل الزمنية،يعتبر نموذج التأثيرات العشوائية نموذجاً ملائماً في حالة وجود خلل فـي أحـد الفـروض المـذكورة فـي نموذج التأثيرات الثابتة.

سوف نعامل $\beta_{0(i)}$ كمتغير عشوائي له معدل مقداره μأي:

$$\beta_{0(i)} = \mu + v_i \qquad (3)$$

معادلة نموذج التأثيرات العشوائية:

$$Y_{it} = \mu + v_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j X_j(it) + \varepsilon_{it} \qquad (4)$$

حيث أن v_i يمثل حد الخطأ في مجموعة البيانات المكانية i

يطلق على نموذج التأثيرات العشوائية أحياناً نموذج مركبات الخطأ بسبب أن النموذج في المعادلة (4) يحوي مركبين للخطأ هما ε_{it} و v_i ويمتلك نموذج التأثيرات العشوائية خواصاً رياضيةً منها أن:

$$v_i \sim N(0, \sigma_v^2) \text{ و } \varepsilon_{it} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$w_{it} = v_i + \varepsilon_{it}$$

$$w_{it} \sim N(0, \sigma_v^2 + \sigma_\varepsilon^2)$$

اختبارات تحديد النموذج الملائم [15][10]:

Test of Determine The Appropriate Model:

يتم اختيار النموذج الأنسب لتحليل بيانات البانل من خلال مجموعة من الاختبارات التسلسلية، تبدأ باختبار فيشر، ثم اختبار هوسمان في حال لزم الأمر، كما يلي:

1. اختبار فيشر:(F-test)

- إذا كانت القيمة الاحتمالية (P-value) أكبر من 0.05، فإن النموذج التجميعي (Pooled Model)هو الأنسب، ولا حاجة لاستخدام نماذج التأثيرات.
- أما إذا كانت القيمة الاحتمالية أقل من 0.05، فهذا يعني وجود فروق معنوية بين الوحدات، ويجب الانتقال لاختبار هوسمان لتحديد نوع التأثيرات المناسب.

2. اختبار هوسمان:(Hausman Test)

- إذا كانت القيمة الاحتمالية (P−value) أكبر من 0.05، فإن نموذج التأثيرات العشوائية (Random Effects Model)هو الأنسب.
- أما إذا كانت القيمة الاحتمالية أقل من 0.05، فإن نموذج التأثيرات الثابتة (Fixed Effects Model)هو النموذج المناسب.

يمكن تلخيصه في الجدول التالي:

الجدول (6) اختبارات تحديد النموذج

اختبار فيشر		
$P.value < 0.05$		$\mathbf{P.value > 0.05}$
Hausman Test		**النموذج التجميعي هو المناسب**
$\boldsymbol{P.value < 0.05}$	$P.value > 0.05$	
نموذج التأثيرات الثابتة هو المناسب	نموذج التأثيرات العشوائية هو المناسب	

خوارزمية العمل:

تقسم الخوارزمية الى مرحلتين أساسيتين:

المرحلة الأولى: تحليل المركبات الأساسية الفئوية(CatPCA)

- تُستخدم لتحويل المتغيرات النوعية (الاسمية والترتيبية) إلى متغيرات كمية مع الاحتفاظ بأكبر قدر من التباين.
- مخرجات هذه المرحلة هي المتغيرات الأساسية الكمية بدلاً من بيانات ليكارت الترتيبية وتمثيلها الوهمي.

الخطوات:

1. تجهيز البيانات (ترميز المتغيرات، تحديد النوع: اسمي أو ترتيبي).
2. تطبيق CatPCA للحصول على المركبات الأساسية.
3. اختيار عدد المركبات بناءً على القيمة التراكمية للتباين (مثلاً 80%).
4. استخدام هذه المركبات كمُدخلات في المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية :نماذج البانلPanel Models

الهدف: إيجاد النموذج الأفضل لتمثيل العلاقة بين المركبات الأساسية (كمتغيرات مستقلة) والمتغير التابع (ويمكن أن يكون دخل، مستوى رضا، إلخ).

اختيار النموذج الأفضل من خلال الاختبارات آنفة الذكر.

التطبيق العملي:

عينة الدراسة:

بما ان الدراسة تهتم بمجتمع حمص وريفها (المستفيدين من المشاريع الصغيرة) قمنا باختيار العينة بطريقة العينة الطبقية وبكسر معاينة قدره $\frac{1}{5}$ حيث قُسم مجتمع الدراسة الى طبقتين الأولى طبقة المدينة وكانت نسبة المستفيدين 90% من مجتمع الدراسة، والطبقة الثانية فهي طبقة الريف وكانت نسبة المستفيدين الريفين هي 10% من مجتمع الدراسة، وباستخدام برنامج **kobo Toolbox** ومن ثم نسخ رابط الاستبيان وتوزيعه على 100 شخص من المستفيدين من المشاريع الصغيرة، وتم استرجاع 87 استبيان واستبعاد (13) استبيان لعدم اكتمال الإجابات على فقرات الاستبيان.

تبنى الاستبيان أربع محاور رئيسية وهي كالتالي:

1- المحور الأول: محور الأثر الاجتماعي الذي يعتمد على تقييم أثر المشروع على تحسين معيشة السكان ومستوى رفاهية المجتمع.

2- المحور الثاني: محور الأثر المالي الذي يهتم بتقييم زيادة الدخل الشخصي أو الربح.

مرحلة تطبيق المركبات الأساسية الفئوية:

1- جمع وإدخال البيانات: تم جمع البيانات من أصحاب المشاريع الصغيرة، وذلك بملء الاستبيان الالكتروني

2- تحول البيانات من البيانات الفئوية (الاسمية والترتيبية) إلى البيانات الكمية:

تحويل البيانات من الفئوية (مقياس ليكارت الى البيانات الكمية وذلك من خلال تطبيق خوارزميات التحويل إلى القياس الأمثل (Gifi)) فكانت البيانات قبل التحويل عبارة عن درجات ليكارت الخماسي

وبعد تطبيق الخوارزمية المذكورة أعلاه تتحول البيانات إلى بيانات كمية.

تطبيق المركبات الأساسية الفئوية على المحور الاجتماعي:

1- متغيرات المحور الاجتماعي:

بدايةً تم تحديد المتغيرات الآتية ضـــمن المحور الاجتماعي لقياس الأبعاد الاجتماعية لمســـاهمة المشروع، وقد تم ترميز كل متغير وفق الجدول التالي، بما يعكس مختلف جوانب الأثر الاجتماعي المحتمل للمشروع على المجتمع المحلي:

المتغيرات	ترميز المتغيرات
X_1	تقيم تأثير المشروع على مستوى رفاهية المجتمع
X_2	النجاح في توظيف عمال أو توفير فرص عمل للشباب
X_3	الرغبة في مشاركة تجاربك في المشاريع الصغيرة مع المجتمع
X_4	تقييم أثر المشروع على تحسين معيشة السكان
X_5	تقديم فرصاً للتدريب وتطوير المهارات للمجتمع
X_6	دعم المبادرات المجتمعية المحلية
X_7	التأثير على التوظيف وفرص العمل في المنطقة
X_8	المساهمة في تعزيز التواصل والروابط الاجتماعية
X_9	تعزيز المساواة والتنوع الاجتماعي من خلال المشروع
X_{10}	تعزيز الوعي بالقضايا الاجتماعية

جدول رقم (1) متغيرات المحور الاجتماعي

2- التباين المحسوب VAF والقيم الذاتية:

وبعد تطبيق تحليل المركبات الأساسية الفئوية (CATPCA) على متغيرات المحور الاجتماعي، تم الحصول على القيم الذاتية (Eigenvalues) ونسب التباين المفسر (VAF) كما هو موضح في الجدول التالي، حيث يتبين أن المركبة الأولى تفسر ما نسبته 63.09% من التباين الكلي":

الجدول رقم () التباين المحسوب والقيم الذاتية

الرقم	Eigenvalue	VAF (%)	Cumulative VAF (%)
1	6.3086464	63.086464	63.08646
2	0.7891447	7.891447	70.97791
3	0.7047526	7.047526	78.02544
4	0.5749505	5.749505	83.77494
5	0.4476810	4.476810	88.25175
6	0.3773202	3.773202	92.02496
7	0.2739422	2.739422	94.76438
8	0.2245329	2.245329	97.00971
9	0.1721058	1.721058	98.73076
10	0.1269237	1.269237	100.00000

نظراً لاعتمادنا في اختيار عدد المركبات الأساسية على نسبة التباين الكلي المفسر، وكون دراستنا تركز على الجوانب الاقتصادية والاجتماعية، فقد تم اعتماد المركبات الأساسية الأربعة الأولى،

حيث بلغت نسبة التباين التراكمية المفسرة حوالي 83.77%، وهي نسبة كافية لتفسير بنية البيانات الأصلية بشكل مناسب.

3- تطبيق المركبات الأساسية على البيانات الكمية:

بعد الحصول على البيانات الكمية (بيانات التحويل الأمثل) غدى تطبيق المركبات الأساسية سهل المنال وبالتالي نحصل على النتائج التالية:

المتغير	المركبات الساسية									
	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10
x1	0.6954707	-0.3941424	-0.2586118	-0.3277565	0.1282038	-0.0991691	0.2924105	0.1850414	-0.0829200	0.1837859
x2	0.7077375	0.4302051	-0.3040270	-0.4435821	0.1056849	-0.0565124	0.0037914	0.0725734	-0.0692660	-0.0197908
x3	0.6373169	-0.1612770	-0.1751281	-0.0741165	-0.4582906	0.5447925	-0.1381855	-0.0292365	-0.0520247	-0.0465622
x4	0.8135293	-0.0472758	-0.3441560	0.3322540	0.0854508	-0.1721869	0.0639729	-0.1349944	-0.0850134	-0.2015083
x5	0.8505794	0.1790028	0.0102561	0.3401353	-0.0807847	-0.0753687	0.1000726	0.2802360	0.1243261	0.1116479
x6	0.8463786	0.0407085	0.1359626	0.2875544	0.1594135	0.0618895	-0.2930888	-0.0716637	-0.1832226	0.1642026
x7	0.8601324	-0.1380771	-0.0647811	0.0189040	0.3487330	0.0325257	-0.2417751	-0.0686300	0.2069113	-0.0888977
x8	0.8329887	-0.0065839	0.4078098	0.0029515	-0.0219806	0.0667460	0.1779050	0.2087912	-0.1430102	-0.1978252
x9	0.8227158	-0.0652566	0.2042062	-0.3009346	-0.2876505	-0.2612662	-0.1568758	-0.0690267	0.0735095	-0.0289344
x10	0.8392714	0.1371559	0.2096998	-0.0719648	-0.0595081	0.0579044	0.2244943	-0.3514375	0.1676896	0.1368903

الجدول رقم (7) تحميلات المركبات الأساسية

1) **إن المتغيرات ذات التحميل المرتفع على المركبة الأساسية الأولى تشمل المتغيرات العشر كما هو موضح في جدول التحملات السابق** وبالتالي، تعكس هذه المركبة الجوانب الاجتماعية العامة للمشروع من رفاهية، وفرص عمل، وتدريب، ودعم المجتمع، ويمكن اعتبارها الممثل الرئيسي للبُعد الاجتماعي الكلي.

2) أما المركبة الأســاســية الثانية، فقد كان أعلى تحميل عليها :X2النجاح في توظيف عمال أو توفير فرص عمل للشـــباب، حيث يمتلك أعلى قيمة تحميل (0.4302)، مما يجعله الممثل الأبرز لهذا البُعد، أما المتغيرات الأخرى فكانت تحميلاتها منخفضــة نسـبياً، وبالتالي لا تسـهم بشكل جوهري في تفسير هذه المركبة.

3) المركبة الأسـاسـية الثالثة تظهر فيها تحميلات مرتفعة للمتغير المسـاهمة في تعزيز التواصـل والروابط الاجتماعية X_8 بقيمة 0.4078، مما يدل على أن هذه المركبة مرتبطة بالتواصـــل المجتمعي وتعكس تركيزها على تعزيز الروابط الاجتماعية والتفاعل بين أفراد المجتمع.

4) المركبة الأساسية الرابعة تُظهر تحميلات مرتفعة لكل من المتغيرات التالية: تقييم أثر المشروع على تحســين معيشـــة الســكانX_4بتحميل قدره 0.3322، وتقديم فرص للتدريب وتطوير المهـارات للمجتمع X_5بتحميـل 0.3401، ودعم المبـادرات المجتمعيـة المحليـةX_6تحميـل 0.2876. وهذا يشير إلى أن هذه المركبة تعكس بُعدًا يرتبط بتحسين الظروف المعيشية، من خلال توفير فرص التدريب وبناء القدرات، إلى جانب دعم المبادرات المجتمعية.

يمكن الاستنتاج من التحليل أن الاعتماد على أربع مركبات أساسية فقط يكفي لتفسير البيانات بشـكل شـامل، مع المحافظة على نسـبة التباين التراكمية المرتفعة التي تعكس بدقة البنية الكامنة للمجموعة الأصلية من المتغيرات، مما يحقق هدف تقليل الأبعاد دون فقدان المعلومات الجوهرية

تطبيق المركبات الأساسية الفئوية على المحور المالي:

1- متغيرات المحور المالي:

بدايةً تم تحديد المتغيرات الآتية ضمن المحور المالي لقياس الأبعاد المالية لمساهمة المشروع، وقد تم ترميز كل متغير وفق الجدول التالي، بما يعكس مختلف جوانب الأثر المالي المحتمل للمشـروع على المجتمع المحلي:

جدول رقم () متغيرات المحور المالي

المتغيرات	ترميز المتغيرات
y_1	تقييم زيادة الدخل الشخصي أو الربح
y_2	تقييم استدامة المشروع المالية
y_3	رغبتك بمشاركة تجاربك في إدارة المشاريع الصغيرة لتعزيز النمو الاقتصادي
y_4	توسيع المشروع أو إطلاق مشروعات جديدة بفضل نجاح مشروعك الحالي

y_5	استراتيجيات لتحسين أداء مشروعك من الناحية المالية
y_6	هل تلقيت دعماً مالياً من المصارف أو المؤسسات المالية لتوسيع مشروعك
y_7	التخطيط للاستثمار في تحسين البنية التحتية أو تحسينات تقنية لتعزيز أداء المشروع مالياً

2- التباين المحسوب VAF والقيم الذاتية:

وبعد تطبيق تحليل المركبات الأساسية الفئوية (CATPCA) على متغيرات المحور المالي، تم الحصول على القيم الذاتية (Eigenvalues) ونسب التباين المفسر (VAF) كما هو موضح في الجدول التالي، حيث يتبين أن المركبة الأولى تفسر ما نسبته 39.17% من التباين الكلي:

الجدول رقم () التباين المحسوب والقيم الذاتية للمحور المالي.

الرقم	Eigenvalue	VAF (%)	Cumulative VAF (%)
1	2.741729	39.167558	39.16756
2	1.164440	16.634854	55.80241
3	0.984885	14.069782	69.87219
4	0.670848	9.583537	79.45572
5	0.600408	8.577258	88.03298
6	0.501209	7.160126	95.19310
7	0.336482	4.806884	100.00000

بناءً على الجدول الذي يعرض القيم الذاتية ونسب التباين المفسر، نلاحظ أن أول خمس مركبات أساسية تفسر ما نسبته حوالي 88.03% من إجمالي التباين في البيانات، ونظرًا لأن هذه النسبة قريبة جدًا من 90%، فهي تمثل جزءًا كبيرًا من التباين الكلي، مما يشير إلى أن هذه المركبات الخمس تحتفظ بقدر كافٍ من المعلومات الكامنة في البيانات الأصلية، وبالتالي يمكن اعتمادها كأساس لتفسير الأبعاد الكامنة وتحليل الهيكل الداخلي للبيانات.

3- تطبيق المركبات الأساسية على البيانات الكمية:

بعد الحصول على البيانات الكمية (بيانات التحويل الأمثل) غدى تطبيق المركبات الأساسية سهل المنال وبالتالي نحصل على النتائج التالية:

المتغير	المركبات الأساسية						
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
y_1	0.5878425	0.07108663	0.5032507	-0.34215245	0.26390212	-0.39569997	0.22985980
y_2	0.7028913	0.11643303	0.4660847	-0.32646637	-0.04075985	0.40609092	0.04472924
y_3	-0.5322257	0.63624704	0.1761686	-0.03459989	-0.43547172	-0.11778150	0.27601618

-0.37285611	0.08599253	0.15018116	0.24023252	0.6189094	0.17045619	-0.6010103	y_4
-0.17665704	0.03851103	0.12076651	-0.60445279	-0.1266881	0.26259265	-0.7087713	y_5
0.07978757	-0.07994516	-0.26855244	-0.19712100	0.2647324	-0.70488103	-0.5561700	y_6
-0.49186281	-0.18111369	-0.49528145	-0.06834103	-0.0058544	0.19544060	0.6611076	y_7

من خلال الجدول السابق نستطيع القول:

1) تُظهر المركبة الأساسية الأولى (M_1) تحميلات مرتفعة على المتغيرات التالية: المتغير $\mathbf{y_1}$ (تقييم زيادة الدخل الشخصي أو الربح) بتحميل مقداره **0.5878**، والمتغير $\mathbf{y_2}$(تقييم استدامة المشروع المالية) بتحميل **0.7029**، والمتغير $\mathbf{y_7}$(التخطيط للاستثمار في تحسين البنية التحتية أو تحسينات تقنية لتعزيز الأداء المالي للمشروع) بتحميل **0.6611.**وتشير هذه التحميلات المرتفعة إلى أن المركبة M_1 تمثل بُعدًا اقتصاديًا واستثماريًا، يُعبر عن تركيز المشاركين على تحقيق الربح، وضمان الاستدامة المالية، والتخطيط لتوسعة مشاريعهم وتطويرها تقنيًا.

2) أما **المركبة الأساسية الثانية(M_2)** ، فقد أظهرت تحميلًا مرتفعًا بشكل خاص على المتغير $\mathbf{y_3}$(الرغبة في مشاركة التجارب في إدارة المشاريع الصغيرة لتعزيز النمو الاقتصادي) بتحميل مقداره **0.6362**، وكذلك المتغير $\mathbf{y_5}$(استراتيجيات لتحسين الأداء المالي للمشروع) بتحميل **0.2626.**تشير هذه القيم إلى أن المركبة M_2 تُجسّد بُعدًا معرفيًا ومجتمعيًا، يتمحور حول تبادل الخبرات والسعي لتحسين الأداء من خلال التعلم والمشاركة، مما يسمح بتسميتها بـ "**مركبة المشاركة والتعلّم المجتمعي**."

3) أما **المركبة الأساسية الثالثة(M_3)** ، فقد تميزت بتحميلات مرتفعة على كل من المتغير $\mathbf{y_1}$(تقييم زيادة الدخل الشخصي أو الربح) بتحميل **0.5033**، والمتغير $\mathbf{y_2}$(تقييم استدامة المشروع المالية) بتحميل **0.4661**، بالإضافة إلى المتغير $\mathbf{y_4}$(توسيع المشروع أو إطلاق مشروعات جديدة بفضل نجاح المشروع الحالي) بتحميل **0.6189.**تعكس هذه المركبة توجهًا نحو **التوسع والنجاح الاستراتيجي**، وتشير إلى وجود عقلية نمو لدى أصحاب المشاريع، تهدف إلى البناء على النجاحات الحالية من أجل تحقيق مستويات أعلى من الإنجاز.

4) أما **المركبة الأساسية الرابعة(M_4)** ، فقد سجلت تحميلات سالبة مرتفعة على المتغير $\mathbf{y_5}$ (استراتيجيات لتحسين الأداء المالي) بتحميل **0.6045−**، والمتغير $\mathbf{y_1}$(تقييم زيادة الدخل

الشـخصـي أو الربح) بتحميل **0.3422**−، والمتغير **y_2**(تقييم اسـتدامة المشـروع المالية) بتحميل **0.3265**.−يشير هذا النمط إلى بُعدٍ **نقدي أو تقويمي** لأداء المشروع المالي، حيث تعكس هذه المركبة توجّهًا نحو مراجعة الأداء المالي بهدف التحسين، وربما تكشف عن درجة من عدم الرضا أو الحاجة إلى إعادة التقييم الاستراتيجي.

5) أما **المركبة الأسـاسـية الخامسـة(M_5)** ، فقد ظهر تأثيرها الأبرز على المتغير **y_1**(تقييم زيادة الدخل الشـخصـي أو الربح) بتحميل موجب قدره **0.2639**، وعلى **y_7**(التخطيط للاستثمار في تحسين البنية التحتية أو تحسينات تقنية لتعزيز الأداء المالي للمشروع) بتحميل سـالب نسـبيًا قدره **0.4953**−، وكذلك على **y_3**(الرغبة في مشـاركة التجارب) بتحميل − **0.4355**.هذا التوزيع يشـير إلى بعد مركب يتأرجح بين تقييم الربح الفردي والتردد في المشـاركة أو التخطيط طويل الأمد، ما قد يعكس **بُعداً تنافسـياً فردياً** أو **تحفظاً في مشـاركة المعرفة والتخطيط الجماعي**، ويمثل توجهاً نحو التركيز على المكاسـب الفردية أكثر من التشاركية أو التطوير الجماعي.

لكي نتفادى الازدواج الخطي في تطبيق نماذج بانل الثلاث (اذا طُبقت فقط على المركبات الأسـاسـية الفئوية للمحور الاجتماعي فقط) لجأنا الى الاعتماد على المركبة الأسـاسـية الأولى في المحور الاجتماعي كمتغير تابع في نماذج بانل الثلاث والمركبات الأسـاسـية الخمس في المحور المالي كمتغيرات مستقلة

المتغير	الوصف
D1	المركبة الأساسية الأولى للمحور الاجتماعي، وتمثل **تأثير المشروع اجتماعيًا**.
M_1	المركبة المالية الأولى، وتمثل **الربح، الاستدامة، والاستثمار**.
M_2	المركبة المالية الثانية، وتشير إلى **المشاركة المجتمعية ونقل الخبرات**.
M_3	المركبة المالية الثالثة، وتمثل **التوسع والنجاح الاستراتيجي للمشروع**.
M_4	المركبة المالية الرابعة، وتعكس **النقد والتحليل الاستراتيجي للأداء المالي**.
M_5	مركبة إضافية، تمثل **الاستراتيجيات المتبعة لتحسين الأداء المالي**.

فكانت النتائج بالشكل التالي:

النموذج التجميعي:

المتغير المستقل	التقدير (Estimate)	الخطأ المعياري (Std. Error)	قيمة t (t-value)	القيمة الاحتمالية (p-value)	الدلالة الإحصائية
(الثابت)	-1.145e-17	0.05817	0.000	1.00000	لا توجد
M_1	0.7298	0.05817	12.546	< 2e-16	مرتفعة جداً ***
M_2	0.07628	0.05817	1.311	0.19346	غير دالة
M_3	0.3764	0.05817	6.471	6.92e-09	مرتفعة جداً ***
M_4	-0.1853	0.05817	-3.185	0.00206	دالة **
M_5	0.1072	0.05817	1.843	0.06894	شبه دالة .

تفسير علمي للعلاقة بين البُعد الاجتماعي والبُعد المالي للمشاريع:

تشـــير نتائج تحليل الانحدار إلى وجود علاقة قوية بين البُعد الاجتماعي الممثل في المركبة الأساسية الأولىD1 وبعض الأبعاد المالية الأساسية فقد تبين أن **المركبة المالية الأولى**M_1 التي تمثل الجوانب المالية والاستثمارية للمشروع أي تقييم الربح واستدامة المشروع والتوجه الاستثماري، تُعد العامل الأهم والأكثر تأثيراً على البعد الاجتماعي، حيث كانت معاملتها في النموذج **موجبة ودالة إحصائياً بشكل قوي**

($\beta = 0.7298$, $p < 0.001$). هذا يعكس أن المشـــاركين الذين يولون أهمية للربح والاستدامة والتطوير المالي لمشروعاتهم، غالباً ما يكون لمشروعاتهم أثر اجتماعي إيجابي، خاصة في تحسين رفاه المجتمع وزيادة التوظيف.

أما **المركبة الثالثة** M_3 التي ترتبط بالتوسع والنجاح الاستراتيجي، فقد أظهرت أيضاً تأثيراً إيجابياً واضـحاً ودالاً على البعد الاجتماعي**($\beta = 0.3764$, $p < 0.001$)** ، مما يدل على أن نجاح المشـــاريع ونموها يرتبط ارتباطاً وثيقاً بتأثيرها الاجتماعي، ربما من خلال زيادة فرص العمل أو تقديم نماذج ملهمة للآخرين.

من ناحية أخرى، نجد أن **المركبة الرابعة** M_4، التي تعكس بعداً نقدياً تقويمي تجاه الأداء المالي، لها تأثير **سلبي ودال** على البعد الاجتماعي

$(\beta = -0.1853,\ p = 0.002)$. يمكن تفسير هذا الأثر بأن التقييم النقدي المفرط قد يرتبط بعدم الرضا أو الإحباط المالي، مما قد يقلل من الحماس للمشاركة المجتمعية أو التأثير الاجتماعي الإيجابي.

أما المركبتان الثانية M_2 والخامسة M_5، واللتان تمثلان أبعاداً معرفية واستراتيجية، فلم يكن تأثيرهما دالاً إحصائياً بشكل واضح، رغم اقتراب y5 من الدلالة $(p = 0.068)$. قد يشير ذلك إلى أن التأثير الاجتماعي للمشروع لا يتأثر مباشرة بالإستراتيجيات النظرية أو برغبة المشاركة فحسب، بل يعتمد أكثر على التطبيق العملي والاستدامة والنجاح الحقيقي للمشروع.

تُظهر النتائج أن المشاريع التي تركز على **الربحية والاستدامة والتوسع** ترتبط ارتباطاً إيجابياً وقوياً بتحقيق الأثر الاجتماعي، بينما **التحليل النقدي للأداء المالي** قد يحمل تأثيراً سلبياً على ذلك الأثر. وهذا يعزز من أهمية دعم رواد الأعمال لتحقيق استقرار مالي حقيقي واستراتيجي لمشروعاتهم بهدف تعظيم العائد الاجتماعي للمجتمع المحلي.

$$D_1 = 0.7298 \cdot M_1 + 0.0763 \cdot M_2 + 0.3764 \cdot M_3 - 0.1853 \cdot M_4 + 0.1072 \cdot M_5 + \varepsilon$$

مقياس جودة النموذج:

المؤشر	القيمة	التفسير
R-squared	0.7259	**72.6%** يشير إلى أن النموذج يفسّر حوالي **من التباين** في المتغير التابع. هذا يعني أن المتغيرات المستقلة الخمسة تفسّر جزءًا كبيرًا من السلوك الكلي للمتغير التابع.
Adjusted R-squared	0.7090	يمثل النسبة المعدلة التي تأخذ في الاعتبار **عدد المتغيرات المستقلة**، مما يجعلها مؤشرًا أكثر دقة للمقارنة بين نماذج مختلفة. تعني هذه القيمة أن حوالي **70.9%** من التباين مفسر بعد ضبط النموذج لتعقيده.
Residual Std. Error	0.5426	هو **الخطأ المعياري لبواقي النموذج** (أي متوسط المسافة بين القيم الحقيقية والمتوقعة)، وكلما كانت هذه القيمة أصغر كان النموذج أكثر دقة.
F-statistic (5, 81 df)	42.91	تختبر ما إذا كان النموذج ككل معنويًا، أي أن هن F إحصائية

1- نموذج التأثيرات الثابتة:

المتغير المستقل	التقدير (Estimate)	الخطأ المعياري (Std. Error)	قيمة t (t-value)	القيمة الاحتمالية (p-value)	الدلالة الإحصائية
(الثابت)	-1.145e-17	0.05817	0.000	1.00000	لا توجد
y	0.7179	0.05810	12.3577	< 2e-16	*** مرتفعة جداً
y2	0.0810	0.05781	1.4018	0.16488	غير دالة

مرتفعة *** جداً	9.49e-09	6.4172	0.05858	0.3759	y3
دالة **	0.00152	-3.2862	0.05776	-0.1898	y4
شبه دالة .	0.07611	1.7973	0.05862	0.1054	y5

النتيجة:

تشـــير نتائج تحليل الانحدار إلى وجود علاقة قوية بين **البُعد الاجتماعي**)الممثل في **المركبة الأساسية الأولى (D1** وبعض **الأبعاد المالية** المستخلصة من **التحليل المكوني الأساسي.**

فقد تبين أن **المركبة المالية الأولى M_1** ، التي تمثل **الجوانب المالية والاستثمارية للمشروع** مثل تقييم الربح، اســتدامة المشــروع، والتوجه الاســتثماري، تُعد **العامل الأهم والأكثر تأثيراً على البُعد الاجتماعي**، حيث كانت معاملتها في النموذج **موجبة ودالة إحصـــائياً بشـــكل قوي (β = 0.7179, p < 0.001).**

هذا يعكس أن المشاركين الذين يولون أهمية للربح والاستدامة والتطوير المالي لمشروعاتهم، غالباً ما يكون لمشروعاتهم **أثر اجتماعي إيجابي**، خاصة في تحسين **رفاه المجتمع وزيادة التوظيف.**

أما **المركبة الثالثة M_3** ، التي ترتبط بـــ **التوسع والنجاح الاستراتيجي**، فقد أظهرت أيضاً **تأثيراً إيـــجـــابـــيـــاً واضـــــحـــاً ودالاً** عـــلـــى الـــبُـــعـــد الاجـــتـــمـــاعـــي **(β = 0.3759, p < 0.001)**،مما يدل على أن **نجاح المشـــاريع ونموها** يرتبط ارتباطاً وثيقاً بتأثيرها الاجتماعي، ربما من خلال **زيادة فرص العمل أو تقديم نماذج ملهمة** للآخرين.

من نـاحيـة أخرى، نجد أن **المركبـة الرابعـة M_4** ، التي تعكس **بعداً نقدياً تقويمياً تجاه الأداء الـــمـــالـــي**، لـــهـــا **تـــأثـــيـــر ســـــلـــبـــي ودال** عـــلـــى الـــبُـــعـــد الاجـــتـــمـــاعـــي **(β = −0.1898, p = 0.002).** يمكن تفســير هذا الأثر بأن **التقييم النقدي المفرط** قد يرتبط بعدم الرضـــا أو الإحباط المالي، مما قد يقلل من الحماس للمشـــاركة المجتمعية أو **التأثير الاجتماعي الإيجابي.**

أما **المركبتان الثانية M_2 والخامســة M_5** ، اللتان تمثلان **أبعاداً معرفية واســتراتيجية**، فلم يكن تـــأثـــيـــرهـــمـــا **دالاً إحصـــــائـــيـــاً بشـــــكـــل واضـــــح،** رغـــم اقـــتـــراب قـــيـــمـــة M_5 مـــن الـــدلالـــة **(p = 0.076).** قد يشـير ذلك إلى أن التأثير الاجتماعي للمشـروع **لا يتأثر مباشـرةً بالاسـتراتيجيات النظرية أو**

برغبة المشـــــاركة فقط، بل يعتمد أكثر على **التطبيق العملي، والاســـــتدامة، والنجاح الحقيقي** للمشروع.

$$D_1 = 0.7179 \cdot M_1 + 0.0810 \cdot M_2 + 0.3759 \cdot M_3 - 0.1898 \cdot M_4 + 0.1054 \cdot M_5 + \varepsilon$$

المؤشر	القيمة	التفسير
R-Squared	0.727	النموذج يفسّر حوالي 72.7% من التباين في المتغير التابع (D_1).
Adjusted R-Squared	0.703	النسبة المعدلة التي تأخذ في الاعتبار عدد المتغيرات المستقلة.
F-statistic	42.13 ($p < 0.001$)	إحصائية F تشير إلى أن النموذج ككل معنوي بدرجة عالية.
Total Sum of Squares	83.849	مجموع التباين الكلي في المتغير التابع (قبل التفسير).
Residual Sum of Squares	22.871	الجزء غير المفسَّر من التباين بواسطة النموذج.

المفاضلة بين نموذجي والتأثيرات الثابتة:

الاختبار	القيمة الإحصائية	درجات الحرية	القيمة الاحتمالية (p-value)	التفسير
اختبار فيشر للتأثيرات الفردية	1.6834	df1 = 2, df2 = 79	0.1923	لا توجد أدلة كافية لرفض الفرضية الصفرية، مما يعني أن التأثيرات الفردية ليست معنوية إحصائياً.

القيمة الاحتمالية (p–value) أكبر من 0.05، مما يدل على عدم وجود تأثيرات فردية معنوية، وبالتالي لا داعي لتفضيل نموذج التأثيرات الثابتة على نموذج التجميع (Pooling) في هذه الحالة.

النتائج والتوصيات:

تمكّن البحث من دراســـــة أعمق لبيانات مقاســـــة بمقياس ليكرت عبر تحويلها إلى بيانات كمية باستخدام تقنية المركبات الأساسية الفئوية(CATPCA) ، مما أتاح تحليلًا دقيقًا باستخدام نماذج بانل المختلفة. أظهرت النتائج أن النموذج التجميعي هو الأنســـب لتمثيل الفروقات بين المشـــاريع عبر الزمن. كما كشـفت النتائج عن علاقة إيجابية قوية بين البعد الاجتماعي للمشـاريع والجوانب المالية المرتبطة بالربح والاسـتدامة والتوسـع الاسـتراتيجي، في حين كان للتقييم النقدي المالي أثر سـلبي على الأثر الاجتماعي. بناءً على ذلك، يُوصـى بدعم المشـاريع الصـغيرة لتحقيق اسـتدامة مالية وتوسّع مدروس لتعظيم تأثيرها الاجتماعي.

المراجع:

1. Marie¨lle Linting and Jacqueline J. Meulman, Patrick J. F. Groenen, Anita J. van der Kooij ,2007,**Nonlinear Principal Components Analysis**.

2. Marica Manisera, Elise Dusseldorp,2010, **Identifying the component structure of job satisfaction by categorical principal components analysis** Università degli Studi di Brescia, Leiden University.
3. Gifi, A. (1990). Nonlinear Multivariate Analysis. John Wiley & Sons.Kemalbay
4. Peter G. M. van der Heijden, Stef van Buuren,2016**, Looking Back at the Gifi System of Nonlinear Multivariate Analysis**, Utrecht University University of Southampton, Utrecht University TNO Leiden.
5. Linting, M., Meulman, J. J., Groenen, P. J. F., & Van der Kooij, A. J. (2007). Nonlinear principal components analysis: introduction and application. Psychological Methods
6. Mair, P., & De Leeuw, J. (2010). A general framework for multivariate analysis with optimal scaling: The R package aspect. Journal of Statistical Software

7. Eom T, Lee S, and Xu H. 2017_Introduction to Panel **Data Analysis Concepts and Practices** , Hanyang

8. بدراوي شهيناز .2015 _ **تأثير أنظمة سعر الصرف على النمو الاقتصادي في البلدان النامية ، دراسة قياسية باستخدام البيانات الطولية (Panel Data)لعينة من 18 دولة نامية 2012– 1980** ، أطروحة دكتوراه ، كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية ، جامعة أبي بكر بلقايد، تلمسان.

9. **بوتياح وليد ، 2007 _ دراسة مقارنة لدوال الاستثمار في البلدان** المغاربية . **رسالة ماجستير في العلوم الاقتصادية ،جامعة الجزائر.**

10. **الجمال** زكريا يحيى، 2012 – اختيار النموذج في نماذج البيانات **الطولية** الثابتة والعشوائية، المجلة العراقية للعلوم الاحصائية ، العدد 21.

11. Oscar Torres-Reyna . 2010_ **Getting Started in Fixed/Random Effects Models using R**,Princeton University

12. العبدلي عابد ، 2010 _ محددات **التجارة** البيئية للدول الاسلامية باستخدام منهج تحليل بانل . مجلة دراسات اقتصادية اسلامية ، المعهد الاسلامي للعهود والتدريب ، البنك الاسلامي للتنمية جدة .

13. Hsio ,C, **Analysis of Panel Data,** Univesity of southern California .2003
14. Hsio, C.,2003- **Analysis of Panel Data.** Combridge University Press Cambridge
15. Fitzmaurice, Garrett M.; Larid, Nan M.; Ware, James H .,2004 _ **Applied longitudinal Analysis**. Hoboken:John Wiley & sons.

الحل العددي لمعادلة Fokker–Planck باستخدام طريقة العناصر الحدية (BEM)

أ. د برلنت مطيط[1]

براءة حسان الخالد[2]

ملخص:

تم في هذه المقالة إيجاد الحلول العددية لمعادلة Fokker–Planck الخطية في بعدين باستخدام طريقة العناصر الحدية (Boundary Element Method – BEM).

تعتمد هذه الطريقة على تقسيم حدود المنطقة المدروسة دون الحاجة إلى تقطيع المساحة الداخلية بالكامل، مما يوفر حسابات وتعد هذه الطريقة أكثر كفاءة في بعض الحالات مقارنة بتقنيات عددية مثل طريقة العناصر المنتهية (Finite Element Method – FEM).

يتم دراسة فعالية الطريقة لإيجاد الحلول التقريبية من خلال تطبيقها على معادلة Fokker–Planck وباستخدام برنامج Matlab النسخة R2019a.

الكلمات المفتاحية:

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية، معادلة Fokker–Planck الخطية، طريقة العناصر الحدية، معادلة تكاملية، دوال الاختبار، شروط ديرخليه الحدية، شروط نيومن الحدية، دالة غرين.

[1] عضو هيئة تدريسية في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق.

[2] طالبة ماجستير، تحليل عددي – قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق.

Numerical Solution for Fokker-Planck Equation by Using Boundary Element Method (BEM).

Dr. Berlant Sabri Mattit

Baraa Hassan Alkhaled

Abstract

In this article, a study is presented on the numerical solutions of the linear Fokker-Planck equation in two dimensions using the Boundary Element Method (BEM).

This method relies on analyzing the boundaries of the studied region without the need to discretize the entire internal area, which can offer more efficient computations in some cases compared to techniques like the Finite Element Method (FEM).

The effectiveness of the method in finding approximate solutions is demonstrated by applying it to the Fokker-Planck equation and apply it in the MATLAB program R2019a.

Key words: Partial differential equations, linear Fokker-Planck Equation, boundary element method, integral equation, shape function, Dirichlet boundary conditions, Neumann boundary conditions, Green's function.

1. مقدمة:

تظهر المعادلات التفاضلية الجزئية في كثير من التطبيقات في العلوم والهندسة، ان الحلول التحليلية عادة ما يكون من الصعب إيجادها، وبالتالي يتم استخدام طرائق بديلة كالطرائق العددية التي تستخدم على نطاق واسع لحل المعادلات التفاضلية الجزئية داخل منطقة معطاة وضمن شروط حدية.

تُعد معادلة Fokker–Planck من المعادلات التفاضلية الجزئية الهامة، والتي تظهر في العديد من التطبيقات الفيزيائية، مثل الديناميكا الحرارية، ميكانيكا السوائل، ونمذجة الأسواق المالية. تتطلب هذه المعادلة حلولاً عددية نظراً لتعقيدها وصعوبة إيجاد الحلول التحليلية. لذا تعتبر الطريقة العددية باستخدام العناصر الحدية إحدى الطرائق الفعالة للحصول على الحلول التقريبية لهذه المعادلة.

طريقة العناصر الحدية: هي طريقة أساسية لإيجاد الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية الجزئية المعرفة على منطقة وتتضمن الخطوات التالية:

1- تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة تكاملية: تحويل معادلة Fokker–Planck (أو أي معادلة تفاضلية أُخرى) إلى صيغة تكاملية باستخدام مبرهنة غرين أو طرائق تكاملية أُخرى.
2- تجزئة الحدود: تقسيم الحدود الخارجية للمنطقة المدروسة إلى عناصر صغيرة segments في حالة البعدين أو panels في حالة ثلاثة أبعاد.
3- إيجاد دوال الاختبار: والتي تمثل الحل التقريبي على كل عنصر حدي.
4- تطبيق الشروط الحدية (مثل شروط ديرخليه، أو نيومن) ضمن الصيغة التكاملية.
5- إنشاء الجملة الخطية: تجميع المعادلات التكاملية على كل عنصر حدي في جملة جبرية خطية تمثل العلاقة بين القيم على الحدود.
6- حل الجملة الجبرية باستخدام الطرائق العددية المناسبة والحصول على القيم المطلوبة على الحدود.

7- حساب القيم الداخلية (إن لزم الأمر): إذا كان مطلوباً، يتم حساب القيم داخل المنطقة باستخدام الحلول الحدية التي تم إيجادها.

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى تطبيق طريقة العناصر الحدية على معادلة Fokker–Planck الخطية في بعدين مع معالجة الشروط الحدية المختلفة وتقديم النتائج في سياق التحليل العددي.

3. مواد وطرائق البحث:

اعتمد البحث على الدراسة العددية لمعادلة Fokker–Planck الخطية في بعدين، وتم استخدام برنامج Matlab النسخة R2019a لإيجاد الحلول العددية برمجياً.

4. المناقشة:

1. صياغة المسألة: في البداية تكون لدينا معادلة تفاضلية جزئية تصف المسألة الفيزيائية التي نريد حلها. ونفترض أن الحدود Γ المحيطة بالمنطقة Ω يمكن أن تكون معرفة بشرط ديرخليه (بإعطاء قيمة حدية لـ $u(x)$) أو بشرط نيومن (بإعطاء قيمة حدية لـ $\frac{\partial u(x)}{\partial n}$).
2. تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة تكاملية باستخدام نظرية غرين ومعادلة غرين.
3. تجزئة الحدود إلى عناصر: نقوم بتقسيم الحدود Γ إلى عدد محدد من العناصر الحدية الصغيرة. عادةً ما تكون هذه العناصر هي أجزاء خطية صغيرة في بعدين، أو أجزاء من منحنيات في ثلاثة أبعاد.
4. التعبير عن المتغيرات على الحدود باستخدام دوال الاختبار (shape functions).
5. صياغة الجملة الخطية: نحصل على مجموعة من المعادلات الخطية. كل معادلة تأتي من تطبيق المعادلة التكاملية في عقدة معينة على الحدود.

6. تطبيق الشروط الحدية: نطبق الشروط الحدية على العقد، الشروط الحدية تساعد في تحديد القيم المجهولة مما يسمح لنا بحل الجملة الخطية المتبقية.
7. حل الجملة الخطية: بعد تطبيق الشروط الحدية نحصل على جملة خطية يمكن حلها باستخدام تقنيات الجبر الخطي.
8. حساب القيم الداخلية المطلوبة: يمكننا الآن استخدام القيم التي حصلنا عليها لحساب كميات أخرى ذات أهمية داخل المنطقة Ω، مثل توزيع الإجهادات أو الحرارة أو غيرها من الكميات الفيزيائية. إذا كانت هناك حاجة لحساب القيم داخل المجال (وليس فقط على الحدود)، يمكننا استخدام الحلول الحدية الموجودة لحساب هذه القيم باستخدام معادلات تكاملية إضافية.

5. طريقة العناصر الحدية في معادلة Fokker–Planck الخطية في بعدين:

لحل معادلة Fokker–Planck الخطية في بعدين باستخدام طريقة العناصر الحدية سنتبع الخطوات التي ذكرناها سابقاً. الهدف هو تحويل معادلة Fokker–Planck الجزئية إلى معادلة تكاملية يمكن حلها باستخدام BEM.

1. صياغة معادلة Fokker–Planck:

معادلة Fokker–Planck في بعدين تكتب بالشكل:

$$\frac{\partial \mathrm{P(x,y,t)}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[A_x(x,y)P(x,y,t)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[A_y(x,y)P(x,y,t)\right] + D_x\frac{\partial^2 \mathrm{P(x,y,t)}}{\partial x^2} + D_y\frac{\partial^2 \mathrm{P(x,y,t)}}{\partial y^2}$$

حيث: $P(x,y,t)$ هي كثافة الاحتمال، $A_x(x,y)$ و $A_y(x,y)$ هي معاملات الانجراف (drift) في الاتجاهين x و y على التوالي.

D_x و D_y هي معاملات الانتشار (الضوضاء) في الاتجاهين x و y على التوالي.

2. تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة تكاملية باستخدام دالة غرين:

المعادلة التكاملية تكون على الشكل:

$$P(x,y,t) = \int_{\Omega} G(x,y,t|x',y',t')\mathrm{P}(x',y',t')dx'dy' + \int_{\Gamma} [\, P(\xi,\eta,t')\frac{\partial G(x,y,t|\xi,\eta,t')}{\partial n} - q(\xi,\eta,t')G(x,y,t|\xi,\eta,t')]d\Gamma$$

حيث: Ω هي المنطقة الداخلية التي ندرسها.

Γ هي الحدود المحيطة بالمنطقة Ω.

$G(x,y,t|x',y',t')$ هي دالة غرين.

$\frac{\partial G(x,y,t|\xi,\eta,t')}{\partial n}$ هو مشتق دالة غرين في الاتجاه الناظمي للحدود.

$q(\xi,\eta,t') = \frac{\partial p(\xi,\eta,t')}{\partial n}$ هو مشتق معادلة Fokker–Planck (التدفق عبر الحدود).

3. تجزئة الحدود إلى عناصر:

نقسم الحدود Γ إلى عدد محدد من العناصر الحدية الصغيرة. نفترض أن الحدود Γ تتكون من N عنصر، حيث نقوم بحساب القيم عند العقد.

4. التعبير عن المتغيرات باستخدام دوال الاختبار:

نعبر عن $P(\xi,\eta,t)$ و $q(\xi,\eta,t)$ باستخدام دوال اختبار في العقد:

$$P(\xi,\eta,t) \approx \sum_{j=1}^{N} P_j(t) N_j(\xi,\eta)$$

$$q(\xi,\eta,t) \approx \sum_{j=1}^{N} q_j(t) N_j(\xi,\eta)$$

حيث: $P_j(t)$ و $q_j(t)$ هما القيم عند العقدة j، و $N_j(\xi,\eta)$ هي دالة الاختبار للعقدة j.

5. صياغة الجملة الخطية:

عند إدخال التقريب في المعادلة التكاملية، نحصل على جملة خطية من المعادلات لكل عقدة على الحدود. كل معادلة تمثل تأثير كل عقدة على باقي العقد.

نحصل على جملة من المعادلات الخطية: $Gq(t) = HP(t)$

حيث H وG هما مصفوفتان تحتويان على القيم الناتجة من التكاملات المتعلقة بالعناصر الحدية.P(t) وq(t) هما متجهان للقيم المجهولة عند العقد على الحدود.

6. تطبيق الشروط الحدية:

نطبق الشروط الحدية (قيم $P(x,y,t)$ أو التدفق $q(x,y,t)$) على الحدود. عند معرفة القيم على بعض الحدود، يمكن استخدام هذه الشروط لتحديد المجاهيل وحل الجملة الخطية.

7. حل الجملة الخطية:

نقــوم بحــل الجملــة الخطيــة الناتجــة باســتخدام تقنيــات الجبــر الخطــي، مثــل طريقــة غاوس أو طرائق التكرار.

8. حساب القيم الداخلية المطلوبة:

بعــد حــل الجملــة الخطيــة والحصــول علــى القــيم الحديــة $P_j(t)$ و $q_j(t)$ يمكــن حساب القيم داخل المنطقة Ω باستخدام معادلة تكاملية إضافية:

$$P(x,y,t) = \int_{\Gamma} [P(\xi,\eta,t')\frac{\partial G(x,y,t|\xi,\eta,t')}{\partial n} - q(\xi,\eta,t')G(x,y,t|\xi,\eta,t')]d\Gamma$$

6. **مثال (1):** لنفترض أن لدينا مستطيلاً يمثل المجال Ω مستطيل (من $x = 0$ إلى $x = 2$، ومن $y = 0$ إلى $y = 1$) بحدودΓ حيث نريد حل معادلة Fokker–Planck الخطية في بعدين.

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{\partial \mathrm{P(x,y,t)}}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 \mathrm{P(x,y,t)}}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \mathrm{P(x,y,t)}}{\partial y^2}$$

حيث افترضنا أن معاملات الانجراف$A_x(x,y)$ و $A_y(x,y)$ تساوي الصفر، وأن معادلة Fokker–Planck تمثل انتشاراً نقياً. Γ هي حدود المستطيل حيث:

عند $x = 0$ و $x = 2$ فإن $P_2(x,y,t) = P_3(x,y,t) = 100$ (شرط ديرخليه درجة حرارة ثابتة).

وعند $y = 0$ و $y = 1$ فإن $P_1(x,y,t) = P_4(x,y,t) = 0$ (شرط ديرخليه تلامس مع سطح بارد).

و معاملات الانتشار $D_x = 0.5$ و $D_y = 0.5$.

نريد إيجاد توزيع كثافة الاحتمال $P(x, y, t)$ داخل هذا المستطيل عند الزمن t.

1. تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة تكاملية:

نبدأ من معادلة Fokker–Planck:

$$\frac{\partial \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{t})}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{t})}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{t})}{\partial y^2}$$

بما أن $A_x(x, y)$ و $A_y(x, y)$ تساوي الصفر، وأن معادلة Fokker–Planck تمثل انتشاراً نقياً، نستخدم دالة غرين $G(x, y, t|x', y', t')$ لحل المعادلة:

$$G(x, y, t|x', y', t') = \frac{1}{4\pi D(t - t')} \exp(-\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{4D(t - t')})$$

حيث $D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$

2. تجزئة الحدود إلى عناصر:

نفترض أن الحدود تم تقسيمها إلى أربعة عناصر:

عنصر 1: من (0,0) إلى (0,1) (الحد اليساري).

عنصر 2: من (0,1) إلى (2,1) (الحد العلوي).

عنصر 3: من (2,1) إلى (2,0) (الحد اليميني).

عنصر 4: من (2,0) إلى (0,0) (الحد السفلي).

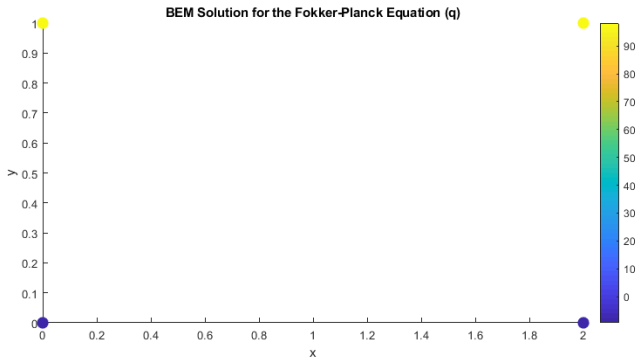
لنستخدم أربع عقد، واحدة عند كل زاوية من زوايا المستطيل:

العقدة 1 (P_1) عند $(0,0)$.

العقدة 2 (P_2) عند $(0,1)$.

العقدة 3 (P_3) عند$(2,1)$.

العقدة 4 (P_4) عند $(2,0)$.



شكل (1): حل معادلة فوكر بلانك باستخدام طريقة العناصر الحدية للمثال (1).

3. صياغة الجملة الخطية:

نستخدم المعادلة التكاملية عند كل عقدة لحساب P و q عند الحدود. على سبيل المثال، عند العقدة 1:

$$P(x,y,t) = \sum_{i=1}^{4} \left[P(x_i,y_i,t) \frac{\partial G(x_1,y_1,t|x_i,y_i)}{\partial n} - q(x_i,y_i,t) G(x_1,y_1,t|x_i,y_i) \right] \Delta\Gamma_i$$

وبما أن $P(x_1, y_1, t) = 0$ (شرط ديرخليه)، نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{4} q(x_i, y_i, t) G(x_1, y_1, t | x_i, y_i) = 0$$

يتم تكرار نفس الحسابات عند العقد 2 و3 و4.

4. حساب دالة غرين لكل عنصر:

عند العقدة P_1 بالنسبة إلى العنصر 2:

$$G(0,0|2,1) = \frac{1}{4\pi * 0.707} \exp\left(-\frac{(0-2)^2 + (0-1)^2}{4 * 0.707}\right)$$

$$G(0,0|2,1) = \frac{1}{4\pi * 0.707} \exp\left(-\frac{5}{2.828}\right) = 0.019$$

عند العقدة P_2 بالنسبة إلى العنصر 1:

$$G(0,1|0,0) = \frac{1}{4\pi * 0.707} \exp\left(-\frac{(0-0)^2 + (1-0)^2}{4 * 0.707}\right)$$

$$G(0,0|2,1) = \frac{1}{4\pi * 0.707} \exp\left(-\frac{1}{2.828}\right) = 0.079$$

يتم حساب باقي القيم بنفس الطريقة.

5. تجميع الجملة الخطية:

بعد حساب قيم دالة غرين لكل عقدة عند كل عنصر، نجمعها في جملة معادلات خطية:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}q_3 + a_{14}q_4 = P_1$$

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}q_3 + a_{24}q_4 = P_2$$

$$a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3 + a_{34}q_4 = P_3$$

$$a_{41}q_1 + a_{42}q_2 + a_{43}q_3 + a_{44}q_4 = P_4$$

حيث a_{ij} هي معاملات مرتبطة بالتكاملات المحسوبة سابقاً.

أي:

$$1q_1 + 0.079q_2 + 0.019q_3 + 0.027q_4 = 0$$

$$0.079q_1 + 1q_2 + 0.027q_3 + 0.019q_4 = 100$$

$$0.019q_1 + 0.027q_2 + 1q_3 + 0.079q_4 = 100$$

$$0.027q_1 + 0.019q_2 + 0.079q_3 + 1q_4 = 0$$

$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 1$ تجنباً للشذوذ والمشكلات العددية المألوفة.

يمكن حل هذه الجملة باستخدام البرمجة أو الجبر الخطي للحصول على قيم q_1 و q_2 و q_3 و q_4. وقد أوجدنا القيم باستخدام Matlab:

$$q_1 = -9.394\,, q_2 = 98.235\,, q_3 = 98.235\,, q_4 = -9.394$$

سوف ندرس الخطأ من خلال قانون المربعات الصغرى: $e = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} R_i^2}$

بعد تعويض q_1 و q_2 و q_3 و q_4 في المعادلات السابقة وتعويض القيم الناتجة في القانون السابق وجدنا أن: $e_1 = 0.0532810995$ التي تعتبر مقبولة بالنسبة لعدد العناصر.

نقدم الآن برنامج Matlab للمثال الموضح أعلاه، حيث نقوم بإدخال جميع المعطيات والأرقام الموضحة في المثال السابق والشروط الحدية المعطاة:

```
% Constants
D = 0.707; % Assuming D_x = D_y = 0.5
t = 1; % Example time point
```

```
% Number of boundary elements (4 corners in this
simple case)
num_elements = 4;
% Define boundary points (corners of the
rectangle)
x_boundary = [0, 0, 2, 2];
y_boundary = [0, 1, 1, 0];
% Initialize the coefficient matrix A and vector b
A = zeros(num_elements);
b = [0; 100; 100; 0]; % Boundary conditions as
given
% Define Green's function for Fokker-Planck in 2D
G = @(x1, y1, x2, y2) (1/(4*pi*D*t)) * exp(-((x1-
x2)^2 + (y1-y2)^2)/(4*D*t));
% Populate matrix A using Green's function
for i = 1:num_elements
    for j = 1:num_elements
        if i == j
            A(i, j) = 1;  % Diagonal elements
(handling singularity)
        else
            A(i, j) = G(x_boundary(i),
y_boundary(i), x_boundary(j), y_boundary(j));
        end
    end
end
% Solve the linear system A*q = b
q = A\b;
 % Display the result
disp('The solution vector q is:');
disp(q);
% Visualization
figure;
scatter(x_boundary, y_boundary, 100, q, 'filled');
colorbar;
title('BEM Solution for the Fokker-Planck Equation
(q)');
```

```
xlabel('x');
ylabel('y');
```

7. مثال (2):

سوف نعيد نفس المثال السابق لكن بمناقشة عدد عناصر أكبر:

سنقوم بتقسيم حدود المستطيل(0,0) إلى (1,2) إلى 16 نقطة متساوية المسافة (12 نقطة مختلفة)

الحافة السفلية: تمتد من النقطة (0,0) إلى النقطة (2,0):

(0,0), (0.0667,0), (0.13333,0), (2,0)

والشروط الحدية المفروضة هي أن القيم على هذه الحافة تساوي0.

الحافة اليمنى: تمتد من النقطة (2,0) إلى النقطة (2,1):

(2,0), (2,0.3333), (2,0.6667), (2,1)

والشروط الحدية المفروضة هي أن القيم تزداد خطياً من 0 إلى 100 على طول هذه الحافة. لذا القيم هي [0, 33.33, 66.67, 100].

الحافة العلوية: تمتد من النقطة (2,1) إلى النقطة (0,1):

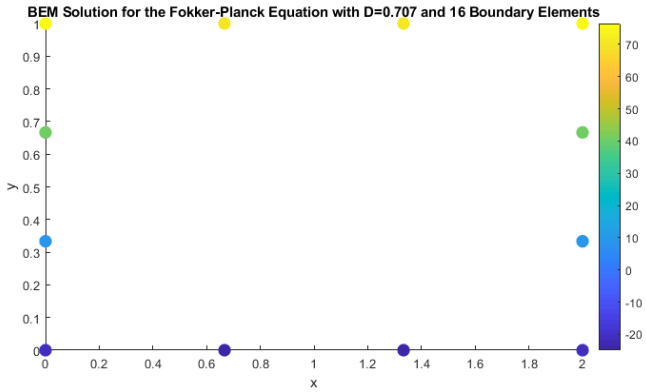
(2,1), (1.3333,1), (0.6667,1), (0,1)

والشروط الحدية المفروضة هي أن القيم على هذه الحافة تساوي100.

الحافة اليسرى: تمتد من النقطة (0,1) إلى النقطة (0,0):

(0,1), (0,0.6667), (0,0.3333), (0,0)

والشروط الحدية المفروضة هي أن القيم تنخفض خطياً من 0 إلى 100 على طول هذه الحافة. لذا القيم هي [100, 66.67, 33.33, 0].



شكل (2): حل معادلة فوكر بلانك باستخدام طريقة العناصر الحدية للمثال (2).

حساب دالة غرين لكل عنصر:

حيث دالة غرين $G(x,y,t|x',y',t')$ لحل المعادلة:

$$A_{ij} = G(x_i, y_i, t|x_j, y_j, t') = \frac{1}{4\pi D(t-t')}\exp\left(-\frac{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}{4D(t-t')}\right)$$

حيث $D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$

لنأخذ مثالاً لحساب العنصر: $(x_2, y_2) = (0.6667,0)$ و $(x_1, y_1) = (0,0)$

$$G(0,0|0.6667,0) = \frac{1}{4\pi * 0.707}\exp\left(-\frac{(0-0.6667)^2 + (0-0)^2}{4 * 0.707}\right)$$
$$= \frac{1}{8.885}e^{-\frac{0.4444}{2.828}} = 0.0961$$

ولحساب العنصر: $(x_4, y_4) = (2,0)$ و $(x_2, y_2) = (0.66667,0)$

$$G(0.6667,0|2,0) = \frac{1}{4\pi * 0.707} exp\left(-\frac{(0.6667-0)^2 + (2-0)^2}{4 * 0.707}\right)$$
$$= \frac{1}{8.885} e^{-\frac{1.7778}{2.828}} = 0.0600$$

ولحساب العنصر: $(x_7, y_7) = (2,0.6667)$ و $(x_3, y_3) = (1.3333,0)$

$$G(1.3333,0|2,0.6667)$$
$$= \frac{1}{4\pi * 0.707} exp\left(-\frac{(2-1.3333)^2 + (0.6667-0)^2}{4 * 0.707}\right)$$
$$= \frac{1}{8.885} e^{-\frac{0.8888}{2.828}} = 0.822$$

ولحساب العنصر: $(x_6, y_6) = (2,0.3333)$ و $(x_4, y_4) = (2,0)$

$$G(2,0|2,0.3333) = \frac{1}{4\pi * 0.707} exp\left(-\frac{(2-2)^2 + (0.3333-0)^2}{4 * 0.707}\right)$$
$$= \frac{1}{8.885} e^{-\frac{0.1111}{2.828}} = 0.1082$$

ونكمل باقي العناصر بنفس الطريقة.

بعد حساب دالة غرين لكل عنصر نحصل على جملة معادلات خطية:

المعادلة الأولى:

$$q_1 + 0.0962q_2 + 0.0600q_3 + 0.0274q_4 + 0.0274q_5 + 0.0263q_6 + 0.0234q_7 + 0.0192q_8 + 0.0192q_9 + 0.0421q_{10} + 0.0675q_{11} + 0.0790q_{12} + 0.0790q_{13} + 0.0962q_{14} + 0.1082q_{15} + 0.1126q_{16} = 0$$

المعادلة الثانية:

$$0.0962q_1 + q_2 + 0.0962q_3 + 0.0600q_4 + 0.0600q_5 + 0.0577q_6 + 0.0513q_7 + 0.0421q_8 + 0.0421q_9 + 0.0675q_{10} + 0.0790q_{11} + 0.0675q_{12} + 0.0675q_{13} + 0.0822q_{14} + 0.0925q_{15} + 0.0962q_{16} = 0$$

المعادلة الثالثة:

$$0.0600q_1 + 0.0962q_2 + q_3 + 0.096q_4 + 0.0962q_5 + 0.0925q_6 + 0.0822q_7 + 0.0675q_8 + 0.0675q_9 + 0.0790q_{10} + 0.0675q_{11} + 0.0421q_{12} + 0.0421q_{13} + 0.0513q_{14} + 0.0577q_{15} + 0.0600q_{16} = 0$$

المعادلة الرابعة:

$$0.0274q_1 + 0.0600q_2 + 0.0962q_3 + q_4 + 0.1126q_5 + 0.1082q_6 + 0.0962q_7 + 0.0790q_8 + 0.0790q_9 + 0.0675q_{10} + 0.0421q_{11} + 0.0192q_{12} + 0.0192q_{13} + 0.0234q_{14} + 0.0263q_{15} + 0.0274q_{16} = 0$$

المعادلة الخامسة:

$$0.0274q_1 + 0.0600q_2 + 0.0962q_3 + 0.1126q_4 + q_5 + 0.1082q_6 + 0.0962q_7 + 0.0790q_8 + 0.0790q_9 + 0.0675q_{10} + 0.0421q_{11} + 0.0192q_{12} + 0.0192q_{13} + 0.0234q_{14} + 0.0263q_{15} + 0.0274q_{16} = 0$$

المعادلة السادسة:

$$0.0263q_1 + 0.0577q_2 + 0.0925q_3 + 0.1082q_4 + 0.1082q_5 + q_6 + 0.1082q_7 + 0.0962q_8 + 0.0962q_9 + 0.0822q_{10} + 0.0513q_{11} + 0.0234q_{12} + 0.0234q_{13} + 0.0263q_{14} + 0.0274q_{15} + 0.0263q_{16} = 33.33$$

المعادلة السابعة:

$$0.0234q_1 + 0.0513q_2 + 0.0822q_3 + 0.0962q_4 + 0.0962q_5 + 0.1082q_6 + q_7 + 0.1082q_8 + 0.1082q_9 + 0.0925q_{10} + 0.0577q_{11} + 0.0263q_{12} + 0.0263q_{13} + 0.0274q_{14} + 0.0263q_{15} + 0.0234q_{16} = 66.67$$

المعادلة الثامنة:

$$0.0192q_1 + 0.0421q_2 + 0.0675q_3 + 0.0790q_4 + 0.0790q_5 + 0.0962q_6 + 0.1082q_7 + q_8 + 0.1126q_9 + 0.0962q_{10} + 0.06000q_{11} + 0.0274q_{12} + 0.0274q_{13} + 0.0263q_{14} + 0.0234q_{15} + 0.0192q_{16} = 100$$

المعادلة التاسعة:

$$0.0192q_1 + 0.0421q_2 + 0.0675q_3 + 0.0790q_4 + 0.0790q_5 + 0.0962q_6 + 0.1082q_7 + 0.1126q_8 + q_9 + 0.0962q_{10} + 0.0600q_{11} + 0.0274q_{12} + 0.0274q_{13} + 0.0263q_{14} + 0.0234q_{15} + 0.0192q_{16} = 100$$

المعادلة العاشرة:

$$0.0421q_1 + 0.0675q_2 + 0.0790q_3 + 0.0675q_4 + 0.0675q_5 + 0.0822q_6 + 0.0925q_7 + 0.0962q_8 + 0.0962q_9 + q_{10} + 0.0962q_{11} + 0.0600q_{12} + 0.0600q_{13} + 0.0577q_{14} + 0.0513q_{15} + 0.0421q_{16} = 100$$

المعادلة الحادية عشرة:

$$0.0675q_1 + 0.0790q_2 + 0.0675q_3 + 0.0421q_4 + 0.0421q_5 + 0.0513q_6 + 0.0577q_7 + 0.0600q_8 + 0.0600q_9 + 0.0962q_{10} + q_{11} + 0.0962q_{12} + 0.0962q_{13} + 0.0925q_{14} + 0.0822q_{15} + 0.0675q_{16} = 100$$

المعادلة الثانية عشرة:

$$0.0790q_1 + 0.0675q_2 + 0.0421q_3 + 0.0192q_4 + 0.0192q_5 + 0.0234q_6 + 0.0263q_7 + 0.0274q_8 + 0.0274q_9 + 0.0600q_{10} + 0.0962q_{11} + q_{12} + 0.1126q_{13} + 0.1082q_{14} + 0.0962q_{15} + 0.0790q_{16} = 100$$

المعادلة الثالثة عشرة:

$$0.0790q_1 + 0.0675q_2 + 0.0421q_3 + 0.0192q_4 + 0.0192q_5 + 0.0234q_6 + 0.0263q_7 + 0.0274q_8 + 0.0274q_9 + 0.0600q_{10} + 00962q_{11} + 0.1126q_{12} + q_{13} + 0.1082q_{14} + 0.0962q_{15} + 0.0790q_{16} = 100$$

المعادلة الرابعة عشرة:

$$0.0962q_1 + 0.0822q_2 + 0.0513q_3 + 0.0234q_4 + 0.0234q_5 + 0.0263q_6 + 0.0274q_7 + 0.0263q_8 + 0.0263q_9 + 0.0577q_{10} + 0.0925q_{11} + 0.1082q_{12} + 0.1082q_{13} + q_{14} + 0.1082q_{15} + 0.0962q_{16} = 66.67$$

المعادلة الخامسة عشرة:

$$0.1082q_1 + 0.925q_2 + 0.0577q_3 + 0.0263q_4 + 0.026q_5 + 0.0274q_6 + 0.0263q_7 + 0.0234q_8 + 0.0234q_9 + 0.0513q_{10} + 0.0822q_{11} + 0.0962q_{12} + 0.0962q_{13} + 0.1082q_{14} + q_{15} + 0.1082q_{16} = 33.33$$

المعادلة السادسة عشرة:

$$0.1126q_1 + 0.0962q_2 + 0.0600q_3 + 0.0274q_4 + 0.0274q_5 + 0.0263q_6 + 0.0234q_7 + 0.0192q_8 + 0.0192q_9 + 0.0421q_{10} + 0.0675q_{11} + 0.0790q_{12} + 0.0790q_{13} + 0.0962q_{14} + 0.1082q_{15} + q_{16} = 0$$

يمكن حل هذه الجملة باستخدام البرمجة للحصول على قيم q_1 و q_2 و q_3 و q_4 و q_5 و q_6 و q_7 و q_8 و q_9 و q_{10} و q_{11} و q_{12} و q_{13} و q_{14} و q_{15} و q_{16}. وقد أوجدنا القيم باستخدام Matlab:

$$q_1 = -21.4750\,, q_2 = -24.9202\,, q_3 = -24.9202\,, q_4 = -21.4750\,, q_5 = -21.4750\,, q_6 = 9.3386\,, q_7 = 41.6115\,, q_8 = 76.4767\,, q_9 = 76.4767, q_{10} = 70.2191\,, q_{11} = 70.2191\,, q_{12} = 76.4767, q_{13} = 76.4767\,, q_{14} = 41.6115\,, q_{15} = 9.3386\,, q_{16} = -21.4750$$

سوف ندرس الخطأ من خلال قانون المربعات الصغرى: $e = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} R_i^2}$

بعد تعويض q_1 و q_2 و q_3 و q_4 و q_5 و q_6 و q_7 و q_8 و q_9 و q_{10} و q_{11} و q_{12} و q_{13} و q_{14} و q_{15} و q_{16} في المعادلات السابقة وتعويض القيم الناتجة في القانون السابق وجدنا أن: $e_2 = 0.0478539445$ ونلاحظ أن الخطأ يتناقص كلما زاد عدد العناصر.

نقدم الآن برنامج Matlab للمثال الموضح أعلاه، حيث نقوم بإدخال جميع المعطيات والأرقام الموضحة في المثال السابق والشروط الحدية المعطاة:

```
% Constants
D = 0.707; % Diffusion coefficient
t = 1;     % Time point
% Number of boundary elements
```

```
num_elements = 16;
% Define boundary points (4 points on each edge of
the rectangle)
% Here we use 4 points per edge to total 16 points
num_points_edge = 4; % Number of points per edge
 % Define x and y boundary coordinates
x_boundary = [linspace(0, 2, num_points_edge), ...
              2*ones(1, num_points_edge), ...
              linspace(2, 0, num_points_edge), ...
              zeros(1, num_points_edge)];
 y_boundary = [zeros(1, num_points_edge), ...
              linspace(0, 1, num_points_edge), ...
              ones(1, num_points_edge), ...
              linspace(1, 0, num_points_edge)];
 % Check if the lengths are correct
if length(x_boundary) ~= num_elements ||
length(y_boundary) ~= num_elements
    error('The length of x_boundary or y_boundary
does not match num_elements.');
end
 % Initialize the coefficient matrix A and vector
b
A = zeros(num_elements);
b = zeros(num_elements, 1);
 % Set boundary conditions:
% Bottom edge: P = 0
% Right edge: P varies linearly from 0 to 100
% Top edge: P = 100
% Left edge: P varies linearly from 100 to 0
b(1:num_points_edge) = 0; % Bottom edge
b(num_points_edge+1:2*num_points_edge) =
linspace(0, 100, num_points_edge); % Right edge
b(2*num_points_edge+1:3*num_points_edge) = 100; %
Top edge
b(3*num_points_edge+1:end) = linspace(100, 0,
num_points_edge); % Left edge
 % Define Green's function for Fokker-Planck in 2D
```

```
G = @(x1, y1, x2, y2) (1/(4*pi*D*t)) * exp(-((x1-
x2)^2 + (y1-y2)^2)/(4*D*t));
 % Populate matrix A using Green's function
for i = 1:num_elements
    for j = 1:num_elements
        if i == j
            A(i, j) = 1;  % Handling diagonal
elements (self-interaction)
        else
            A(i, j) = G(x_boundary(i),
y_boundary(i), x_boundary(j), y_boundary(j));
        end
    end
end
 % Solve the linear system A*q = b
q = A\b;
 % Display the result
disp('The solution vector q is:');
disp(q);
 % Visualization
figure;
scatter(x_boundary, y_boundary, 100, q, 'filled');
colorbar;
title('BEM Solution for the Fokker-Planck Equation
with D=0.707 and 16 Boundary Elements');
xlabel('x');
ylabel('y');
```

8. النتائج ومناقشتها:

لقد قمنا في هذه المقالة ببناء خوارزمية لحل معادلة Fokker–Planck الخطية في بعدين باستخدام طريقة العناصر الحدية BEM، وهذه الطريقة تعتبر طريقة فعالة وذلك لأنها قادرة على حل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية، وخاصة إن لم يتوفر الحل التحليلي لها، وكما لاحظنا أنه كلما زاد عدد العناصر أصبحت الطريقة أدق، ومن هنا نرى أهمية الطرائق التقريبية التحليلية وقدرتها على حل

أصعب المسائل وفعاليتها ودقتها العالية كما لاحظنا في الدراسة العددية، علماً أن النتائج السابقة قد تمت جميعها باستخدام برنامج Matlab النسخة R2019a.

9. الاستنتاجات والتوصيات:

بالرغم من فعالية النتائج العددية السابقة، إلا أن خطوات طريقة العناصر الحدية تأخذ كثيراً من الوقت فكلما زاد عدد العناصر كلما اقتربنا من الحل الدقيق أكثر، وتزداد صعوبة هذا النوع من المسائل إذا كان الشكل أكثر تعقيداً وكانت الشروط الحديّة معقدة أكثر ومطبقة على عدد أكبر من الأضلاع، أو زاد عدد الثوابت غير المعدومة في صيغة المعادلة التفاضلية الجزئية، وهذه الأمور كلها سنقوم بتغطيتها في مقالاتنا القادمة إن شاء الله.

10. قائمة المراجع: References

[1] ALIPOUR, P. 2024- **The Dual Reciprocity Boundary Elements Method for One-Demensional Nonlinear Parabolic Partial Differential Equations**. J Math Sci 280, 131-145.

[2] GWINNER, J. and STEPHAN, E. P. 2018- **Advanced Boundary Element Methods**. Springer International Publishing. P661

[3] JIANG, W. XU, J. KUNPENG, L. OUYANG, Y. and YAN, J. 2022- **Coupling Heat Conduction and Radiation by an Isogeometric Boundary Element Method in 2-D Structures**. Mathematical problems in engineering/ vol. 2022, issue 1.

[4] KIRKUP, S. 2019- **The Boundary Element Method in Acoustics: A Survey**. MDPI/Applied Sciences. Vol. 9, issue 8.

[5] LYASHENKO, I. A. POPOV, V. L. and BORYSIUK, B. 2023- **Experimental Verification of the Boundary Element Method for Adhesive Contacts of a Coated Elastic Half-space**. Lubricants. Vol.11, issue 84.

[6] MAIERHOFER, G. AND HUYBRECHS, D. 2021- **Convergence Analysis of Oversampled Collocation Boundary Element Method in 2D**. arXiv:2103.1721v1.

[7] SATHYAN, S. AYDIN, U. and BELAHCEN, A. 2020- **Acoustic Noise Computation of Electrical Motors Using the Boundary Element Method.** MDPI/Energies vol. 13, issue 245.

دراسة استقرار المنظومات الديناميكية غير الخطية المتزاوجة ذات الطبولوجيا الثابتة

*نسرين الأسعد، ** محمد العلي، *** عبد الباسط الخطيب

ملخص البحث:

ندرس في هذا المقال خصائص استقرار المنظومات الديناميكية غير الخطية المتزاوجة ذات الطبولوجيا الثابتة. من المفترض أن تلبي حقول المتجهات للمنظومات الفردية فرضيات معينة، تحتوي مجموعة التوازن على جميع الحالات ذات أجزاء الحالة المتماثلة، إن هذه الفئة من المنظومات تُعد تعميم للمنظومات الخطية المتزاوجة، وهي متوفرة في علم الأحياء والفيزياء والهندسة والبيئة والعلوم الاجتماعية، على سبيل المثال شبكة التفاعل الكيميائي الحيوي، المذبذبات المتزاوجة، مصفوفات أنظمة الفوضى، سرب الكائنات الحية .

نقوم بتمثيل هذه المنظومات من خلال معادلات تفاضلية غير خطية متزاوجة في شكل الحالة.

كما في الحالة الخطية فأن مسألة استقرار هذه المنظومات، مرتكزة على البيان الموجه، الذي يصف بنية التفاعل في المنظومات ذات الاتصال الداخلي، أي من يتزاوج بمن. سوف ندرس في هذا المقال خصائص البيان الموجه التفاعلي الذي يؤدي إلى الاستقرار والجاذبية فيما يتعلق بمجموعة التوازن.

الكلمات المفتاحية: المنظومات الديناميكية المتزاوجة، اللاخطية، استقرار وجذب المنظومات الديناميكية غير الخطية المتزاوجة.

*) طالبة دكتوراه مكانيك رياضي في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة حمص– حمص– سوريا.

**) أستاذ دكتور مكانيك رياضي في قسم الرياضيات – كلية العلوم– جامعة حمص– حمص– سوريا.

***) أستاذ دكتور جبر خطي في قسم الرياضيات – كلية العلوم– جامعة حمص– حمص– سوريا.

AStudy on the Stability of Coupled Nonlinear Dynamical Systems With Fixed Topologie

Nsreen Alasaad,** Mouhammad Alali, Abd Albaset Alkhateb**

This chapter studies the stability properties of coupled nonlinear systems with fixed topologies. The vector fields of the individual systems are assumed to satisfy certain hypotheses. Again, the equilibrium set contains all states with identical state components. This class of systems generalizes that of coupled linear systems and is abundant in biology ,physics, engineering, ecology, and social science: e.g., a biochemical reaction network, coupled oscillators , arrays of chaotic systems, and swarm of organisms .we model such systems by coupled nonlinear differential equations in state form. Similar to the linear case central to the stability issue of such systems is the graph describing the interaction structure in the interconnected systems that is, who is coupled to whom. And a central question is, what properties of the interaction graph lead to stability and attractivity with respect to the equilibrium set.

Key words: : Coupled Dynamical Systems, nonlinear, Stability and attraction of coupled nonlinear dynamic systems .

*) master student, Department of mathematics–Faculty of science–Homs university Homs–Syria.

**) professor of mechanics, Department of mathematics–Faculty of science – Homs university Homs–Syria.

***) professor of linear algebra, Department of mathematics –Faculty of science– Homs university Homs–Syria.

1.مقدمة البحث

المنظومات الديناميكية المتزاوجة هي عبارة عن منظومة مؤلفة من منظومات جزئية (أعضاء)، موضع أحد الأعضاء يؤثر في التطور الزمني للأعضاء الأخرين.

إن مشاكل الاستقرار وامكانية إبقاء هذه المنظومات في حالة استقرار فيما يتعلق بوضعية التوازن من أبرز القضايا الرئيسية المتناولة . ولعل أهم هذه المشاكل هو شكل التفاعل فيما بينها أي من يرتبط بمن .إن الهدف الأساسي من هذا البحث هو تحديد كيف يؤثر شكل التفاعل على حالة الاستقرار وإمكانية الإبقاء على توازن الأنظمة في تركيبة زمنية معينة.

2.هدف البحث

دراسة استقرار وجذب المنظومات الديناميكية غير الخطية المتزاوجة ذات الطبولوجيا الثابتة، بناءً على قواعد رياضية يتم تشكيلها بالاستفادة من نظرية البيان والطبولوجيا والتحليل الرياضي.

3. طرق وأدوات البحث

في هذا البحث تم الاعتماد على التحليل والطبولوجيا ونظرية البيان، لدراسة استقرار وجذب المنظومات الديناميكية غير الخطية المتزاوجة.

4. مشكلة البحث

قد نعلم السلوك الديناميكي لمنظومة ديناميكية معينة عندما تتطور مع الزمن بشكل منفرد من خلال دراسات سابقة، إلا أن معرفتنا بهذه السلوكية المنفردة لن يؤدي إلى معرفة السلوكية الكلية لمجموعة المنظومات السابقة في حال التزاوج فيما بينها والذي ينتج عنه تأثير متبادل فيما بينها. تعتبر مسألة الربط ما بين الديناميكية المنفردة والديناميكية المتزاوجة من المسائل الهامة المفتوحة حالياً والتي لا يزال البحث فيها قائماً. ونعتبر هذا البحث مدخلاً مهماً للتعريف بهذه المسألة ومحاولة حلها والحصول على نتائج جديدة.

5. المناقشة والنتائج

من أجل متطلبات هذا البحث تلزمنا التعاريف التالية:

المجموعة الصامدة (invariant Set) : من أجل أي منظومة مرتبطة ظاهرياً بالزمن t من الشكل

$$\dot{x} = f(t,x)$$

حيث أن $f : R \times R^n \to R^n$ هي دالة مستمرة بشكل متقطع بالنسبة للمتحول الزمني t ومستمرة بالنسبة لمتحول الحالة x على $R \times R^n$.

نقول أن المجموعة $\Omega \subset R^n$ صامدة أمامياً للمنظومة إذا كان من أجل كل $t_0 \in R$ و كل $x^0 \in \Omega$ يتحقق أن $x(t,t_0,x^0) \in \Omega$، و ذلك أياً كانت $t \geq t_0$.

و بنفس الأسلوب نعرف المجموعة الصامدة خلفياً و الصامدة بشكلٍ عام.

مفهوم المجموعات المستقرة : نقول إن المجموعة الصامدة Ω أو المنظومة (بالنسبة للمجموعة الصامدة Ω)

- مُستقرة: إذا كان من أجل كل t_0 وكل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta = \delta(\varepsilon,t_0) > 0$ بحيث إن

$$\|x^0\|_\Omega \leq \delta(\varepsilon,t_0) \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\|_\Omega \leq \varepsilon \ : \ \forall t \geq t_0$$

- مُستقرة بانتظام: إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ بحيث إن

$$\|x^0\|_\Omega \leq \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\|_\Omega \leq \varepsilon \ : \ \forall t \geq t_0$$

حيث يمثل النظيم $\|\cdot\|_{\Omega}$ المعرف على فضاء الحالة للمنظومة بُعد النقطة x^0 عن المجموعة Ω.

مفهوم المجموعات الجاذبة: نقول إن المجموعة الصامدة Ω

- جاذبة في المنطقة D من فضاء الحالة: إذا تحقق الشرط

$$\forall x^0 \in D \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty}\|x(t)\|_{\Omega} = 0$$

- جاذبة بانتظام في المنطقة D: إذا كان من أجل كل $c > 0$ يتحقق

$$(\|x^0\| \le c) \wedge (x^0 \in D) \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\|x(t)\|_{\Omega} = 0$$

وذلك بشكل منتظم من أجل كل x^0, t_0

- جاذبة في كل مكان، إذا كانت جاذبة على كامل الفضاء R^n.
- جاذبة بانتظام في كل مكان، إذا كانت جذابة بانتظام على كامل الفضاء R^n.

المجموعات المحدبة (convex set):

نقول عن مجموعة ما أنها محدبة إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين من المجموعة تقع بكاملها ضمن حدود المجموعة ، أي إذا تحقق الشرط التالي:

$$tx + (1-t)y \in S; \quad \forall x, y \in S, \quad t \in [0,1]$$

الهيكل المحدب للمجموعة S (convex hull):

بفرض أن $S \subset R^m$ عندئذٍ ندعو تقاطع جميع المجموعات المحدبة التي تحتوي المجموعة S بالهيكل المحدب للمجموعة S ، ويرمز لهُ بالرمز $co(S)$.

متعدد الأبعاد (polytope):

وهو الهيكل المحدب لمجموعة محدودة من النقاط $x_1,...,x_n \in R^m$ ، ونرمز لهُ بالرمز $co\{x_1,...,x_n\}$.

ملاحظة:

نرمز لداخلية S بالرمز $\text{int}(S)$ وحدودية S بالرمز $\partial(S)$.

الفضاء الجزئي الناقل للمجموعة المحدبة:

لتكن S مجموعة محدبة تحوي نقطة الأصل، عندئذٍ نسمي أصغر فضاء جزئي يحوي المجموعة S بالفضاء الجزئي الناقل للمجموعة S، ونرمز لهُ بالرمز $lin(S)$،

ومن الواضح أن الفضاء الجزئي الناقل للمجموعة المحدبة S، يحتوي على جميع النقاط التي يمكن الوصول إليها من نقاط المجموعة المحدبة S عن طريق الجمع الخطي لنقاط هذه المجموعة المحدبة.

الداخلية النسبية للمجموعة المحدبة:

نرمز لها بالرمز $ri(s)$، وهي داخلية S عندما تكون مجموعة جزئية من $lin(s)$، وهي تمثل مجموعة النقاط التي يمكن الوصول إليها من داخل المجموعة المحدبة S، بحيثُ تكون محاطة بالكامل بنقاط أخرى من هذه المجموعة.

وكذلك بالنسبة للحدودية النسبية يُرمز لها بالرمز. $rb(s)$

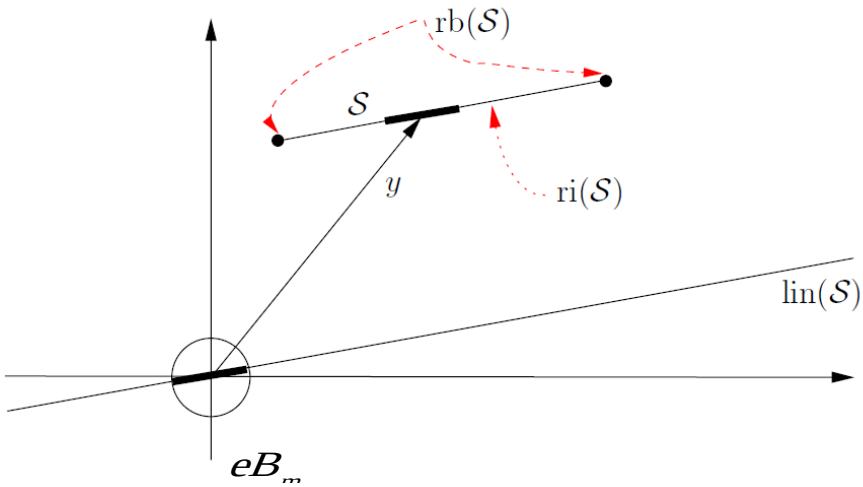
ملاحظة:

بفرض أن المجموعة S لا تحتوي نقطة الأصل فيجب تحويلها بواسطة متجه اختياري . بفرض v نقطة من المجموعة S، وبفرض $lin(S)$ تشير إلى أصغر فضاء جزئي يحوي $S-v$ و $ri(S)$ هي داخلية S عندما نعتبرها مجموعة جزئية من الفضاء الجزئي الأفيني $v+lin(S)$.

وأيضاً

$$ri(S)=\{y\in S;\exists\varepsilon>0, y+(\varepsilon B_m\cap lin(S))\subset S\}$$

حيثُ B_m كرة الوحدة في R^m .



الشكل (1) المجموعة S , $lin(S), ri(S), rb(S)$

ملاحظة:

عندما تكون S مجرد نقطة، فإن الداخلية النسبية $ri(S)$ هي نفسها، وذلك لأن الداخلية النسبية تتطلب وجود محيط حول النقطة، ولكن في حال وجود نقطة واحدة فقط، لا يمكن تكوين محيط يحتوي على نقاط أخرى، وبالتالي فأن الداخلية النسبية تتكون فقط من تلك النقطة نفسها.

ملاحظة:

من أجل أي مجموعة جزئية S غير خالية من R^m وكل $y \in R^m$ نرمز للمسافة بين y و S بالرمز

$$\|y\|_S = \inf_{z \in S} \|z - y\|$$

تعريف المخروط (cone):

نسمي المجموعة غير الخالية $k \subset R^m$ مخروط، إذا كان $\lambda y \in k$ بحيث $y \in k$ و $\lambda > 0$.

المخروط المماسي (tangent cone):

بفرض $S \subset R^m$ مجموعة محدبة مغلقة و لتكن $y \in S$، عندئذٍ المخروط المماسي للمجموعة S عند النقطة y هو مجموعة جميع المتجهات التي يمكن أن تؤخذ من النقطة y بحيث تبقى النقاط الناتجة داخل المجموعة المحدبة . ويكتب رياضياً :

$$T(y,S) = \left\{ z \in R^m : \lim_{\lambda \to \infty} \inf \frac{\|y + \lambda_z\|_S}{\lambda} = 0 \right\}$$

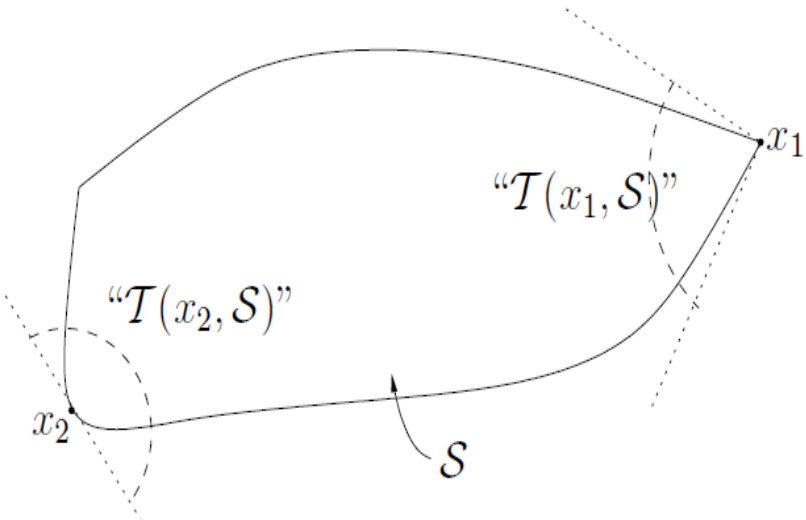
المخروط العادي (normal cone):

المخروط العادي للمجموعة S عند النقطة y هو مجموعة جميع المتجهات التي تمثل الاتجاهات التي يمكن أن نتحرك بها من النقطة y نحو خارج المجموعة المحدبة وبحيث تكون هذه المتجهات عمودية على أي اتجاه داخلي في المخروط المماسي عند تلك النقطة ويعبر عنهُ رياضياً بالعلاقة :

$$N(y,S)=\left\{z^{*}:\left\langle z,z^{*}\right\rangle \leq 0\forall z\in T(y,S)\right\}$$

ملاحظة:

إذا كانت $y\in \operatorname{int}(S)$ فإن $T(y,S)=R^{m}$.



الشكل (2) مخاريط المماس

يبين الشكل (2) المخاريط المماسية $T(x_1,S)$ و $T(x_2,S)$ يتم الحصول عليها من خلال تحويل $T(x_1,S)$ و $T(x_2,S)$ إلى الأصل على ∂S، في حالة خاصة إذا كانت S تتكون من نقطة واحدة فقط y عندئذٍ يكون $T(y,S)=\{0\}$ من الناحية الهندسية المخروط المماسي ل $y\in\partial S$

هو مخروط لهُ مركز في الأصل يحتوي على جميع المتجهات التي تشير اتجاهاتها من y (داخل) المجموعة S. إذا كانت هذه الحدود ملساء عند النقطة y فإن $T(y,S)$ هو نصف الفضاء المماسي المنقول إلى الأصل .

على سبيل المثال في الشكل (2) تكون حدودية x_2 ملساء في حين أن حدودية x_1 ليست ملساء لذلك فأن $T(x_2,S)$ هو نصف فضاء مماسي منقول إلى الأصل في حين أن $T(x_1,S)$ ليس كذلك.

قبل الانتهاء من هذه الفقرة، نلخص في التمهيدية التالية بعض خصائص المخاريط المماسية للمجموعات المحدبة.

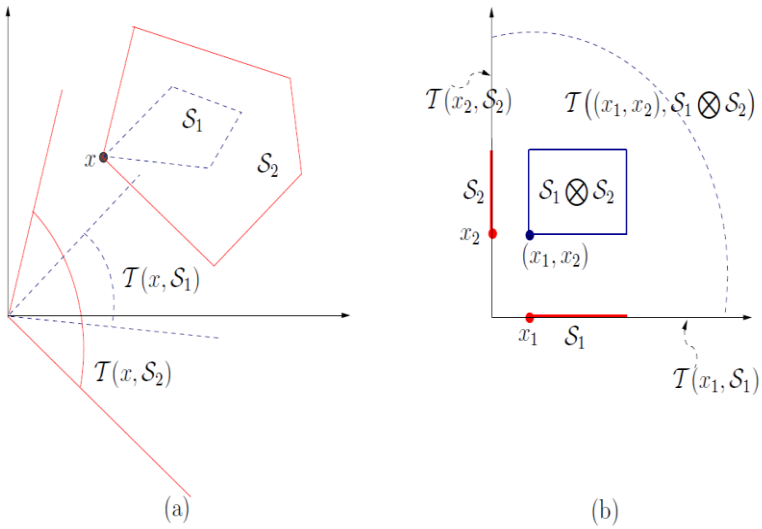
تمهيدية 1:

إذا كانت المجموعة المحدبة S_2 تحتوي على مجموعة محدبة S_1، فعندئذ مخروط المماس عند أي نقطة x للمجموعة S_2 يحتوي مخروط المماس عند x للمجموعة S_1.

ملاحظة:

إذا كانت المجموعة المحدبة جداء ديكارتي لمجموعات محدبة $S_1,...,S_n$، عندئذٍ مخروط المماس عند أي نقطة $x=(x_1,...,x_n)$ للمجموعة، هو الجداء الديكارتي لهذه المخاريط المماسية $T(x_i,S_i)$ بحيث $i=1,...,n$.

على سبيل المثال في الشكل (3) ، (b) مجموعة محدبة (مربعة) في المستوى هي الجداء الديكارتي للمجموعتين S_1 و S_2، نلاحظ أن مخروط المماس عند x_1 للفترة الزمنية S_1 هو مجرد محور أفقي موجب ومخروط المماس عند x_2 للفترة الزمنية S_2 هو محور عمودي موجب، جداءهم الديكارتي هو الربع الأول وهو بالضبط مخروط المماس عند النقطة (x_1,x_2) للمجموعة المربعة.



الشكل (3) خواص المخاريط المماسية للمجموعات المحدبة

التمهيدية 2: [1]

بفرض S_i , $i=1,\dots,n$ تمثل مجموعات مغلقة محدبة في R^m. الخواص التالية محققة:

1) إذا كانت $y\in S_1\subset S_2$ عندئذٍ فإن $T(y,S_1)\subset T(y,S_2)$ وأيضاً $N(y,S_2)\subset N(y,S_1)$

2) إذا كان $x_i\in S_i\,(i=1,\dots,n)$ فإن:

$$T((x_1,\dots,x_n),\bigotimes_{i=1}^{n}S_i)=\bigotimes_{i=1}^{n}T(x_i,S_i),$$

$$N((x_1,\dots,x_n),\bigotimes_{i=1}^{n}S_i)=\bigotimes_{i=1}^{n}N(x_i,S_i).$$

مشتق ديني:

بفرض $a,b(a<b)$ عددين حقيقيين وبفرض الدالة $h:(a,b)\to R, t\to h(t)$ والنقطة $t^*\in(a,b)$ يتم تعريف مشتقة ديني العليا للدالة h عند t^* بالشكل:

$$D^+h(t^*)=\limsup_{\tau\to 0^+}\frac{h(t^*+\tau)-h(t^*)}{\tau}$$

التمهيدية 3: [2]

بفرض أن الدالة h مستمرة على المجال (a,b) ، عندئذٍ فإن الدالة h غير متزايدة على المجال (a,b) إذا وفقط إذا تحقق $D^+h(t)\le 0$ ، وذلك من أجل كل $t\in(a,b)$.

في تحليل الاستقرار نحن نهتم بمشتق ديني لدالة على طول حل المعادلة التفاضلية .

بفرض لدينا المنظومة غير المستقلة:

$$\dot{x}=f(t,x)$$

وليكن $x(t)$ حلاً لهذه المنظومة، وبفرض أن $V(t,x):R\times R^n\to R$ دالة مستمرة تحقق شرط ليبشتز المحلي عند x بشكل منتظم فيما يتعلق بالزمن t، بالتالي فأن مشتقة ديني العليا للدالة $V(t,x(t))$ فيما يتعلق بالزمن t تكون مُعطاة بالشكل:

$$D^+V(t,x(t))=\limsup_{\tau\to 0^+}\frac{V(t+\tau,x(t+\tau))-V(t,x(t))}{\tau}$$

من جهة أخرى نعرف:

$$D_f^+V(t,x)=\limsup_{\tau\to 0^+}\frac{V(t+\tau,x+\tau f(t,x)-V(t,x))}{\tau}$$

الدالة D_f^+V تدعى مشتقة ديني العليا للدالة V على طول الحل للمنظومة (1).

أظهر يوشيزاوا في عام 1966 [6] أن

$$D^{+}V(t^{*},x(t^{*}))=D_{f}^{+}V(t^{*},x^{*}))$$

وذلك عندما نضع $x(t^{*})=x^{*}$

التمهيدية 4 :[3,4]

بفرض $V_i(t,x):R\times R^n\to R$ تمثل الصف C^1 من أجل كل $i\in I_0=\{1,...,n\}$ ، وبفرض إن $V(t,x)=\max\limits_{i\in I_0}V_i(t,x)$.

وبفرض أن $I(t)=\{i\in I_0:V_i(t,x(t))=V(t,x(t))\}$ مجموعة من الأدلة.

يتم الحصول على الحد الأقصى عند t

$$D^{+}V(t,x(t))=\max_{i\in I(t)}\dot{V}_i(t,x(t))$$

مبدأ الثبات (الاستقرار):[2,5]

بفرض لدينا المنظومة المستقلة عن الزمن

$$\dot{x}=f(x)$$

وبفرض أن $f:D\to R^n$ دالة مستمرة، حيثُ D مجموعة جزئية مفتوحة من . R^n

إن تفرد الحلول غير مضمون . وبفرض x^0 نقطة من D. سيتم اختيار الزمن الأولي دوماً يساوي الصفر.

الحل الغير مستمر $x(0)=x^0$ يكتب بالشكل:

$$x:(\alpha,\omega)\to R^n$$

حيثُ $\alpha<0<\omega$

يتم تعيين الحد الموجب لمجموعة الحلول $x(t)$ بواسطة $\wedge^+(x^0)$.

التمهيدية 5: [2]

إذا كان الحل $x(t)$ محدوداً، فإن $\wedge^+(x^0)$ غير خالية ومركبة ومستمرة، وأيضاً يكون

$$x(t)\to\wedge^+(x^0) \qquad t\to\omega \quad ,\omega=\infty$$

الأن سوف نقدم مبرهنة لاسال

مبرهنة1: [2] لاسال

بفرض $x(t)$ تمثل حلاً للمنظومة (2) وبفرض $V:D\to R$ تمثل دالة ليبشتز بحيث أن $D^+V(x(t))\le 0$ على المجال $[0,\omega)$، عندئذٍ المجموعة $\wedge^+(x^0)\cap D$ موجودة في اتحاد (اجتماع) جميع الحلول التي تبقى في $Z=\{x\in D:D^+V(x)=0\}$ على فترات التعريف القصوى.

صياغة المسألة:

في هذا القسم نقدم نموذجاً عاماً غير خطياً للمنظومات ذات الاتصال الداخلي، يمكن أن يصف معظم المنظومات الديناميكية المتزاوجة. بفرض لدينا أسرة من المنظومات الممثلة بالمعادلات التفاضلية العادية من الشكل:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_p^1(x_1,\dots,x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_p^n(x_1,\dots,x_n) \end{aligned} \qquad (1)$$

حيثُ $x_i \in R^m$ تمثل حالة المنظومة الجزئية أو العضو رقم i بحيث $i = 1,\dots,n$ والعنصر p موجود ضمن المجموعة P ، حيثُ إن مجموعة الوسطاء P تمثل اسرة من نماذج المزاوجة المختلفة.

وكما نلاحظ أن المنظومة الجزئية تشترك بفضاء حالة مشترك R^m .

نقدم الحالة العامة من أجل n عضو $x = (x_1,\dots,x_n) \in R^{mn}$ النموذج بالشكل المختصر يكتب بالشكل:

$$\dot{x} = f_p(x), \qquad p \in P \qquad (2)$$

حيثُ $p \in P$ و $f_p : R^{mn} \to R^{mn}$ أسرة لحقول متجهية منتظمة تحقق شرط ليبشتز يتم تحديدها بواسطة مجموعة العناصر P.

سنقدم تعريف البيان الموجه والبيان الموجه التفاعلي الديناميكي للمنظومات غير الخطية المتزاوجة.

من أجل كل $p \in P$ نربط كل حقل متجهي f_p ببيان موجه تفاعلي $\mathcal{G}_p$ ، والذي يمثل بنية التفاعل من أجل n منظومة جزئية (أعضاء).

تعريف :

البيان الموجه التفاعلي $\mathcal{G}_p(V, E_p)$ يتكون من :

- مجموعة محدودة V من العقد، العقدة i تمثل العضو i.
- مجموعة الأوتار E_p تمثل روابط بين الاعضاء.

يشير الوتر من العقدة j إلى العقدة i إن العضو j مجاور للعضو i ، بمعنى أن f_p^i تعتمد على x_j أي أنه يوجد $x_j^1, x_j^2 \in R^m$ بحيث أن:

$$f_p^i(x_1,...,x_j^1,...,x_n) \neq f_p^i(x_1,...,x_j^2,...,x_n)$$

مجموعة جوارات العضو i نرمز لها بالرمز $N_i(P)$.

بفرض $\Omega = \{x \in R^{mn}; x_1 = x_2 = ... = x_n\}$ مجموعة ثابتة للمنظومة ذات الاتصال الداخلي. كما في المنظومات الخطية المتزاوجة نحن نهتم بمعرفة مدى تأثير الاستقرار و الجذب فيما يتعلق بالمجموعة Ω للمنظومة (1) ببنية التفاعل.

المسألة:

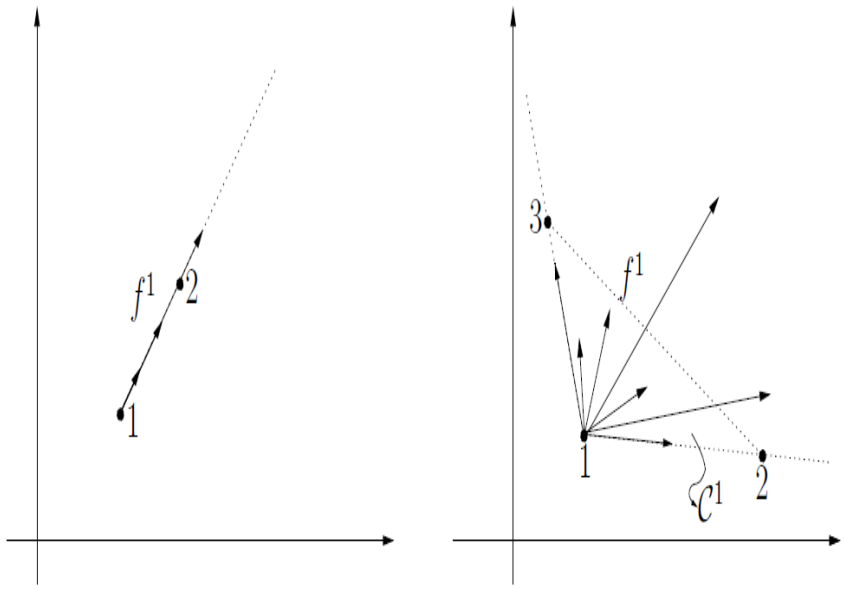
بفرض إن الحقل المتجهي f يحقق بعض الفرضيات، ما هي الشروط الواجب توفرها في البيان الموجه التفاعلي $\mathcal{G}$، التي تكون بموجبها المنظومة ذات الاتصال الداخلي مستقرة أو جاذبة فيما يتعلق بمجموعة التوازن Ω؟

بفرض $C^i = Co\{x_i, x_j : j \in N_i\}$ تمثل متعدد الأبعاد في R^m الذي شكلتهُ حالات العضو i وجوارهُ (N_i تمثل مجموعة جوارات العضو i) عندئذٍ من أجل كل $i \in I_0\{1,...,n\}$ نفرض أن:

1): f^i مستمرة على R^{mn}

2): من أجل كل $x \in R^{mn}$ و $f^i(x) \in T(x_i, c^i)$ وأيضاً $f^i(x) \neq 0$ إذا كان c^i ليس مفرداً و x^i هو رأسهُ.

الفرض 1) هو لضمان وجود الحلول. وندعو $f^{i}(x) \in T(x_i, c^i)$ بالمخروط المماسي للمجموعة



الشكل (4) مثالان لحقول متجهية تحقق الفرض 2

c^i عند النقطة x^i، ويشار إليه أحياناً على أنهُ شرط المماسية [7].

يوضح الشكل (4) مثالان لحقول متجهية تحققان الفرض 2)، في المثال الأيسر العضو رقم 1 يملك جوار واحد فقط هو العضو رقم 2.

متعدد الابعاد c^1 هو الخط المتقطع الذي ينضم إلى x_1, x_2 ومخروط المماس $T(x_1, c^1)$ هو المتجه المغلق $\{\lambda(x_2 - x_1); \lambda \geq 0\}$

الفرض 2) يعني أن الحقل المتجهي f^1 غير صفري ونقاطهُ في اتجاه $x_2 - x_1$.

في المثال الأيمن العضو رقم 1 يملك جوارين هما الأعضاء 2,3، متعدد الأبعاد c^1 هو المثلث ذو الرؤوس x_1, x_2, x_3، ومخروط المماس $T(x_1, c^1)$ هو

$$\{\lambda_1(x_2 - x_1) + \lambda_2(x_3 - x_1); \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$$

الفرض 2) يعني أن f^{1} غير صفري ونقاطهُ تقع داخل هذا المخروط المغلق .

بشكل عام الفرض 2) يتطلب أن $f^{i}(x)$ تملك الشكل:

$$\sum_{j\in N_i}\alpha_j(x)(x_j-x_i)$$

حيثُ $\alpha_j(x)$ دوال سلمية غير سالبة، و $f^{i}(x)$ تكون غير صفرية إذا كانت c^i ليست مفردة و x_i هو رأسهُا.

من أجل المنظومة غير الخطية المتزاوجة (2) مع تطبيق الفرضين 1) و2) نعرف المجموعة التي سنقوم بدراستها من أجل الاستقرار والجذب بالشكل:

$$\Omega=\{x\in R^{mn};x_1=...=x_n\}$$

لتكن $\bar{x}$ تمثل أي نقطة من المجموعة Ω ، من الواضح إنهُ من أجل أي i يكون:

$$c^i=Co\{\bar{x}_i,\bar{x}_j;j\in N_i\}=\{\bar{x}_i\}$$

بالتالي فإن $T(\bar{x}_i,c^i)=\{0\}$ بالتالي يتحقق من الفرض 2) أن $f^{i}(\bar{x})=0$ من أجل كل $i=1,...,n$.

مما يعني أن المجموعة Ω تمثل مجموعة التوازن، وهي بالطبع أيضاً تمثل مجموعة ثابتة.

التمهيدية 6: بفرض المنظومة ذات الاتصال الداخلي المتزاوجة

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=f^{1}(x_1,...,x_n)\\&\vdots\\\dot{x}_n&=f^{n}(x_1,...,x_n)\end{aligned}$$

تملك حل $X(t)$ على المجال $[0,\infty)$، وبفرض

$$V_i^{\alpha}(x)=\frac{1}{2}\|x_i-\alpha\|^2 \quad \& \quad V^{\alpha}(x)=\max_{i\in I_0}V_i(x)$$

حيثُ $\alpha\in R^m$ نقطة اختيارية بالتالي على طول أي مسار $X(t)$ يكون $D^+V^{\alpha}(x(t))\le 0$

الإثبات:

ليكن $x^0\in R^{mn}$ وبفرض $X(t)$ حلاً للمنظومة المفروضة معرفاً على المجال $[0,\omega)\subseteq[0,\infty)$ بحيث $x(0)=x^0$.

بالنظر إلى الحد الأقصى للدالة $V^{\alpha}(x)$ فهي ليست تفاضلية في كل مكان لذلك نستخدم مشتقة ديني.

نعرف $I(x)=\{i\in I_0;V_i^{\alpha}(x)=V^{\alpha}(x)\}$ مجموعة الأدلة حيثُ يتم الوصول إلى الحد الأقصى من خلالها. من خلال التمهيدية 3 يتحقق أن:

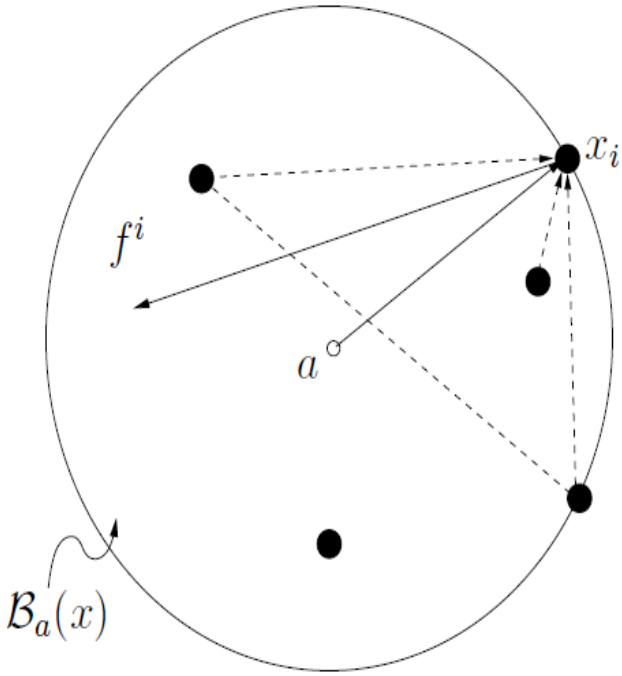
$$D^+V^{\alpha}(x(t))=\max_{i\in I(x(t))}V_i^{\alpha}(x(t)) \qquad (*)$$

نعرف كرة في الفضاء R^m بالشكل:

$$B_{\alpha}(x)=\{y\in R^m;\|y-\alpha\|^2\le 2V^{\alpha}(x)\}$$

هذا يعني أن الكرة $B_{\alpha}(x)$ تضم جميع النقاط $x_1,...,x_n$ وذلك من خلال متعدد الأبعاد $C^i=co\{x_i,x_j;j\in N_i\}\subset B_{\alpha}(x)$

من خلال التمهيدية (1) والفرض 2) لدينا أيضاً



الشكل (5) رسم يوضح $B_\alpha(x), f^i(x)$

$$f^i(x) \in T(x_i, C^i) \subset T(x_i, B_\alpha(x))$$

بالإضافة لذلك، عندما يكون $i \in I(x)$ هذا يعني أن العضو x_i يقع على حدودية الكرة $B_\alpha(x)$ ولذلك فإن المتجه $(x_i - \alpha)$ يمثل نصف قطر الكرة، بالتالي:

$$(x_i - \alpha) \in N(x_i, B_\alpha(x))$$

المخروط العادي للكرة $B_\alpha(x)$ في x_i

لذلك من خلال تعريف المخروط العادي يتحقق أنهُ من أجل كل $i \in I(x)$:

$$\dot{V}_i^\alpha(x) = (x_i - \alpha)^T f^i(x) \le 0$$

بالمقارنة مع المعادلة (*) ينتج:

$$D^{+}V^{\alpha}(x(t)) \leq 0$$

بالإضافة إلى ذلك من الأعلى ومن خلال التمهيدية (2) نرى إن $V^{\alpha}(x(t)) \leq V^{\alpha}(x(0))$ من أجل كل $t \in [0,\omega)$ ولذلك فأن الحل $x(t)$ يكون محدود وبالتالي فأن $\omega = \infty$

مبرهنة (2):

المنظومة ذات الاتصال الداخلي

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f^1(x_1,\dots,x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f^n(x_1,\dots,x_n) \end{aligned}$$

مستقرة بالنسبة لكل توازن $\bar{x} \in \Omega$

الإثبات:

بفرض إن أي توازن $\bar{x} \in \Omega$ سيكون من الشكل $\bar{x} = \zeta \otimes I_n$ من أجل بعض $\zeta \in R^m$ وبفرض

$$V^{\zeta}(x) = \frac{1}{2}\max_{i \in I_0}\|x_i - \zeta\|^2$$

يمكن التحقق بسهولة من أن $V^{\zeta}(x) = 0$ عندما $x = \bar{x}$، وأن $V^{\zeta}(x) \geq 0$ عندما $x \neq \bar{x}$. أي أن الدالة $V^{\zeta}(x)$ صامدة أمامياً بالنسبة لكل توازن . $\bar{x}$

بالإضافة لذلك من خلال التمهيدية (5) نحصل على أن مشتقة ديني على طول أي مسار للمنظومة المفروضة

$$D^{+}V^{\zeta}(x(t)) \le 0$$

ومن خلال المبرهنة (6) [2] يتحقق أن المنظومة مستقرة بالنسبة لكل موضع توازن $\bar{x} \in \Omega$.

مبرهنة (3):

المنظومة ذات الاتصال الداخلي

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f^{1}(x_1,\dots,x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f^{n}(x_1,\dots,x_n) \end{aligned}$$

جاذبة في كل مكان فيما يتعلق بالمجموعة Ω إذا وفقط إذا كان البيان الموجه التفاعلي شبه قوي الاتصال.

الإثبات:

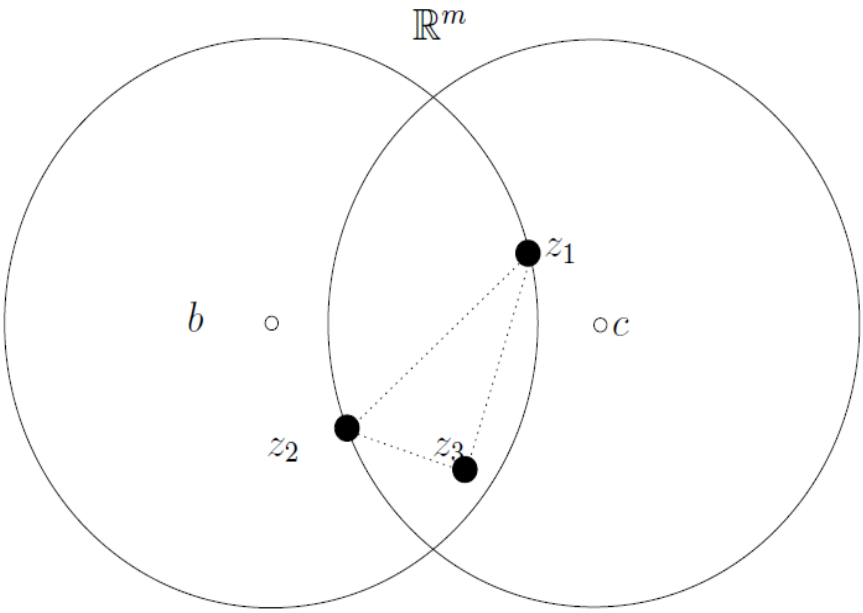
($\Leftarrow$)ليكن $x^{0} \in R^{mn}$ عنصر اختياري، من خلال التمهيدية (5) نعلم أن المنظومة المفروضة تملك حل $x(t)$ على المجال $[0,\infty)$ و . $x(0) = x^{0}$ وبفرض $V^{\alpha}(x)$ تمثل دالة من الشكل (8) حيثُ $\alpha \in R^{m}$ نقطة اختيارية. من خلال التمهيدية (5) لدينا $D^{+}V^{\alpha}(x(t)) \le 0$.

بفرض $\wedge^{+}(x^{0})$ تمثل مجموعة الحدود الموجبة للحلول التي تحقق $x(0) = x^{0}$. من خلال برهان التمهيدية (5) نحن نعلم أن الحل $x(t)$ محدود، بالتالي من خلال التمهيدية (4) مجموعة الحدود الموجبة $\wedge^{+}(x^{0})$ غير خالية ومركبة ومستمرة وأيضاً $x(t) \to \wedge^{+}(x_0)$ عندما $t \to \infty$.

من جهة أخرى يتحقق من المبرهنة (1) أن $\wedge^{+}(x^{0}) \subset M$ حيثُ M تمثل اتحاد جميع الحلول التي تبقى في $Z_{\alpha} = \{x \in R^{mn}; D^{+}V^{\alpha}(x) = 0\}$

نختار أي نقطتين $b,c \in R^m$ وباعتماد نفس البرهان وبالاعتماد على المبرهنة (1) نجد أيضاً أن $\wedge^+(x^0) \subset M'$ حيث M' تمثل اتحاد جميع الحلول التي تبقى في $Z_b \cap Z_c$

ومن ثم نفرض أن $M' \subset \Omega$ ، ولنثبت ذلك. لنفرض العكس أنهُ توجد نقطة $q = (q_1,...,q_n) \in M'$ لكن $q \notin \Omega$ تشير ل k رؤوس $2 \le k < n; q \notin \Omega$ ل $co\{q_1,...,q_n$ بواسطة $Z_1,...,Z_k$



الشكل (5) النقطة q في M وليست في Ω

بحيثُ b,c يمكن اختيارها بحرية.

بدون المساس بعمومية المسألة يمكن أن نفرض أن هناك رأساً واحداً فقط لنقل Z_1 في حدودية الكرة $B_b(q)$ ، ويوجد رأس واحد فقط لنقل Z_2 في حدودية الكرة $B_c(q)$.

بفرض
$$I'(q)=\{i\in I_0;q_i=Z_1\}$$
$$II'(q)=\{i\in I_0;q_i=Z_2\}$$

تمثل مجموعات الأعضاء الموجودة في Z_1,Z_2 على التوالي إذا كان البيان الموجه التفاعلي $\mathcal{G}$ شبه قوي الاتصال بالتالي يتحقق أنهُ يوجد عقدة مركزية لنقل v_c وبما أن $I'(q),II'(q)$ غير مفككة، بالتالي العقدة المركزية v_c لا يمكن أن تكون في كلتا المجموعتين. بدون المساس بعمومية المسألة لنقل أنها لا تنتمي للمجموعة $I'(q)$

لتكن $x(0)=q$ وبفرض أن $x(t)$ تمثل حل للمنظومة المفروضة يغادر من q.

بما أن $q\in M'\subset Z_b\cap Z_c$ ولدينا من أجل كل $t\in[0,\infty)$ يكون :

$$D^+V^b(x(t))=\max_{i\in I'(x(t))}(x_i(t)-b)^T f^i(x(t))=0$$

حيثُ

$$I'(x(t))=\{i\in I_0;V^b(x(t))=V_i^b(x(t))\}$$

نلاحظ أنه يمكن اختيار b خارج المجموعة المركبة التي تحتوي على جميع $x_i(t)$ بحيث $t\in[0,\infty)$، لذلك من أجل كل $i\in I'(x(t))$ يكون :

$$x_i(t)-b\neq 0;\forall t\in[0,\infty)$$

أيضاً من خلال الفرض 2) وبالاستفادة من أن $T(x_i,C^i)$ محتواة بشكل كامل في $T(x_i,B_b(x))$.

إن $f^i(x(t))$ ليست عمودية على $(x_i(t)-b)$ ، لذلك فأن $D^+V^b(x(t))=0$ يتضمن أنه من أجل كل t يوجد $i\in I'(x(t))$ بحيث $f^i(x(t))=0$ أي أن $\dot{x}(t)=0$

ومن ثم من خلال تعريف المجموعة $I'(x(0))$

$$g(x(0)) = \min_{i \in I'(x(0))} V_i^b(x(0)) - \min_{j \in I_0 - I'(x(0))} V_j^b(x(0)) > 0$$

بما أن $t \to g(x(t))$ دالة مستمرة يتحقق أنه يوجد عدد موجب صغير بشكل كافٍ w_1 بحيث أنه $\forall t \in [0, w_1]$ فإن $g(x(t)) > 0$ أي انهُ من أجل أي $i \in I'(x(0))$ و $j \in I_0 - I'(x(0))$ فإن

$$V_i^b(x(t)) > V_j^b(x(t))$$

بالتالي

$$(I_0 - I'(x(0)) \cap I'(x(t)) = \phi \forall t \in [0, w_1]$$

أو بمعنى:

$$I'(x(t)) \subseteq I'(x(0)) \forall t \in [0, w_1]$$

الأن نجزأ المجموعة $I'(x(t))$ بحيث $I'(x(t)) = J(x(t)) \cup \bar{J}(x(t))$ ، حيثُ:

$$J(x(t)) = \{i \in I'(x(t)); f^i(x(t)) = 0\}$$
$$\bar{J}(x(t)) = \{i \in I'(x(t)); f^i(x(t)) \neq 0\}$$

بالتدريج، من أجل كل $i \in I'(x(0))$ و $x_i(0) = z_1$ ، بالتالي $i \in \bar{J}(x(0))$ يقتضي أن $x_i(0) = z_1$ و $f^i(x(0)) \neq 0$ والذي يقتضي بدورهُ أن العضو i يملك جوار في $I_0 - I'(x(0))$ بالواقع جميع جوارات $i \in \bar{J}(x(0))$ تكون في $I'(x(0))$، بالتالي $C^i(x(0))$ تكون غير مفردة، من خلال الفرض 2) و $f^i(x(0)) = 0$ والذي يناقض حقيقة أن $i \in \bar{J}(x(0))$.

بفرض $j \in I_0 - I'(x(0))$ تمثل عضو مجاور للعضو $i \in \bar{J}(x(0))$ بما أنهُ من أجل كل $t \in [0, w_1]$ يكون $I'(x(t)) \subseteq I'(x(0))$ يتحقق أن $I_0 - I'(x(0)) \subseteq I_0 - I'(x(t))$ بالتالي

$j \in I_0 - I'(x(t))$ لكل $t \in [0,w_1]$ إذاً من أجل كل $t \in [0,w_1]$ يكون $i \in I'(x(t))$ الذي يقتضي أن $x_i(t)$ تكون على حدودية الكرة $B_b(x(t))$ ولذلك فإن $x_i(t)$ تكون رأس $C^i(x(t))$.
أيضاً بما أن العضو i يملك جوار $j \in I_0 - I'(x(t))$ و $C^i(x(t))$ ليست مفردة ومن خلال الفرض 2) $f^i(x(t)) \neq 0$ بالتالي تبين لنا أن :

$$(\forall t \in [0,w_1]) i \in I'(x(t)) \Rightarrow (\forall t \in [0,w_1]) f^i(x(t)) \neq 0$$

هذا يقتضي أنه خلال الفترة الزمنية $[0,w_1]$ ولا عضو في $\bar{J}(x(0))$ يمكن الوصول إليه من $\bar{J}(x(t))$ أو بشكل مكافئ :

$$\forall t \in [0,w_1] \quad J(x(t)) \subseteq J(x(0))$$

ومن ثم سوف نبين أن $J(x(t))$ موجودة بشكل تام في $J(x(0))$. بفرض العكس أن $J(x(t)) = J(x(0))$ لكل $t \in (0,w_1]$ بالتالي:

$$\forall (i \in J(x(0)) (\forall t \in [0,w_1]) f^i(x(t)) = 0$$

هذا يعني أنه خلال الفترة الزمنية $[0,w_1]$, $x_i(t) = z_1$ لكل $i \in J(x(0))$ بما أن $x_i(t)$ هو رأس $C^i(x(t))$ و $f^i(x(t)) = 0$ والفرض 2) يقتضي أن $C^i(x(t))$ مفردة، بالتالي من أجل كل $i \in J(x(0))$ و $t \in [0,w_1]$ يتم تجميع جميع الأعضاء المجاورين للعضو i في Z_1 وبما أن العقدة المركزية للبيان الموجه $\mathcal{G}$ لا تنتمي ل $J(x(0)) \subset I'(x(0))$ يجب أن يكون لبعض الأعضاء في $J(x(0))$ عضو مجاور j في $\bar{J}(x(0)) \cup I_0 - I'(x(0))$. كما هو موضح أعلاه فأن العضو المجاور j يكون بحيث $x_j(t) = Z_1$ من أجل كل $t \in [0,w_1]$ والذي يقتضي أن $j \notin I_0 - I'(x(0))$ ومن جهة أخرى أن $\forall t \in [0,w_1], x_j(t) = z_1$ الذي يقتضي أن $f^j(x(0)) = 0$. الذي يناقض حقيقة أن $j \in J(x(0))$. بالتالي فقد وضحنا أنه يوجد $t_1 \in [0,w_1]$ بحيث أن $J(x(t_1))$ تكون مجموعة جزئية تامة من $J(x(0))$. يؤدي تكرار هذا

البرهان إلى وجود t_k بحيث أن $J(x(t_k))$ تكون خالية. مما يناقض حقيقة وجود $i \in I'(x(t_k))$ بحيث أن $f^i(x(t))=0$ لذلك فأن الحل $x(t)\to\Omega$ عندما $t\to\infty$ والجاذبية في كل مكان محققة.

$(\Leftarrow)$:

بفرض العكس بفرض أن البيان الموجه $\mathcal{G}$ ليس شبه قوي الاتصال بالتالي يوجد عقدتين i^* و j^* بحيث أنه من أجل أي عقدة k لا يمكن الوصول إلى i^* و j^* من k

لتكن V_1 تمثل مجموعة جزئية من العقد التي يمكن الوصول أليها من i^* ، ولتكن V_2 تمثل مجموعة جزئية من العقد التي يمكن الوصول إليها من j^* ، من الواضح أن V_1 و V_2 مفككتان وأيضاً من أجل أي عقدة $i\in V_1$ (وكذلك من المجموعة V_2) ، مجموعة جوارات العقدة i تمثل مجموعة جزئية من V_1 (وكذلك من المجموعة V_2) .

نختار أي $z_1,z_2\in R^m$ بحيث يكون $z_1\neq z_2$ ونختار الشروط الأولية :

$$x_i(0)=\begin{cases} z_1 & \forall i\in V_1 \\ z_2 & \forall i\in V_2 \end{cases}$$

بالتالي خلال الفرض 2)

$$x_i(t)=\begin{cases} z_1 & \forall i\in V_1 \\ z_2 & \forall i\in V_2 \end{cases} \qquad t\geq 0$$

هذا يثبت أن المنظومة ليست جاذبة في كل مكان فيما يتعلق بالمجموعة Ω.

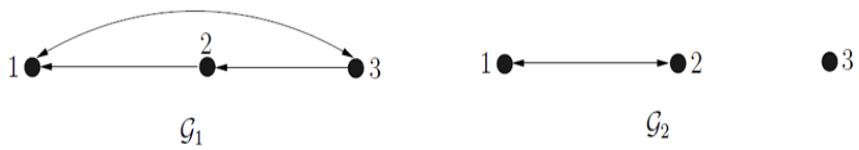
تطبيق:

بفرض لدينا اسرة من المنظومات غير الخطية المتزاوجة

$$P=1:\begin{cases}\dot{x}_1=f_1^{\,1}(x_1,x_2,x_3)\\ \dot{x}_2=f_1^{\,2}(x_2,x_3)\\ \dot{x}_3=f_1^{\,3}(x_1,x_3)\end{cases}$$

$$P=2:\begin{cases}\dot{x}_1=f_2^{\,1}(x_1,x_2)\\ \dot{x}_2=f_2^{\,2}(x_1,x_2)\\ \dot{x}_3=f_2^{\,3}(x_3)\end{cases}$$

إن البيان الموجه التفاعلي لهاتين المنظومتين هو



من الواضح أن المنظومتين مستقرتين وذلك من أجل أي موضع توازن $\bar{x}\in\Omega$ وذلك حسب المبرهنة 2

وكذلك من الواضح أن البيان الموجه التفاعلي $\mathcal{G}_1$ شبه قوي الاتصال، بالتالي فأن المنظومة الأولى جاذبة في كل مكان فيما يتعلق بوضعية التوازن، وذلك حسب المبرهنة 3.

بينما المنظومة الثانية ليست كذلك وذلك لأن البيان الموجه التفاعلي المرتبط بها ليس شبه قوي الاتصال.

المراجع:

[1] AUBIN J. P, 1991- Viability Theory. Birkhauser

[2] ROUCHE N, HABETS P, and LALOY M.,1975- Stability Theory by Liapunov's Direct Method. Springer-Verlag

[3] CLARKE F,H, 1975- Generalized gradients and applications Transactions of the American Mathematical Society, vol. 205, no. 4, pp. 247–262.

[4] DANSKIN J, M, 1966- The theory of max-min, with applications SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 14, no. 4, pp. 641–664.

[5] LASALLE J, P, 1968- Stability theory for ordinary differential equations Journal of Differential Equations, vol. 4, pp. 57–65.

[6] ROUCHE N, HABETS P, MURRAY M, 1975- Stability Theory by Liapunov Direct Method Springer- Verlag.

[7] BLANCHINI F, 1999- Set invariance in control Automatica, vol. 35, no. 11, pp1747-1767

التوصيف الظاهري والوظيفي لمجموعات الخلايا اللمفاوية الرئيسة في طحال الخفاش آكل الفاكهة *Rousettus aegyptiacus* واستجابتها للقاح داء الكَلَب الخامل

اعداد الطالبة : يارا الرمضان إشراف: د. نهلة ابراهيم ، د. تغريد قدار

ملخص البحث

تشير القدرة الفريدة للخفافيش على العمل كمستودع للحمّات شديدة الإمراضية للبشر إلى خصائص فريدة وخصائص وظيفية لجهازها المناعي، ومع ذلك فإن نقص الكواشف الخاصة بالخفافيش، وخاصة الأضداد، قد حدّ من معرفتنا بمناعة الخفاش، في هذا البحث قمنا بدراسة التوصيف الظاهري والوظيفي لمجموعات من الخلايا المناعية، في طحال خفاش الفاكهة *Rousettus aegyptiacus* الذي ينتمي لفصيلة Pteropodidae كما قمنا بدراسة التغيرات في هذه المجموعات كنتيجة لاستجابته المناعية للقاح داء الكَلَب الخامل.

أظهرت الدراسة الكيميائية المناعية في الطحال تلويناً إيجابياً قويًا لواسمات CD3 في مناطق الخلايا التائية (الأغماد اللمفاوية حول الشريان)، وتواجد مجموعة الخلايا التائية CD4+ بشكل انتقائي في منطقة الخلايا التائية في الطحال وفي المنطقة الهامشية في الطحال كما وجدنا تعبيراً واضحاً لمجموعات الخلايا CD20+ في الجريبات والمراكز المنتشة وفي المنطقة الهامشية، وخلال اليوم العاشر بعد الحقن بلقاح داء الكَلَب الخامل تبين حدوث تضاعف للتلوين بـ CD3 وتراكم للخلايا التائية CD4+ بشكل أكبر في مناطق الخلايا التائية وفي الجريبات وزيادة في كثافة التعبير عن CD20 في الجريبات والمراكز المنتشة.

كلمات مفتاحية *Rousettus aegyptiacus*، داء الكَلَب، CD20،CD4،CD3، الطحال.

Phenotypic and functional characterization of major lymphocyte populations in the spleen of *Rousettus aegyptiacus* and their response to inactivated rabies Vaccine

Abstract

The unique ability of bats to serve as reservoirs for highly pathogenic viruses affecting humans suggests distinctive characteristics and functional features of their immune system. However, the lack of bat-specific reagents, particularly antibodies, has limited our understanding of bat immunity. In this study, we examined the phenotypic and functional characterization of immune cell populations in the spleen of the Egyptian fruit bat *Rousettus aegyptiacus* belonging to the Pteropodidae family. Additionally, we investigated changes in these populations as a result of the bat's immune response to inactivated rabies vaccine.

Immunohistochemical analysis of the spleen revealed strong positive staining for CD3 in T-cell regions. The CD4+ T-cell population was selectively present in the T-cell area of the spleen and in the marginal zone. We also observed clear expression of CD20+ cell populations in follicles, germinal centers, and the marginal zone. By the tenth day post-injection with the inactivated rabies vaccine, staining for CD3 had doubled, with a greater accumulation of CD4+ T cells in the T-cell regions and follicles, along with an increased density of CD20 expression in follicles and germinal centers.

Keywords: ***Rousettus aegyptiacus*, Rabies, CD20،CD4،CD3،, Spleen.**

1. مقدمة:

بالرغم من الأهمية الكبيرة للخفافيش إلا أنها تتميز بسمعة سيئة كونها المستودع الرئيس للعديد من العوامل الممرضة خاصة الحمّات التي تنتقل إلى الإنسان بطرق مباشرة أو غير مباشرة وتسبب له أمراضاً عديدة**[1,2]**.

حيث أن بعض خصائص الخفافيش (اختيارات الطعام، الحياة بشكل مستعمرة أو الانفرادية، وبنية المستعمرات، والقدرة على الطيران، والهجرة الموسمية وأنماط الحركة اليومية، والخمول والسبات، وعمرها، وسلوكيات النوم، وقابليتها للإصابة بالحمّات) تجعلها مضيفات مناسبة للحمّات وغيرها من العوامل المسببة للأمراض **[2]**.

تعد الخفافيش الثدييات الوحيدة الطائرة في العالم **[3]**، وتوجد في كل القارات باستثناء الأجزاء الأكثر برودة والأكثر عزلة من الأرض، بما في ذلك القطب الشمالي والقطب الجنوبي وبعض الجزر المحيطية المعزولة. تشير التقديرات إلى أن هناك من 900 إلى أكثر من 1200 نوع من الخفافيش في العالم تنتمي لـ 18 فصيلة وحوالي 174 جنساً **[4]**، مما يشكل خمس إجمالي عدد الثدييات على الأرض أي في المرتبة الثانية بعد القوارض. ومع ذلك، فإن هذه الأرقام هي مقاييس نسبية أي أنه يمكن أن يكون هناك المزيد من أنواع الخفافيش في العالم. يوجد أكبر عدد من الخفافيش في المناطق الاستوائية، وتعد أمريكا الوسطى والجنوبية موطناً لما يقارب ثلث أنواع الخفافيش في العالم **[4]**.

داء الكلب:

العامل المسبب لداء الكَلَب RABV هو فيروس الكَلَب Rabies virues الذي ينتمي إلى جنس الحمّات الكَلَبيَّة وهو فيروس RNA سلبي السلسلة من جنس Lyssavirus (باليونانية: Lyssa، آلهة الغضب أو الجنون)**[5]**.

ينتمي فيروس داء الكلب إلى عائلة Rhabdoviridae (باليونانية: rhabdos؛ عصية) والتي سميت بهذا الاسم نسبة إلى فيروس rhabdovirus المميز على شكل رصاصة **[6]**. تتألف فيروسات Rhabdovirus، مثل غيرها من فيروسات RNA سلبية السلسلة، من جزيء مستقر ومنظم من RNA الجينومي والبروتين النووي**[7]**.

ينتشر فيروس الكَلَب (RABV) في نطاق واسع من الأثوياء كأحد أهم الحمّات الخبيثة ولديه نسبة إماتة تقترب من 100%، وهي واحدة من أعلى المعدلات لأي مرض معدٍ، على الرغم من أنه يمكن تجنبه عن طريق الوقاية المناسبة قبل وبعد التعرض. تمثّل الكلاب الناقل الرئيسي للمرض، بينما تعد الخفافيش الخزانات الرئيسة لـ 10 من أصل 11 فيروساً من الحمّات الكَلَبية المعروفة بين الخفافيش**[9, 8]**.

تعد فترة حضانة داء الكَلَب الفترة الأكثر تفاوتاً بين الأمراض الفيروسية التي تصيب الجهاز العصبي المركزي، وتبلغ غالباً من شهر إلى شهرين ولكن النطاق الفعلي بين 7 أيام إلى 6 سنوات **[9]**، وتم تسجيل أول حالة من الوفيات البشرية، بسبب داء الكَلَب المنتقل عبر الخفافيش في عام 1951م **[10]**.

المناعة:

تتكون المناعة لدى الثدييات من نوعين رئيسيين، هما المناعة الفطرية والمناعة المكتسبة، اللتان تشتركان مع بعضهما البعض لإحداث استجابة مناعية مثالية ضد مسببات الأمراض. تُوفر المناعة الفطرية دفاعات فورية غير نوعية، بينما تشمل المناعة المكتسبة الخلايا التائية والبائية الخاصة بالمستضد**[11]**. تُعرَض المستضدات المشتقة من مُمْرِضات الجسم بواسطة الخلايا المُقدِّمة للمستضد (APC) Antigen presenting cell ، مثل البلاعم والخلايا التغصنية (DC) Dendritic cells، إلى الخلايا التائية والبائية الخاصة بالمستضد في الأعضاء اللمفاوية الثانوية، مثل العقد اللمفاوية والطحال ومختلف الأنسجة اللمفاوية المرتبطة بالأغشية المخاطية **[12]**.

تُفَعَّل الخلايا التائية أو البائية الخاصة بالمستضد، وتتكاثر، وتهاجر إلى موقع العدوى، حيث تهاجم المُمْرِض الغازي من خلال إنتاج الأضداد و/أو القضاء المباشر للخلايا المصابة**[13]**.

يمكن تقسيم مجموعة الخلايا التائية المستجيبة إلى مجموعتين فرعيتين، هما الخلايا التائية المساعدة (Th) T Helper cells والخلايا التائية السامة للخلايا (CTL) Cytotoxic T cells، والتي يتم تحديدها من خلال قدرتها على التعبير عن واسمات CD4 وCD8 على سطحها(Cluster of Differentiation)، على التوالي[14]. عند التفعيل، تُنتج الخلايا التائية CD4+ السيتوكينات، وهي ضرورية للمساعدة في مشاركة أنواع أخرى من الخلايا المناعية وتنشيطها. على سبيل المثال، تعد خلايا CD4+ Th ضرورية لتمايز الخلايا البائية إلى الخلايا المنتجة للاضداد (الخلايا البلازمية) وتبديل نمط الأضداد **[15,14]**. تُنتج الخلايا التائية CD8+ أيضًا السيتوكينات عند تنشيطها، ولكنها تُطلق أيضًا جزيئاتٍ مُحللة للخلايا والتي يُمكنها حلّ الخلايا المصابة مباشرةً، مما يجعل هذه المجموعة الفرعية من الخلايا

التائية بالغة الأهمية لمكافحة العدوى داخل الخلايا، وخاصةً العدوى الفيروسية. كما تُظهر الخلايا التائية CD8+ نشاطًا مضاداً للأورام**[16,17]**. مُستقبل الخلايا التائية CD3 هو المُركّب الأساسي للمستقبلات على أغشية الخلايا التائية. يُوفر "الإشارة الأولى" التي تُفعّل الخلايا التائية وتُحدد خصوصية الاستجابة المناعية **[17]**.

أما CD4 فهو يشير إلى بروتين موجود على سطح الخلايا التائية المساعدة التي تلعب دوراً أساسياً في تنظيم الاستجابة المناعية، حيث تساعد في مكافحة العدوى من خلال تنشيط الخلايا المناعية الأخرى لتدمير الحمّات والجراثيم **[18]**.

تهاجر الخلايا التائية المساعدة CD4+ بأعداد هائلة عبر الأعضاء اللمفاوية وهذه المعلومات مهمة نظراً لوجود مؤشرات على أن الخلايا التائية CD4+ قد تؤثر على وظيفة البيئات الدقيقة تبعاً لمرحلة نموها. **[18]**.

CD20 هو بروتين أولي موجود على سطح الخلايا البائية حيث تعبر عنه الخلايا البائية الناضجة وبعض الخلايا التائية، ويلعب دوراً في نمو وتمايز الخلايا البائية. في الطحال، يتم التعبير عن CD20 على الخلايا البائية، بما في ذلك خلايا المنطقة الهامشية من الخلايا البائية، وعلى مجموعة فرعية من الخلايا التائية، وتحديداً الموجودة في الغمد اللمفاوي حول الشريان. يلعب CD20 دوراً في نمو الخلايا البائية وتمايزها وتوطينها داخل الطحال. كما يشارك في تنشيط الخلايا البائية واستجابة الأجسام المضادة **[18]**.

تستخدم الكيمياء المناعية كطريقة اختبار مساعدة شائعة الاستخدام في علم الأمراض الجراحي التشريحي لتصنيف الخلايا وتشخيصها، وتستخدم أجساماً مضادة تستهدف

مستضدات معينة في أنسجة وخلايا محددة لتسهيل تحديد نوع الخلية والعضو الأصلي. تُجرى هذه الطريقة عادةً على الأنسجة بعد معاملتها بالبارافين وتثبيتها بالفورمالين، والتي تتميز بسهولة تخزينها **[18,19]**.

الدراسات المناعية على الطحال عند الخفافيش:

يعد الطحال أحد الأعضاء اللمفاوية الثانوية الهامة لدى الخفافيش وله دور رئيس في المناعة الفطرية والمناعة المكتسبة تجاه العوامل الممرضة بما في ذلك الحمّات **[20,21]**.

وجدت إحدى الدراسات **[22]** أن الخفافيش باعتبارها مستودعاً للحمّات لديها مجموعة فريدة من الخلايا اللمفاوية في الطحال والتي تختلف عن الثدييات الأخرى، ويهيمن عليها خلايا CD8+ T بدلاً من خلايا CD4+ T. قد تشير الأعداد الكبيرة من خلايا CD8+ T إلى أن طحال الخفاش في حالة مستقرة دائماً لمكافحة الحمّات والتي تم تأكيدها في هذه الدراسة باستخدام الأضداد المتفاعلة المتصالبة التي بينت التوصيف الظاهري والوظيفي لمجموعات الخلايا التائية والبائية والقاتلة الطبيعية في الخفاش آكل الفاكهة *Pteropus alecto* ، حيث أشارت إلى غلبة الخلايا التائية CD8 + في طحال الخفافيش البرية التي قد تعكس إما وجود الحمّات في هذا العضو أو غلبة هذه المجموعة الفرعية من الخلايا في حالة مستقرة. بدلاً من ذلك، كانت غالبية الخلايا التائية في الدورة الدموية والعقد اللمفاوية ونقي العظم مجموعات فرعية CD4+، وعلاوة على ذلك، فإن العدد المرتفع غير المتوقع للخلايا التائية في نقي العظام لدى الخفافيش قد يشير إلى دور مهم في تطور الخلايا التائية. وأخيراً، أدى التحفيز المولد للانقسام إلى تكاثر وإنتاج جزيئات مؤثرة بواسطة الخلايا المناعية لدى الخفافيش.

دراسة أخرى بينت**[23]** أن وجود تلوين بـ CD8 بنمط شجيري في محيط اللب الأحمر أن محيط الطحال سليم وعلى العكس من ذلك، يمكن استخدام انعدام التلون بـ CD8 لإثبات وجود أورام أو آفات أخرى.

في المقابل، لم تُدرس المناعة التكيفية للخفافيش وأهميتها في السيطرة على العدوى الفيروسية بشكل كافٍ. وقد قدمت عدة دراسات حديثة **[24-27]** عن التسلسل الجيني لثلاثة أنواع مختلفة من الخفافيش دليلاً على أن الجينات المُشاركة في المناعة التكيفية لدى هذه الأنواع تشمل جزيئات (MHC) Major Histocompatibility Comlex، ومستقبلات الخلايا التائية والمستقبلات المُشاركة مثل CD3 وCD4 وCD8 وCD28، بالإضافة إلى واسمات خاصة بالخلايا البائية مثل CD19 وCD22 وCD72 والغلوبولينات المناعية. ومع ذلك، لم يتم تسجيل توصيف جميع الخلايا المناعية للخفافيش، ويعود ذلك على الأرجح إلى نقص الكواشف المُحددة، وخاصة الأضداد. في حين أن إنتاج الأضداد وحيدة النسيلة خاصة بواسمات بروتين الخفاش يمثل النهج الأمثل، إلا أنه مع ذلك يستغرق وقتًا طويلاً ويكلف الكثير. في المقابل، قد توفر الأضداد المتصالبة التفاعلية المُنتجة ضد نفس الأهداف في ثدييات أخرى (وخاصةً الفئران والبشر) بديلاً أرخص وأسرع.

تم في إحدى الدراسات **[22]** تلوين خلايا طحال الخفافيش بالأضداد لـ CD3، وتحديد مجموعات الخلايا اللمفاوية CD4+ وCD8+ بتقنية التدفق الخلوي نظراً لفشل تلوين الأضداد لـ CD4 وCD8، أشارت النتائج إلى أن 34% و25% من خلايا CD3+ كانت CD8 + وCD4 + على التوالي. تشير حقيقة أن هذه النسب المئوية بلغت 60% فقط من إجمالي خلايا CD3+ إلى انخفاض حساسية اختبار Flow-FISH مقارنةً بتلوين الأضداد.

كما أكدت بيانات هذه الدراسة **[22]** وجود نسب مختلفة من الخلايا التائية CD4+ وCD8+، وذلك تبعًا للعضو/النسيج المدروس. ففي الطحال، كانت الخلايا التائية CD8+ هي السائدة على المجموعات الفرعية من الخلايا التائية CD4+. وفي العقد اللمفاوية، لوحظت نسبة مماثلة من الخلايا التائية CD4+ والخلايا التائية التي تمثل نمطًا ظاهرياً لذاكرة CD8. في المقابل، كانت الخلايا التائية المعبرة عن CD4+ تفوق الخلايا التائية CD8+ في الدم. وبالمثل، من المثير للدهشة أن أكثر من 30% من خلايا الدم البيضاء الموجودة في نقي عظم الخفافيش هي خلايا لمفاوية تائية، وهي نسبة أعلى بكثير من تلك الموصوفة في نقي عظم الإنسان والفئران والتي تتراوح بين 4% و8%.

أما دراسة **[28]** فقد أفادت أن الحقن داخل الصفاق (البريتوان) عند الفئران بفيروس التهاب الدماغ الياباني أدى إلى تضاعف الفيروس في الطبقة الداخلية للبريتوان ثم في البالعات الكبيرة الموجودة في الجريبات اللمفاوية للطحال ولاحقاً في خلايا الغمد اللمفاوي المحيط بالشريان، كما لوحظت العدوى في كل من البالعات والخلايا التائية.

كما كشفت الدراسة التشريحية للطحال أثناء الإصابة بالتهاب الدماغ الياباني عن زيادة عدد البالعات الكبيرة بدءاً من اليوم الثالث، وتراكم العدلات ووصلت إلى الحد الأقصى في اليوم التاسع، كما تبين وجود زيادة في حجم المنطقة T بشكل كبير بحلول اليوم التاسع وبدء انخفاض حجمها تدريجياً خلال أسبوع، وفي فترات لاحقة ظهرت مراكز منتشة في المنطقة T المستقلة ثم اختفت الخلايا المحتوية على مستضد الفيروس مع ظهور المناطق المنتشة مما يشير إلى دور هذه الأخيرة أيضاً في إزالة الفيروس **[29]**.

2- هدف البحث وأهميته:

تنبع أهمية البحث من دراسة التركيب والتوصيف الظاهري والوظيفي لمجموعات الخلايا التائية لطحال الخفاش *Rousettus aegyptiacus* الذي ينتمي لفصيلة Pteropodidae ودراسة التغيرات في هذه المجموعات استجابةً للقاح داء الكَلَب الخامل، مما سيشكل إضافة مهمة حول هذا الجواب المناعي، وتحديد قدرة الخفاش المناعية بما يحقق إمكانية الاستفادة من هذه المعلومات وتطبيقاتها على المستويات البيئية والطبية والوقائية.

مواد وطرائق البحث:

تم تقسيم حيوانات التجربة إلى مجموعتين وفق ما يلي:

1- المجموعة الأولى (الشاهد): تشريح العينات مباشرة وإجراء المقاطع المجهرية والتلوين بـ CD3، CD4 و CD20.

2- المجموعة الثانية: حقن العينات (في البريتوان) بـ 100 µl من لقاح الكلب الخامل في اليوم الأساسي (اليوم صفر) وبحقنتين داعمتين في الأيام 3 و7 وتشريح العينات في اليوم العاشر وإجراء المقاطع المجهرية والتلوين بـ CD3، CD4 و CD20.

كما تم إحداث مجموعة شاهد سلبية بحفظ النسيج بالفورمول 30% لتعطيل مستقبلات الأجسام المضادة لهذه الواسمات.

الشكل (1): حقن الخفافيش بلقاح داء الكَلَب الخامل

حيوانات التجربة:

تم اصطياد الخفافيش باستخدام الشِباك، مغارة الدوار–قرية كفر صنيف–صافيتا–محافظة طرطوس، ووضعت في أقفاص بأبعاد 100x75 cm وتم تحديد المتطلبات الغذائية للنوع قبل البدء بالتجربة.

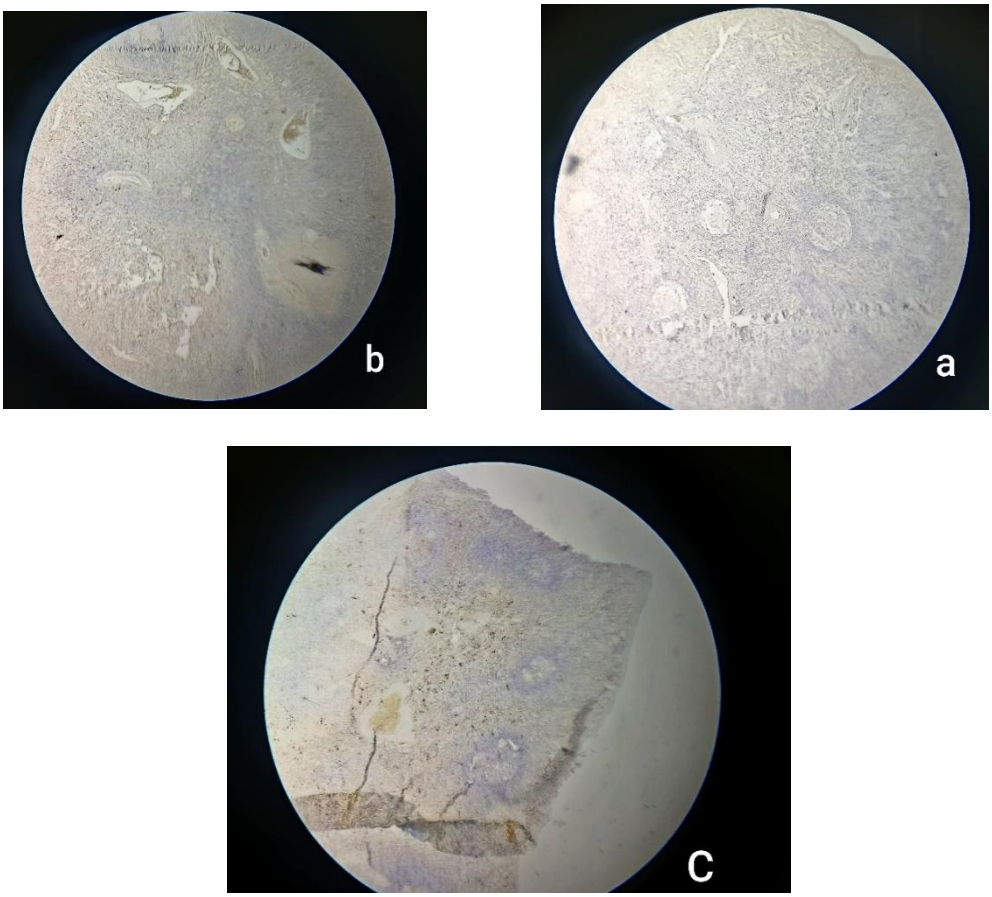
مواد البحث:

تم تخدير الحيوانات باستخدام الكلوروفورم Chloroform، والتشريح وعزل الطحال وحفظه في محلول الفورمول Formalin 5% لمدة 24 ساعة على الأقل قبل الدراسة

النسيجية. اعتُمدت طريقة أبو عاقلة **[30]** في معالجة العينات، ثم تحضير النسج ومعاملتها بالكواشف المناعية حسب تعليمات الشركة المصنعة ودراستها بواسطة المجهر الضوئي Nikon Eclipse Ni.

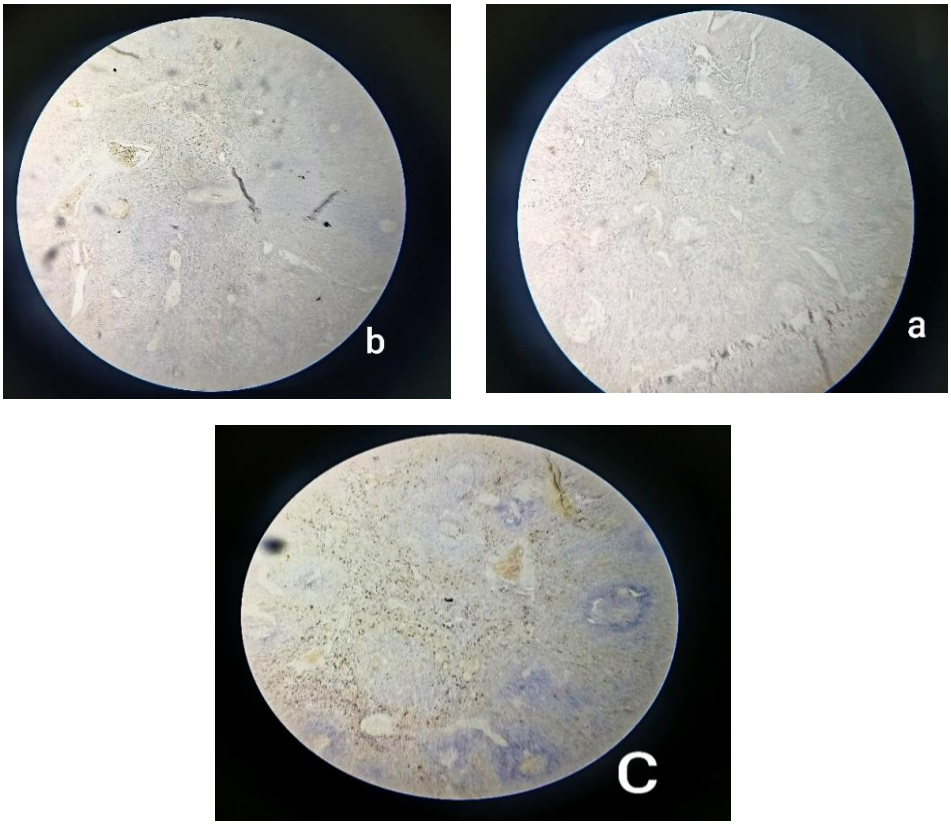
3. النتائج والمناقشة:

تتعرف الأضداد النوعية لـ CD3 على الخلايا التائية من خلال مستقبلاتها في أغشية الخلايا والتفاعلات السيتوبلازمية، بذلك أظهر التلوين المناعي الكيميائي لخلايا CD3+ في الطحال إيجابية قوية في مناطق الخلايا التائية (الأغماد اللمفاوية حول الشريان)، وبالمقارنة مع مجموعة الشاهد السلبي ومجموعة اليوم العاشر بعد الحقن بلقاح داء الكَلَب الخامل تبين تضاعف الإيجابية للتلوين في مجموعة اليوم العاشر الشكل (2) يتوافق التوصيف الظاهري لمجموعات الخلايا التائية مع دراسة Youssef & Salah عام 2019 **[29]** ومع دراسة Mathur عام 1988**[28]** التي أكدت زيادة في حجم المنطقة T بشكل كبير بحلول اليوم التاسع وهذا يؤكد تفعيل تنشيط الخلايا التائية CD3+ ودورها في تفعيل الاستجابة المناعية، وبالمقارنة مع نتائج Gómez عام 2016 **[22]** فيمكن الاعتقاد أن غالبية هذه الخلايا هي CD8+ ولتأكيد ذلك نحتاج إلى إجراء التلوين المناعي بـ CD8 + وCD4+ وحساب النسبة المئوية لكليهما من ضمن المساحة الاجمالية ولكن عدم وجود أضداد خاصة بـ CD8 حال دون إمكانية الجزم.



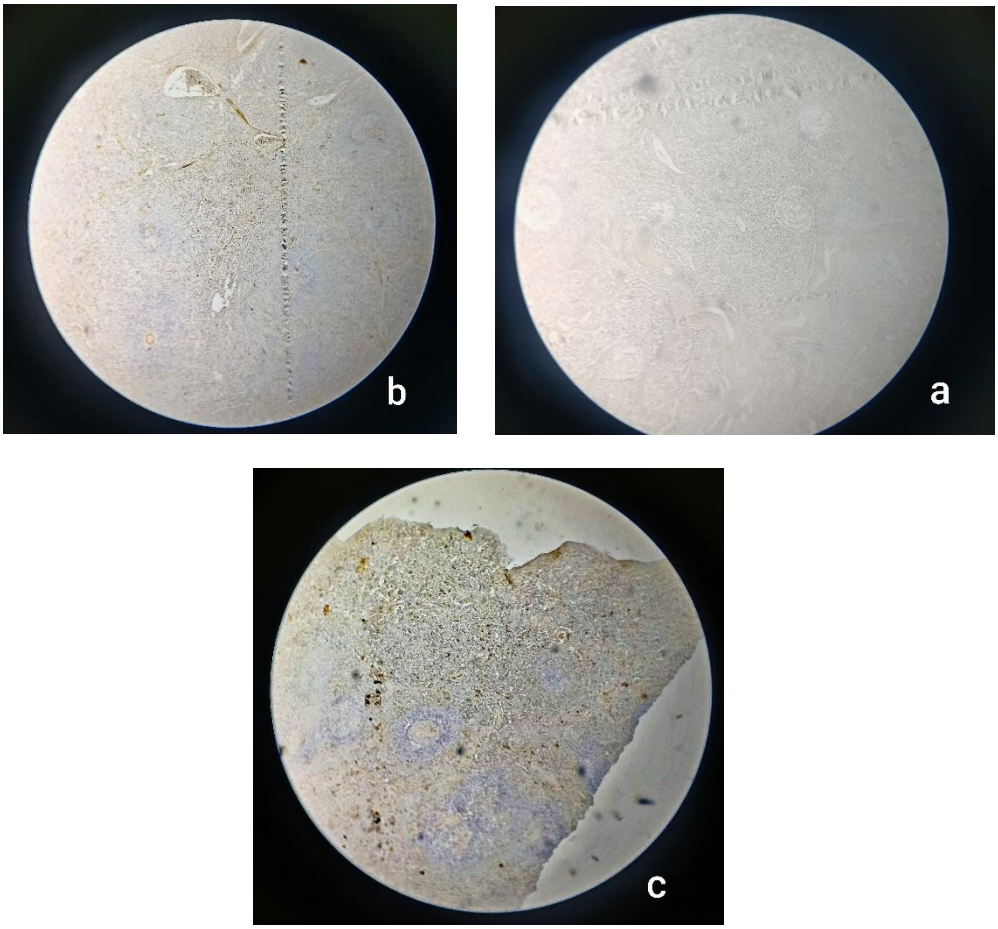
الشكل (2): مقطع عرضي في الطحال يوضح التلوين الكيميائي المناعي بـ CD3 (A: سلبي مستحدث، B: قبل الحقن، C: بعد الحقن) X100

تُظهر نتائجنا تواجد مجموعة الخلايا التائية CD4+ بشكل انتقائي في منطقة الخلايا التائية في الطحال. وبعد الحقن بلقاح داء الكلب الخامل تراكمت الخلايا التائية CD4+ بشكل أكبر في مناطق الخلايا التائية وفي الجريبات مما يؤكد دورها في تحفيز تكوين المراكز المنتشة (GCs) والأضداد الذاتية والتي توافقت مع دراسة Miyakeh (1964) التي بحثت في العدوى بفيروس التهاب الدماغ الياباني عند الفئران **[31]** كما أبدت دراسة Howard عام 1969 نتائج مماثلة عند الفئران الملقحة بفيروس التهاب الدماغ الخيلي الفينزويلي المضعف (VEE) **[32]** ، كما لاحظنا وجود تلون بـ CD4 في المنطقة الهامشية وهذا يدعم دور هذه الخلايا في تحريض الاستجابة المناعية المكتسبة وهو ما تم تأكيده أيضاً في دراسات Chaturvedi وآخرين عام 1983على فيروس Dengue**[33]**.



الشكل (3): مقطع عرضي في الطحال يوضح التلوين الكيميائي المناعي بـ CD4 (A: سلبي مستحدث، B: قبل الحقن، C: بعد الحقن) X100

وجدنا باستخدام الأجسام المضادة لـ CD20 في الطحال تعبيراً واضحاً لمجموعات الخلايا CD20+ في الجريبات والمراكز المنتشة وفي المنطقة الهامشية، وخلال اليوم العاشر بعد الحقن بلقاح داء الكَلَب الخامل تبين حدوث زيادة في كثافة التعبير عن CD20 في هذه الأماكن مما يدل ويؤكد على نمو وتكاثر ونضج هذه الخلايا البائية ودورها الفعال في الجواب المناعي في الطحال.



الشكل (3): مقطع عرضي في الطحال يوضح التلوين الكيميائي المناعي بـ CD20 (A: سلبي مستحدث، B: قبل الحقن، C: بعد الحقن) X100

4. الاستنتاجات والتوصيات:

نستنتج من معطيات البحث ما يلي:

أظهرت الدراسة الكيميائية المناعية في الطحال تلوينا إيجابيًا قوياً لـ CD3 في مناطق الخلايا التائية (الأغماد اللمفاوية حول الشريان)، وتواجد مجموعة الخلايا التائية CD4+ بشكل انتقائي في منطقة الخلايا التائية في الطحال وفي المنطقة الهامشية في الطحال كما وجدنا تعبيراً واضحاً لمجموعات الخلايا CD20 في الجريبات والمراكز المنتشة وفي المنطقة الهامشية، وتبين خلال اليوم العاشر بعد الحقن بلقاح داء الكَلَب الخامل حدوث تضاعف للتلوين بـ CD3 وتراكم للخلايا التائية CD4+ بشكل أكبر في مناطق الخلايا التائية وفي الجريبات وزيادة في كثافة التعبير عن CD20 في الجريبات والمراكز المنتشة.

التوصيات:

نوصي بتوسيع الدراسات الكيميائية المناعية لدى الخفافيش باستخدام أضداد موجهة خاصة لمجموعات الخلايا التائية الفرعية وذلك خلال جميع مراحل التجارب بعد الحقن بالحمّات لتأكيد دور كل من هذه المجموعات الفرعية في المراحل المختلفة.

المراجع:

[1]. إبراهيم، نهلة؛ شلفة، مها، 2008- *التنوع الحيوي لخفاشيات الساحل السوري وحمايتها*، مجلة الساتل العلمية المحكمة، جامعة السابع من أكتوبر، ليبيا، 2 ,(5): 23-34.

[2]. CALISHER CH, CHILDS JE, FIELD HE, HOLMES KV, and SCHOUNTZ T. 2006-*Bats: important reservoir hosts of emerging viruses.* Clinical microbiology reviews. Jul; 19(3):531-45. /https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC1539106

[3]. MIDDLETON, N & NICOLAOU, H. (2006). *An Introduction to the bats of Cyprus.* Echoes Ecology Ltd. Scotland. https://batability.co.uk/wp-content/uploads/2017/02/An-Introduction-To-The-Bats-of-Cyprus-Dec06.pdf

[4]. WILSON, D.E. (2020) - Bat. *Encyclopedia Britannica.* Retrieved from: https://www.britannica.com/animal/bat-mammal.

[5]. KUZMIN, I. V., & TORDO, N. (2012) - *Genus Lyssavirus. Rhabdoviruses: molecular taxonomy, evolution, genomics, ecology, host-vector interactions,* cytopathology and control, 37-58. .https://www.caister.com/rhabdoviruses

[6]. WILDY P (1971) - *Classification and nomenclature of viruses. First report of the International Committee on Nomenclature of Viruses*. Monographs in Virology 5: 51 7. https://ictv.global/ictv/proposals/ICTV%201st%20Report.pdf

[7]. DIETZGEN RG. (2012) *Morphology, Genome Organization, Transcription and Replication of Rhabdoviruses In Rhabdoviruses: Molecular Taxonomy, Evolution, Genomics, Ecology, HostVector Interactions*, Cytopathology and Control, ed. pp. 5–12. Norfolk, UK: Caister Academic

Presshttps://onesearch.nihlibrary.ors.nih.gov/discovery/fulldisplay?vid=01 NIH_INST:NIH&docid=alma991000589549704686&context=L

[8]. TURMELLE, A. S., JACKSON, F. R., GREEN, D., MCCRACKEN, G. F., & RUPPRECHT, C. E. (2010)- *Host immunity to repeated rabies virus infection in big brown bats. Journal of General Virology*, *91*(9), 2360-2366. https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC3052523/

[9]. HEMACHUDHA, T; LAOTHAMATAS, J; RUPPRECHT, C. E. (2002) - *Human rabies: a disease of complex neuropathogenetic mechanisms and diagnostic challenges,* Lancet Neurology, 1(2), 101–109. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/12849514/

[10]. DUTTA, J. K., DUTTA, T. K., & DAS, A. K. (1992) - *Human rabies: modes of transmission.* The Journal of the Association of Physicians of India, *40*(5), 322-324. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/1483992/

[11]. PARKIN, J., & COHEN, B. (2001)- AN OVERVIEW OF THE IMMUNE SYSTEM. The Lancet, 357(9270), 1777-1789. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/11403834/

[12]. BOUSSO, P. (2008) - *T-cell activation by dendritic cells in the lymph node: lessons from the movies.* Nature Reviews Immunology, 8(9), 675-684. https://www.nature.com/articles/nri2379

[13]. BROERE, F., & VAN EDEN, W. (2019)- *T cell subsets and T cell-mediated immunity. In Nijkamp and Parnham's principles of immunopharmacology* (pp. 23-35). Cham: Springer International Publishing. https://www.nature.com/articles/s41392-023-01471-y

[14]. ZHU, J., & PAUL, W. E. (2008)- *CD4 T cells: fates, functions, and faults.* Blood, *112*(5), 1557-1569. /https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/18725574

[15]. SWAIN, S. L., BRADLEY, L. M., CROFT, M., TONKONOGY, S., ATKINS, G., WEINBERG, A. D., ... & HUSTON, G. (1991)- *Helper T-cell subsets: phenotype, function and the role of lymphokines in regulating their development*. Immunological reviews, *123*, 115-144. /https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/1684776

[16]. ZHANG, N., & BEVAN, M. J. (2011)- *CD8+ T cells: foot soldiers of the immune system.* Immunity, *35*(2), 161-168. /https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/21867926

[17]. VAN LIER, R. A., TEN BERGE, I. J., & GAMADIA, L. E. (2003)- *Human CD8+ T-cell differentiation in response to viruses.* Nature Reviews Immunology, *3*(12), 931-939. /https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC415833

[18]. TAYLOR, C. R. (2014) - *Immunohistochemistry in surgical pathology: principles and practice.* Histopathology: Methods and /Protocols, 81-109. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/25015143

[19]. COONS, A. H., CREECH, H. J., & JONES, R. N. (1941)- *Immunological properties of an antibody containing a fluorescent group.* Proceedings of the society for experimental biology and medicine, 47(2), 200-202. https://scispace.com/papers/immunological-properties-of-an-antibody-containing-a-3zvug7w2iy

[20]. ZHAO, L., LIU, L., GUO, B., & ZHU, B. (2015) - *Regulation of adaptive immune responses by guiding cell movements in the spleen.* Frontiers in microbiology, 6, 645. https://www.frontiersin.org/journals/microbiology/articles/10.3389/fmicb.2015.00645/full

[21]. DEN HAAN, J. M. M., & KRAAL, G. (2012)- *Innate immune functions of macrophage Subpopulations in the spleen*. Journal of Innate Immunity، 4(5–6), 437–445. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/22327291/

[22]. MARTÍNEZ GÓMEZ, J. M., PERIASAMY, P., DUTERTRE, C. A., IRVING, A. T., Ng, J. H. J., CRAMERI, G., ... & ALONSO, S. (2016)- *Phenotypic and functional characterization of the major lymphocyte populations in the fruit-eating bat Pteropus alecto.* Scientific reports, 6(1), 37796. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/27883085/

[23]. BORCH, W. R., AGUILERA, N. S., BRISSETTE, M. D., O'MALLEY, D. P., & AUERBACH, A. (2019)- *Practical applications in immunohistochemistry: an immunophenotypic approach to the spleen.* Archives of pathology & laboratory medicine, 143(9), 1093-1105. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/30917045/

[24]. PAPENFUSS, A. T., BAKER, M. L., FENG, Z. P., TACHEDJIAN, M., CRAMERI, G., COWLED, C., ... & WANG, L. F. (2012)- *The immune gene repertoire of an important viral reservoir, the Australian black flying fox.* BMC genomics, 13, 1-17. https://bmcgenomics.biomedcentral.com/articles/10.1186/1471-2164-13-261

[25]. SHAW, T. I., SRIVASTAVA, A., CHOU, W. C., Liu, L., HAWKINSON, A., GLENN, T. C., ... & SCHOUNTZ, T. (2012)- *Transcriptome sequencing and annotation for the Jamaican fruit bat (Artibeus jamaicensis).* PloS one, 7(11), e48472. https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0048472

[26]. LEE, A. K., KULCSAR, K. A., ELLIOTT, O., KHIABANIAN, H., NAGLE, E. R., JONES, M. E., ... & RABADAN, R. (2015)- *De novo transcriptome reconstruction and annotation of the Egyptian rousette bat.* BMC genomics, 16, 1-11. https://bmcgenomics.biomedcentral.com/articles/10.1186/s12864-015-2124-x

[27]. OMATSU, T., NISHIMURA, Y., BAK, E. J., ISHII, Y., TOHYA, Y., KYUWA, S., ... & YOSHIKAWA, Y. (2006)- *Molecular cloning and sequencing of the cDNA encoding the bat CD4.* Veterinary immunology and immunopathology, 111(3-4), 309-313. https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S016524270600002X

[28]. MATHUR, A., BHARADWAJ, M., KULSHRESHTHA, R., RAWAT, S., JAIN, A., & CHATURVEDI, U. C. (1988)- *Immunopathological study of spleen during Japanese encephalitis virus infection in mice.* British journal of experimental pathology, 69(3), 423. https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC2013103/

[29]. YOUSSEF, S., & SALAH, M. (2019)- *Differential expression of CD3, TNF-α, and VEGF induced by olanzapine on the spleen of adult male albino rats and the possible protective role of vitamin C.* Biomedicines, *7*(2), 39. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/31126077/

[30]. أبو عاقلة، أحمد. عبد العزيز، 1999- **التحضير النسيجي المجهري: الاسس النظرية والعلمية في التحضير المجهري للعينات النسيجية والخلوية**، الطبعة(1)، دار المستقبل، عمان، الأردن.

[31]. MIYAKE, M. (1964)- *The pathology of Japanese encephalitis: A review.* Bulletin of the World Health Organization, 30(2), 153. https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC2554796/

[32]. HOWARD, R. J., CRAIG, C. P., TREVINO, G. S., DOUGHERTY, S. F., & MERGENHAGEN, S. E. (1969)- *Enhanced humoral immunity in mice infected with attenuated Venezuelan equine encephalitis virus*. The Journal of Immunology, 103(4),699-707. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/4186914/

[33]. CHATURVEDI, U. C., NAGAR, R., & MATHUR, A. (1983)- *Effect of dengue virus infection on Fc-receptor functions of mouse*

macrophages. Journal of general virology, 64(11), 2399-2407. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/6644274/.