مجلة جامعة حمص

سلسلة العلوم الأساسية

مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 47 . العدد 17

1447 هـ - 2025 م

الأستاذ الدكتور **طارق حسام الدين** رئيس جامعة حمص المدير المسؤول عن المجلة

أ. د. وليد حمادة	رئيس تحرير مجلة جامعة حمص للعلوم الإنسانية
د.نعيمة عجيب	رئيس تحرير مجلة جامعة حمص للعلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة حمص

سورية . حمص . جامعة حمص . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : 2138071 31 963 ++

. موقع الإنترنت : www.homs-univ.edu.sy

. البريد الالكتروني : journal.homs-univ.edu.sy

ISSN: 3005-6551

<u>شروط النشر في مجلة جامعة حمص</u>

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
- طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
- **اذا كان الباحث طالب دراسات عليا:**

يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقته على النشر في المجلة.

- **اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:**

يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.

- **اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :**

يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.

- **اذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :**

يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.

- **يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):**

عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1- مقدمة
2- هدف البحث
3- مواد وطرق البحث
4- النتائج ومناقشتها .
5- الاستنتاجات والتوصيات .
6- المراجع.

- **يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (الآداب – الاقتصاد– التربية – الحقوق – السياحة – التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):**
- عنوان البحث . . ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1. مقدمة.
2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
3. أهداف البحث و أسئلته.
4. فرضيات البحث و حدوده.
5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
7. منهج البحث و إجراءاته.
8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
9. نتائج البحث.
10. مقترحات البحث إن وجدت.
11. قائمة المصادر والمراجع.

7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:

أ- قياس الورق 17.5×25 B5.

ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 – يمين 2.5- يسار 2.5 سم

ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8

ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20

ـ كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي ـ العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.

ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.

8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.

9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.

10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة ـ الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة ـ سنة النشر ـ وتتبعها معترضة (-) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة ـ دار النشر وتتبعها فاصلة ـ الطبعة (ثانية . ثالثة) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة.

وفيما يلي مثال على ذلك:

-MAVRODEANUS, R1986- **Flame Spectroscopy**. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

ــ بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة ــ المجلد والعدد (كتابة مختزلة) وبعدها فاصلة ــ أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة.

مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases **Clinical Psychiatry News** , Vol. 4. 20 - 60

ج. إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد بالبنود (أ و ب) ويكتب في نهاية المراجع العربية: (المراجع In Arabic)

رسوم النشر في مجلة جامعة حمص

1. دفع رسم نشر (50000) ل.س أربعون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.
2. دفع رسم نشر (200000) ل.س مئة الف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .
3. دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .
4. دفع مبلغ (15000) ل.س ستة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.

المحتوى

حل معادلة ديوفانتس $x^2 + y^2 = z^2$ في $M_n(\mathbb{Z})$ باستخدام التقطير

د. محمّد إيّاد شراباتي / أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كليّة العلوم – جامعة حمص

د. باسل حمدو العرنوس / أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كليّة العلوم – جامعة حمص

ملخّص البحث

ندرس في هذه الأوراق ثلاثيّة من المصفوفات الصّحيحة، التي يكون مجموع مرّبعي المسقطين الأوّل والثّاني يساوي مربّع المسقط الثّالث، وأسمينا كل ثلاثيّة مصفوفات تحقّق هذا الشّرط ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة.

قمنا في هذه الأوراق بدراسة توليد ثلاثية مصفوفات فيثاغوريّة جديدة انطلاقاً من ثلاثيّة موجودة، ومن ثمّ درسنا إمكانيّة إيجاد ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة انطلاقاً من مصفوفة واحدة، وفق الحالات الآتية:

1. مصفوفة صحيحة قطريّة.
2. مصفوفة قابلة للتقطير وقيمها الذّاتيّة صحيحة وتملك مصفوفة متّجهات ذاتيّة صحيحة ومحدّدها $+1$ أو -1.

الكلمات المفتاحيّة:

ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة – مصفوفة قطريّة – مصفوفة قابلة للتقطير.

Solving Diophantine Equation $x^2 + y^2 = z^2$ in $M_n(\mathbb{Z})$ Using a Diagonalization Method

Dr. Mohamad Eyad Charabati

Department of Mathematics – Faculty of Science – Homs University

Dr. Basel Hamdo Alarnous

Department of Mathematics − Faculty of Science − Homs University

Abstract

We study in this paper the triple of integer matrices that satisfies the sum of squares of the first and second matrices is equal to the square of the third one. We call this triple by matrix Pythagorean triple.

We study the generation of new matrix Pythagorean triple by another triple and then the ability to find this triple by one matrix in the following cases:

1. Diagonal integer matrix

2. Diagonalizable matrix with integer eigenvalues and its eigenvectors matrix has determinant $+1$ or -1.

Key Words:

The Matrix Pythagorean Triple − Diagonal matrix − Diagonalizable matrix.

حل معادلة ديوفانتس $x^2 + y^2 = z^2$ في $M_n(\mathbb{Z})$ باستخدام التقطير

1.مقدّمة

لعلّ من أهم المبرهنات التي تعلق في الذهن في مجال الهندسة، هي مبرهنة فيثاغورث والتي تنص على: « في المثلّث القائم: مساحة المربّع المُنشأ على الوتر، تساوي مجموع مساحتي المُربّعين المنشأين على الضّلعين القائمتين »، وليس المربّع فحسب ، وإنّما أي مضلّع منتظم مُنشأ على أضلاع المثلّث القائم، وكذلك أنصاف الدوائر المُنشأة على أضلاع المثلّث القائم.

لتكن a,b,c أطوال أضلاع مثلّث قائم طول وتره c، فإنّه وبحسب مبرهنة فيثاغورث:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

انتقلت الدّراسة فيما بعد لإيجاد الحلول الصّحيحة لمعادلة ديوفانتس: $x^2 + y^2 = z^2$.

وسمّي كل حل من هذه الحلول ثلاثيّة فيثاغوريّة، وبدأت تطبيقات هذه الثّلاثيّات تظهر شيئاً فشيئاً.

كانت الفكرة التي تمّ الانطلاق منها في هذا البحث هي إيجاد حلول لمعادلة ديوفانتس السّابقة على شكل مصفوفات صحيحة، واهتمامنا في هذا البحث ينصب على إيجاد ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة بمدخلات صحيحة فقط، لأنّه من أجل مدخلات أعداد عاديّة فإنّه بالإمكان توليد ثلاثيّة فيثاغوريّة باختيار مصفوفة مربّعة ما P من المرتبة n وعناصرها من $\mathbb{Q}$، أي إنّه بالإمكان إيجاد مصفوفتين مربّعتين A,C من المرتبة n وعناصرها من $\mathbb{Q}$ انطلاقاً من المصفوفة P بحيث يكون: $P^2 + C^2 = A^2$ [1].

2. هدف البحث

يهدف البحث إلى توليد ثلاثيّة مصفوفات صحيحة فيثاغوريّة انطلاقاً من ثلاثيّات محدّدة، أو انطلاقاً من مصفوفة صحيحة.

3. أهميّة البحث:

عند إيجاد ثلاثيّة مصفوفات صحيحة فيثاغوريّة انطلاقاً من مصفوفة صحيحة، هذا يعني أنّه بمعرفة بعض البراميترات يمكن الحصول على براميترات أكثر، ولهذا دور مهم في عمليّة تشفير البيانات، بالإضافة إلى إمكانيّة تصنيف جديدة للمصفوفات بكونها فيثاغوريّة أم ليست كذلك.

4. المناقشة و النّتائج

تعريف 1: [2]

ندعو المصفوفات المربّعة والتي عناصرها أعداد صحيحة، بالمصفوفات الصّحيحة، ونرمز لمجموعة المصفوفات الصحيحة من المرتبة n بالرّمز $M_n(\mathbb{Z})$.

تعريف 2: [2]

لتكن $A،B،C \in M_n(\mathbb{Z})$ نسمّي الثّلاثيّة (A,B,C) ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة، إذا تحقّقت العلاقة:

$$A^2+B^2=C^2$$

مثال 1:

إنّ الثّلاثيّة الآتية هي ثلاثيّة فيثاغوريّة في $M_2(\mathbb{Z})$.

$$\left(\begin{pmatrix}5&1\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7&3\\3&1\end{pmatrix}\right)$$

نتيجة1:

لتكن $A،B،C \in M_n(\mathbb{Z})$ بحيث تكون هذه المصفوفات قطريّة، معرّفة بالشّكل:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \mu_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \mu_n\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}\upsilon_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \upsilon_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \upsilon_n\end{pmatrix}$$

إنّ الشّرط اللازم والكافي لتكون $\left(A,B,C\right)$ ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة، هو أن تكون الثّلاثيّات:

$$\left(\lambda_i\,,\mu_i\,,\upsilon_i\right);\, i\in\{1,\dots,n\}$$

ثلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{Z}$.

الإثبات:

بما أنّ:

$$A^2+B^2=\begin{pmatrix}\lambda_1{}^2+\mu_1{}^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2{}^2+\mu_2{}^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n{}^2+\mu_n{}^2\end{pmatrix}$$

$$C^2=\begin{pmatrix}\upsilon_1{}^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \upsilon_2{}^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \upsilon_n{}^2\end{pmatrix}$$

فإنّنا نلاحظ أنّ الشّرط اللازم والكافي ليكون: $A^2+B^2=C^2$ هو أن يكون:

$$\lambda_i{}^2+\mu_i{}^2=\upsilon_i{}^2\quad ;\, i\in\{1,\dots,n\}$$

وبهذا يتم المطلوب.

مثال2:

من أجل الثّلاثيّات $(3,4,5),(5,12,13),(7,24,25)$ الفيثاغوريّة في$\mathbb{Z}$ ، فإنّ الثّلاثيّة:

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}\right)$$

فيثاغوريّة في $M_3(\mathbb{Z})$.

مبرهنة 1:

بفرض أنّ (A,B,C) ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة في$M_n(\mathbb{Z})$، وبفرض $L \in M_n(\mathbb{Z})$ بحيث أنّ $\det(L)=\pm 1$ عندئذٍ فإنّ: $(LAL^{-1},LBL^{-1},LCL^{-1})$ ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة في$M_n(\mathbb{Z})$.

الإثبات:

بما أنّ (A,B,C) ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة في $M_n(\mathbb{Z})$، فإنّ:

$$A^2+B^2=C^2$$

من جهة أولى يكون:

$$\begin{aligned}(LAL^{-1})^2+(LBL^{-1})^2 &= LAL^{-1}.LAL^{-1}+LBL^{-1}LBL^{-1} \\ &= LA^2L^{-1}+LB^2L^{-1}=L\left(A^2+B^2\right)L^{-1}=LC^2L^{-1}\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى يكون:

$$\left(LCL^{-1}\right)^2 = LCL^{-1}.LCL^{-1} = LC^2L^{-1}$$

وبالتّالي فإنّ:

$$\left(LAL^{-1}\right)^2 + \left(LBL^{-1}\right)^2 = \left(LCL^{-1}\right)^2$$

بما أنّ $L \in M_n(\mathbb{Z})$ و $\det(L) = \pm 1$ فإنّ: $L^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$، وبالتّالي فإنّ كلّاً من $LAL^{-1}, LBL^{-1}, LCL^{-1}$ هي من $M_n(\mathbb{Z})$.

بهذا يتم المطلوب.

مثال3:

من أجل ثلاثيّة المصفوفات $\left(A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\right)$ الفيثاغوريّة في $M_2(\mathbb{Z})$. ومن أجل المصفوفة $L = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$، فإنّ ثلاثيّة المصفوفات:

$$\left(LAL^{-1}, LBL^{-1}, LCL^{-1}\right) = \left(\begin{pmatrix} -21 & 15 \\ -38 & 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -78 & 50 \\ -134 & 86 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -75 & 49 \\ -130 & 85 \end{pmatrix}\right)$$

ستكون فيثاغوريّة في $M_2(\mathbb{Z})$.

نتيجة 2:

بفرض أنّ (A, B, C) ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة في $M_n(\mathbb{Z})$، وبفرض $L \in M_n(\mathbb{Z})$ عندئذٍ فإنّ:

$$\left(\det(L) LAL^{-1}, \det(L) LBL^{-1}, \det(L) LCL^{-1}\right)$$

أي:

$$\left(L.A.\operatorname{adj}(L), L.B.\operatorname{adj}(L), L.C.\operatorname{adj}(L)\right)$$

ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة في $M_n(\mathbb{Z})$.

مثال4:

من أجل ثلاثيّة المصفوفات:

$$\left(A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\right)$$

الفيثاغوريّة في $M_2(\mathbb{Z})$،. ومن أجل المصفوفة $L = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$، وحيث إنّ $\det(L) = 3$، فإنّ

ثلاثيّة المصفوفات:

$$\left(3LAL^{-1}, 3LBL^{-1}, 3LCL^{-1}\right) = \left(\begin{pmatrix} -25 & 29 \\ -38 & 43 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -100 & 92 \\ -134 & 124 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -95 & 91 \\ -130 & 125 \end{pmatrix}\right)$$

ستكون فيثاغوريّة في $M_2(\mathbb{Z})$.

مبرهنة 2:

لتكن $A، B \in M_n(\mathbb{Z})$، بحيث: $A.B + B.A = O_n$، عندئذٍ تكون ثلاثيّة المصفوفات: $(A, B, A+B)$ فيثاغوريّة في $M_n(\mathbb{Z})$.

الإثبات:

ببساطة نجد:

$$(A+B)^2 = (A+B).(A+B) = A^2 + A.B + B.A + B^2 = A^2 + B^2$$

مثال 5:

من أجل:

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

واضح أنّ: $A.B+B.A=O_3$، وبالتّالي فإنّ ثلاثيّة المصفوفات الآتية ستكون فيثاغوريّة في $M_3(\mathbb{Z})$:

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\right)$$

نتيجة3:

بفرض $a، b \in \mathbb{Z}$ عندئذٍ ثلاثيّات المصفوفات الآتية فيثاغوريّة في $M_2(\mathbb{Z})$:

$$\left(\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & -a \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & -b \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & -a \end{pmatrix}\right)$$

ذلك أنّ المسقط الأوّل والثّاني في كل منها يحقّق المبرهنة السابقة.

مبرهنة 3:

لتكن $A \in M_n(\mathbb{Z})$ بحيث تكون A مصفوفة جامدة: $A^2 = A$ [2]. عندئذٍ تكون ثلاثيّة المصفوفات الآتية:

$$\left(A, I_n - A, I_n\right)$$

فيثاغوريّة في $M_n(\mathbb{Z})$.

الإثبات:

من كون:

$$A^2 + \left(I_n - A\right)^2 = A + \left(I_n - A\right).\left(I_n - A\right) = A + I_n{}^2 - I_n.A - A.I_n + A^2$$

$$= A + I_n - A - A + A = I_n = I_n{}^2$$

يتم المطلوب.

مثال 6:

لنأخذ المصفوفة: $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$، ولأنّ: $A^2 = A$ ومن ثمّ تكون ثلاثيّة المصفوفات الآتية ستكون فيثاغوريّة في $M_3(\mathbb{Z})$:

$$\left(A, I_3 - A, I_3\right) = \left(\begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

تمهيديّة 1:

لأجل أي عدد صحيح λ فإنّ الثّلاثيّات الآتية تكون فيثاغوريّة في □:

$$\left(\lambda,\ \frac{\lambda^2-1}{2}, \frac{\lambda^2+1}{2}\right) \quad ;\ \lambda \text{ is odd}$$

$$\left(\lambda,\ \frac{\lambda^2-4}{4}, \frac{\lambda^2+4}{4}\right) \quad ;\ \lambda \text{ is even}$$

الإثبات:

من المعلوم أنّه إذا كانت (α,β,γ)ثلاثيّة فيثاغوريّة أوليّة في $\mathbb{Z}$ ، عندئذٍ توجد الأعداد الصّحيحة r,s بحيث $r > s$ التي تحقق:[3]

$$\alpha = r^2 - s^2\,, \qquad \beta = 2rs\,, \qquad \gamma = r^2 + s^2$$

علاوةً على ذلك، فإنّ أي ثلاثية فيثاغورية أولية يمكن التعبير عنها بشكل وحيد بدلالة زوج من الأعداد الصحيحة r و s ليس كلاهما فردي.

ليكن الآن λ عدداً صحيحاً ، نريد تضمين هذا العدد في ثلاثية فيثاغورية ولأجل ذلك نحتاج لإيجاد أعداد صحيحة r, s لتشكيل هذه الثلاثية.

لنناقش أولاً فيما إذا كان λعدداً فردياً ، وسنبحث عن عددين r, s يحققان

$$\lambda\ = \mathrm{r}^2 - s^2$$

بسهولة يمكننا اختيار العددين الصحيحين

$$r = \frac{\lambda\ + 1}{2},\ \ s = \frac{\lambda\ - 1}{2}$$

ولنحصل بذلك على الثلاثية الفيثاغورية في$\mathbb{Z}$:

$$\left(\lambda,\ \frac{\lambda^2-1}{2},\frac{\lambda^2+1}{2}\right)$$

أما إذا كان λ عدد صحيح زوجي، عندئذٍ نبحث عن الأعداد الصّحيحة r,s بحيث:

$$\lambda = 2rs$$

يمكننا أيضاً هنا أن نختار الأعداد الصحيحة

$$r=\frac{\lambda}{2}\ ,\ s=1$$

ولنحصل بذلك على الثلاثية الفيثاغورية في$\mathbb{Z}$:

$$\left(\lambda,\ \frac{\lambda^2-4}{4},\frac{\lambda^2+4}{4}\right)$$

ملاحظة 1:

تجدر الإشارة هنا إلى أنّ الثّلاثيّة الفيثاغوريّة المشكّلة من العدد الصحيح λ ليس بالضّرورة أن تكون وحيدة، وعلى سبيل المثال:

من أجل العدد الصحيح $\lambda=20$ ، وباستخدام التمهيديّة نحصل على الثّلاثيّة $(20,99,101)$ ، كما يمكن التّأكّد من أنّ $(20,21,29)$ هي أيضاً ثلاثيّة فيثاغوريّة.

بالمقابل، إذا كان λ عدداً أوّليّاً، فإنّ الثّلاثيّة الفيثاغوريّة التي تتضمّن λ هي ثلاثيّة وحيدة. في الواقع بما أنّ λ إحدى مساقط ثلاثية فيثاغورية ، يوجد عددان صحيحان r,s بحيث يكون

$$\lambda=r^2-s^2=(r-s)(r+s)$$

وبما أن λ أولي فهذا يقودنا إلى النتيجة الحتمية

$$r+s=\lambda \text{ ، } r-s=1$$

ومنه نحصل

$$r = \frac{\lambda + 1}{2}, \quad s = \frac{\lambda - 1}{2}$$

حل وحيد ، وهذا ما يؤكد صحة الادعاء.

مبرهنة 4:

مهما تكن $A \in M_n(\mathbb{Z})$ بحيث تكون A مصفوفة قطريّة، توجد مصفوفتان B, C من $M_n(\mathbb{Z})$ بحيث تكون ثلاثيّة المصفوفات (A, B, C) فيثاغوريّة في $M_n(\mathbb{Z})$.

الإثبات:

بفرض $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ من $M_n(\mathbb{Z})$. بحسب التمهيديّة السّابقة فإنّ:

$$\left.\begin{array}{ll} \left(\lambda_i\,,\ \dfrac{\lambda_i{}^2-1}{2}, \dfrac{\lambda_i{}^2+1}{2}\right) & ;\ \lambda_i \text{ is odd} \\ \left(\lambda_i\,,\ \dfrac{\lambda_i{}^2-4}{4}, \dfrac{\lambda_i{}^2+4}{4}\right) & ;\ \lambda_i \text{ is even} \end{array}\right. \quad ; \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

ثلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{Z}$. وبحسب النتيجة 1 نضع:

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \upsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \upsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \upsilon_n \end{pmatrix}$$

بحيث:

$$\left.\begin{array}{ll} \mu_i = \dfrac{{\lambda_i}^2 - 1}{2}, \upsilon_i = \dfrac{{\lambda_i}^2 + 1}{2} & ;\ \lambda_i \text{ is odd} \\ \mu_i = \dfrac{{\lambda_i}^2 - 4}{4}, \upsilon_i = \dfrac{{\lambda_i}^2 + 4}{4} & ;\ \lambda_i \text{ is even} \end{array}\right. \quad ; \quad i \in \{1, ..., n\}$$

وبهذا يتم المطلوب.

مثال 7:

من أجل المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ فإنّ ثلاثيّة المصفوفات الآتية ستكون فيثاغوريّة في $M_3(\mathbb{Z})$:

$$\left(\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \right)$$

تعريف 3: [4]

إنّ المتّجه الذّاتي لتحويل خطّي t من $\mathbb{R}^2$ (أو $\mathbb{R}^3$) إلى نفسه، هو متّجه غير صفري v بحيث يكون:

$$t(v) = \lambda v$$

حيث λ عدد ما، يُدعى بالقيمة الذّاتية المقابلة.

تعريف 4: [4]

إذا كانت A مصفوفة تحويل خطّي من $\mathbb{R}^2$ (أو $\mathbb{R}^3$) إلى نفسه، فندعو المتّجه غير الصّفري v الذي يحقّق العلاقة $Av = \lambda v$ في حال عدد ما λ، متّجهاً ذاتيّاً لـ A، وتدعى λ القيمة الذّاتية المقابلة.

إنّ القيم الذّاتيّة λ لمصفوفة A مرتبتها $n \times n$، تحقّق المعادلة:

$$\det\left(A - \lambda I\right) = 0$$

التي تدعى بالمعادلة المميّزة لـ A ، حيث I هو المصفوفة الواحديّة.

ملاحظة 2: [4]

لكل مصفوفة من المرتبة $n \times n$ قيمة ذاتيّة حقيقيّة واحدة على الأقل.

تعريف 5: [4]

تكون المصفوفة A التي من المرتبة $n \times n$ قابلة للتّقطير إذا وُجدت مصفوفة قطريّة D من المرتبة $n \times n$ بحيث يكون:

$$D = P^{-1}AP$$

حيث P مصفوفة نظاميّة من المرتبة $n \times n$. إنّ عناصر القطر الرّئيسي لـ D هي القيم الذّاتيّة لـ A.

مبرهنة 5:

لتكن $A \in M_n(\mathbb{Z})$ بحيث تكون A مصفوفة قابلة للتقطير، وقيمها الذّاتية صحيحة، وتملك مصفوفة متّجهات ذاتية لها P بحيث $P \in M_n(\mathbb{Z})$ و $\det\left(P\right) = \pm 1$، عندئذٍ يمكن توليد ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة في $M_n(\mathbb{Z})$ ، من الشّكل $\left(A, B, C\right)$.

الإثبات:

باعتبار A مصفوفة تحقّق شروط المبرهنة، فيمكن كتابتها بالشّكل: $A = P.\tilde{A}.P^{-1}$، حيث $\tilde{A}$ قطرية في $M_n(\mathbb{Z})$ ، و P مصفوفة متّجهات ذاتية لـ A تحقق شروط المبرهنة.

وبالتالي بحسب المبرهنة 4 فإنّه توجد $\tilde{B}, \tilde{C}$ من $M_n(\mathbb{Z})$ والقطريّتان بحيث: $\left(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\right)$ ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة.

ومن ثمّ بحسب المبرهنة 1 فإنّ ثلاثيّة المصفوفات الآتية:

$$\left(P.\tilde{A}.P^{-1}, P.\tilde{B}.P^{-1}, P.\tilde{C}.P^{-1}\right) = \left(A, B, C\right)$$

فيثاغوريّة في $M_n(\mathbb{Z})$.

مثال 8:

من أجل المصفوفة: $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -15 & 9 \end{pmatrix}$ مصفوفة من $M_2(\mathbb{Z})$، إنّ لهذه المصفوفة قيمتان ذاتيّتان صحيحتان هما $\{3,4\}$. كما أنّ المتّجه $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ذاتيّ يقابل القيمة $\lambda_1 = 3$ ، والمتّجهات الذاتية المقابلة للقيمة $\lambda_2 = 4$ هي من الشّكل: $\begin{pmatrix} a \\ 3a \end{pmatrix}$.

إنّ القيمة $a = 1$ تجعل $P = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 5 & 3a \end{pmatrix}$ من $M_2(\mathbb{Z})$، و $\det(P) = 1$. ويكون:

$$A = P.\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.P^{-1} \;\; ; \;\; P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

من أجل المصفوفة: $\tilde{A}=\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}$ ، فإنّ ثلاثيّة المصفوفات الآتية تكون فيثاغوريّة في $M_2(\mathbb{Z})$:

$$\left(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}\right)=\left(\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&0\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}\right)$$

وبالتّالي ثلاثيّة المصفوفات الآتية ستكون فيثاغوريّة في $M_2(\mathbb{Z})$:

$$\left(A,B,C\right)=\left(P.\tilde{A}.P^{-1},P.\tilde{B}.P^{-1},P.\tilde{C}.P^{-1}\right)=$$
$$=\left(\begin{pmatrix}-2&2\\-15&9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&-2\\15&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}\right)$$

5. النتائج والمقترحات

تمكّنا في هذا البحث من توليد ثلاثية مصفوفات فيثاغوريّة جديدة انطلاقاً من ثلاثيّة موجودة (المبرهنة 1 والنتيجة 2)، كما درسنا إمكانية توليد ثلاثية مصفوفات فيثاغوريّة بشروط معيّنة (المبرهنتين 2 و3) ، ومن ثمّ درسنا إمكانيّة إيجاد ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة انطلاقاً من مصفوفة واحدة، وفق الحالات الآتية:

1. مصفوفة صحيحة قطريّة (المبرهنة 4).

2. مصفوفة قابلة للتقطير وقيمها الذّاتيّة صحيحة وتملك مصفوفة متّجهات ذاتيّة صحيحة ومحدّدها $+1$ أو -1(المبرهنة 5).

ويقترح الباحثان دراسة إمكانية معرفة فيما إذا كانت مصفوفة مربّعة صحيحة هي أوّل فيثاوغوري في ثلاثية مصفوفات فيثاغوريّة أم لا، والبحث عن الثاني والثالث الفيثاغوريّان.

6. المراجع

[1] Arnold، M.، & Eydelzon، A. (2019). On matrix Pythagorean triples. *American Mathematical Monthly*، *116* (2)، 158–160.

[2] Vălcan، T. D. (2019). From Diofantian equations to matricial equations (I) – Equations and Pythagorean matrices. *Journal of Education & Social Policy*، *6* (1)، 60–73.

[3] Al-Husseini، D.، & Qabeel، M. B. (2007). *Number theory*. University of Damascus، Faculty of Sciences Publications.

[4] Horn، R. A.، & Johnson، C. R. (1985). *Matrix analysis*. Cambridge University Press.

دراسة في بنية الخماسيات الفيثاغورية الجبريّة، واستخدامها في توليد فيثاغوريّات

اعداد الدكتور باسل العرنوس

ملخّص البحث

قمنا في هذا البحث بدراسة في بنية الخماسيات الفيثاغوريّة $(PP_5,*)$ حيث بيّنّا أنّ هذه البنية تقبل عنصراً محايداً، وأوجدنا العناصر القابلة للقلب بالنّسبة للعمليّة*، واستخدمنا مفهوم شبه المقلوب لحل معادلات تتضمّن العمليّة *.

أوجدنا طرقاً لتوليد خماسيّات فيثاغوريّة من رباعيّات فيثاغوريّة، وتوليد خماسيّات من ثلاثيّات فيثاغوريّة، وأخيراً طرقاً لتوليد ثلاثيّات فيثاغوريّة من ثلاثيّات فيثاغوريّة من خلال عملية مغلقة $\odot$.

الكلمات المفتاحيّة:

خماسيّة فيثاغوريّة، رباعيّة فيثاغوريّة، ثلاثيّة فيثاغوريّة، بنية، نصف زمرة، محايد، نصف مقلوب.

A Study on the Algebraic Structure of Pythagorean Quintuples and Their Use in Generating Pythagorean Triples

Abstract

In this research, we studied the structure of Pythagorean Quintuples $(PP_5,*)$, demonstrating that this structure possesses an identity element. We identified the invertible elements with respect to the operation $*$ and employed the concept of a semi−inverse to solve equations involving the $*$ operation.

We developed methods for generating Pythagorean Quintuples from Pythagorean Quadruples, generating Quintuples from Pythagorean Triples, and finally, methods for generating new Pythagorean Triples from existing ones through a closed operation $\odot$.

Keywords:

Pythagorean Quintuple, Pythagorean Quadruple, Pythagorean Triple, Algebraic Structure, Semigroup, Identity Element, Semi−inverse.

1.مقدّمة

تهدف دراسة الفيثاغوريّات في معظم حالاتها إلى إيجاد طرائق توليد لهذه الفيثاغوريّات، بدءاً من صيغة إقليدس لتوليد الثلاثيات الفيثاغوريّة إلى طريقة الأشجار الثلاثية، وهكذا.

ثمّ ظهرت طرائق توليد جديدة تعتمد على الفيثاغوريّات نفسها، وذلك من خلال تعريف عمليّات مغلقة على الفيثاغوريّات.

ففي العام 1984 عرّف إيكيرت Eckert عمليّة جمع بين الثلاثيّات الفيثاغوريّة التي عناصرها من $\mathbf{Z}$ ، على النحو الآتي:

$$\left(a_1,b_1,c_1\right)+\left(a_2,b_2,c_2\right)=\left(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2,c_1c_2\right)$$

بحيث تشكّل مجموعة كلّ الثّلاثيّات الفيثاغوريّة الصحيحة بالإضافة إلى $(1,0,1)$ مع العمليّة $+$ زمرة تبديلية $[1]$.

بعد ذلك في العام 1991 قام زناردو Zanardo و زانيير Zannier بتعميم المجال من $\mathbf{Z}$ إلى أي حلقة من الأعداد الصحيحة $[2]$ R .

في العام 1996 قام بيوريجارد Beauregard و سوريانريان Suryanarayan بتعريف عمليّة مغلقة $*$ على مجموعة كل الثلاثيّات الفيثاغوريّة الصحيحة، على النحو الآتي $[3]$:

$$\left(a_1,b_1,c_1\right)*\left(a_2,b_2,c_2\right)=\left(a_1a_2,b_1c_2,c_1b_2+b_1b_2+c_1c_2\right)$$

في العام 2025 قام العرنوس بتعريف عمليّة مغلقة $*$على مجموعة كل الخماسيّات الفيثاغوريّة PP_5، وأثبت أنّ البنية $(PP_5,*)$ هي نصف زمرة، وأوجد العنصر المحايد بالنسبة للعمليّة $*$ [4].

ندرس في هذا البحث خواص هذه البنية من حيث العناصر القابلة للقلب، وطرائق أخرى لتوليد الخماسيات الفيثاغوريّة وكذلك الثلاثيات الفيثاغوريّة.

2. هدف البحث

يهدف البحث إلى إيجاد العناصر القابلة للقلب في بنية الخماسيات الفيثاغوريّة الجبريّة. وإيجاد طرائق أخرى لتوليد الخماسيات الفيثاغوريّة وكذلك الثلاثيات الفيثاغوريّة.

3. المناقشة و النّتائج

أوّلاً: الخماسيّات الفيثاغوريّة $\mathbb{Z}$:

نعلم من نظريّة الأعداد، أنّ الثّلاثيّات الفيثاغوريّة في $\mathbb{Z}$ هي مجموعة كلّ الثّلاثيّات $\{x,y,z\}$ التي تحقّق معادلة ديوفانتس الآتية:

$$x^2+y^2=z^2 \;\; ; \;\; x,y,z \in \mathbb{Z}$$

وعليه فإنّ الخماسيّات الفيثاغوريّة، هي مجموعة كلّ الخماسيّات $\{x,y,z,w,r\}$ والتي تحقّق معادلة ديوفانتس الآتية:

$$x^2+y^2+z^2+w^2=r^2 \;\; ; \;\; x,y,z,w,r \in \mathbb{Z}^+$$

تعريف 1:

تسمّى خماسيّة فيثاغوريّة، كلّ خماسيّة (a,b,c,d,e)، حيث $a,b,c,d,e \in \mathbb{Z}$، وتحقّق:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2$$

سنرمز لمجموعة كلّ الخماسيّات الفيثاغوريّة بالرّمز PP_5 وبالتّالي يكون:

$$PP_5=\{(a,b,c,d,e);\ a^2+b^2+c^2+d^2=e^2 : a,b,c,d,e\in\mathbb{Z}\}$$

مبرهنة 1 وتعريف 2:[4]

ليكن $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5),(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in PP_5$، نعرّف على PP_5 العمليّة الثّنائيّة الآتية:

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$$

حيث:

$$\begin{aligned} c_1&=a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4\\ c_2&=a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3\\ c_3&=a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4\\ c_4&=a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2 \end{aligned}\quad,\quad c_5=a_5b_5$$

عندئذٍ $(PP_5,*)$ بنية جبريّة.

مبرهنة 2:[4]

تقبل العمليّة * في البنية الجبريّة $(PP_5,*)$ عنصراً محايداً، هو $(1,0,0,0,1)$.

مبرهنة 3:[4]

إنّ العمليّة * في البنية الجبريّة $(PP_5,*)$ هي عمليّة تجميعيّة.

مبرهنة 4: العناصر القابلة للقلب في $(PP_5,*)$

إنّ عدد العناصر القابلة للقلب في $(PP_5,*)$ هو 16.

الإثبات:

بفرض $\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right)\in PP_5\setminus\left\{(0,0,0,0,0)\right\}$ ولنفرض أنّه قابلاً للقلب بالنسبة للعمليّة $*$، وبالتالي يوجد $\left(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\right)\in PP_5$، بحيث:

$$\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right)*\left(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\right)=\left(1,0,0,0,1\right) \qquad (4)$$

$$\left(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\right)*\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right)=\left(1,0,0,0,1\right) \qquad (5)$$

من $(5),(4)$ يتّضح أنّ:

$$a_5.b_5=1 \qquad (6)$$

لنعرّف العددين:

$$p_1=\frac{a_1}{a_5}+\frac{a_2}{a_5}i+\frac{a_3}{a_5}j+\frac{a_4}{a_5}k\,,\qquad p_2=\frac{b_1}{b_5}+\frac{b_2}{b_5}i+\frac{b_3}{b_5}j+\frac{b_4}{b_5}k$$

وليكن $p_1.p_2=1$ عندئذٍ فإنّ:

$$p_2=\frac{1}{p_1}=\frac{\overline{p}_1}{\left|p_1\right|^2}=\frac{a_1}{a_5}-\frac{a_2}{a_5}i-\frac{a_3}{a_5}j-\frac{a_4}{a_5}k$$

وبالتّالي نضع:

$$\left(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\right)=\left(a_1,-a_2,-a_3,-a_4,a_5\right) \qquad (7)$$

وبملاحظة أنّ:

$$\begin{aligned}\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right)*\left(a_1,-a_2,-a_3,-a_4,a_5\right)&=\left(a_5^{\,2},0,0,0,a_5^{\,2}\right)\\ \left(a_1,-a_2,-a_3,-a_4,a_5\right)*\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right)&=\left(a_5^{\,2},0,0,0,a_5^{\,2}\right)\end{aligned} \qquad (8)$$

من العلاقة (6) ومن العلاقتين الأخيرتين يتّضح أنّ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) يكون قابلاً للقلب إذا وفقط إذا كان: $a_5=+1$ أو $a_5=-1$. وعليه فإنّ العناصر في $(PP_5,*)$ القابلة للقلب، استناداً إلى (7) هي:

م	العنصر من $(PP_5,*)$	مقلوبه
1	$(1,0,0,0,1)$	$(1,0,0,0,1)$
2	$(-1,0,0,0,1)$	$(-1,0,0,0,1)$
3	$(1,0,0,0,-1)$	$(1,0,0,0,-1)$
4	$(-1,0,0,0,-1)$	$(-1,0,0,0,-1)$
5	$(0,1,0,0,1)$	$(0,-1,0,0,1)$
6	$(0,1,0,0,-1)$	$(0,-1,0,0,-1)$
7	$(0,-1,0,0,1)$	$(0,1,0,0,1)$
8	$(0,-1,0,0,-1)$	$(0,1,0,0,-1)$
9	$(0,0,1,0,1)$	$(0,0,-1,0,1)$
10	$(0,0,1,0,-1)$	$(0,0,-1,0,-1)$
11	$(0,0,-1,0,1)$	$(0,0,1,0,1)$
12	$(0,0,-1,0,-1)$	$(0,0,1,0,-1)$
13	$(0,0,0,1,1)$	$(0,0,0,-1,1)$
14	$(0,0,0,1,-1)$	$(0,0,0,-1,-1)$
15	$(0,0,0,-1,1)$	$(0,0,0,1,1)$
16	$(0,0,0,-1,-1)$	$(0,0,0,1,-1)$

تعريف 3:

ليكن $A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\in PP_5$ حيث $a_5\notin\{1,-1\}$ فإنّنا نسمّي العنصر:

$$\tilde{A}=\left(a_1,-a_2,-a_3,-a_4,a_5\right)$$

شبه مقلوب العنصر A.

نتيجة 1:

إنّ البنية $\left(PP_5,*\right)$ هي نصف زمرة، تقبل الخماسيّة $\left(1,0,0,0,1\right)$ عنصراً محايداً، ويوجد لـ16عنصراً منها مقلوباً بالنّسبة للعمليّة *، أمّا بقيّة العناصر ما عدا $\left(0,0,0,0,0\right)$ فلكلّ عنصر شبه مقلوب.

نتيجة 2:

من العلاقة $\left(8\right)$ يتّضح أنّه إذا كان $A,B\in PP_5$، وكانت المعادلة:

$$A*X=B$$

قابلة للحل في PP_5 فإنّ:

$$X=\frac{1}{{a_5}^2}\tilde{A}*B \qquad (9)$$

وإذا كانت المعادلة: $X*A=B$ قابلة للحل في PP_5 فإنّ:

$$X=\frac{1}{{a_5}^2}B*\tilde{A} \qquad (10)$$

مثال 3:

ليكن: $A=\left(1,4,8,12,15\right),B=\left(2,4,5,6,9\right)$، وبما أنّ:

$$A*B=\left(-126,0,45,18,135\right)$$

فإنّ المعادلة:

$$A*X=\left(-126,0,45,18,135\right)$$

قابلة للحل في PP_5، وحلّها بحسب العلاقة (9)، هو:

$$X = \frac{1}{225}\tilde{A} * (-126, 0, 45, 18, 135) =$$
$$= \frac{1}{225}(1, -4, -8, -12, 15) * (-126, 0, 45, 18, 135)$$
$$= \frac{1}{225}(450, 900, 1125, 1350, 2025) = (2, 4, 5, 6, 9)$$

وهذا منطقي.

سادساً: توليد خماسيّات فيثاغوريّة من رباعيّات فيثاغوريّة أو ثلاثيّات فيثاغوريّة.

1. التوليد من رباعيّات فيثاغوريّة

يمكن استخدام العمليّة * لتعريف عمليّات غرضها توليد خماسيّات فيثاغوريّة، وذلك بتمديد الرباعيّات الفيثاغوريّة لتصبح خماسيّات.

فالرباعيّة الفيثاغوريّة (a, b, c, e) تحقّق:

$$a^2 + b^2 + c^2 = e^2 \qquad (11)$$

ويمكن تمديدها بأربعة طرق لتصبح خماسيّة، على النّحو:

$$(a, b, c, 0, e), (a, b, 0, c, e), (a, 0, b, c, e), (0, a, b, c, e)$$

وبالتّالي بتطبيق العمليّة * على خماسيّتين ممدّدتين من رباعيّات فيثاغوريّة نحصل على خماسيّة فيثاغوريّة.

فمن أجل الرباعيّتين: $(a,b,c,e),(x,y,z,r)$ يمكن توليد خماسيّات فيثاغوريّة بتطبيق العلاقة * بعدّة طرق، وذلك تبعاً لاختلاف طرق تمديد الرباعيّة الفيثاغوريّة إلى خماسيّة فيثاغوريّة، نضع مثلاً:

$$(a,b,0,c,e)*(x,y,z,0,r)=$$
$$=(ax-by,ay+bx-cz,az+cy,cx+bz,er)$$

بأخذ كلّ طرق التمديد وتطبيق العلاقة * نحصل من الرباعيّتين:

$$(a,b,c,e),(x,y,z,r)$$

على الخماسيّات الآتية:

$$(ax-by-cz\ ,ay+bx\ ,az+cx\ ,bz-cy\ ,er) \qquad (12)$$

$$(ax-by\ ,ay+bx-cz\ ,az+cy\ ,cx+bz\ ,er) \qquad (13)$$

$$(ax-bz\ ,ay-cz\ ,az+bx+cy\ ,cx-by\ ,er) \qquad (14)$$

$$(-ay-bz\ ,ax-cz\ ,bx+cy\ ,cx+az-by\ ,er) \qquad (15)$$

$$(ax-by\ ,ay+bx+cz\ ,cx-bz\ ,az-cy\ ,er) \qquad (16)$$

$$(ax-by-cz\ ,ay+bx\ ,cy-bz\ ,az+cx\ ,er) \qquad (17)$$

$$(ax-cz\ ,ay+bz\ ,bx+cy\ ,az+cx-by\ ,er) \qquad (18)$$

$$(-ay-cz\ ,ax+bz\ ,bx+cy-az\ ,cx-by\ ,er) \qquad (19)$$

$$(ax-cy\ ,bx+cz\ ,ay+cx-bz\ ,az+by\ ,er) \qquad (20)$$

$$(ax-cz\ ,bx-cy\ ,ay-bz\ ,az+cx+by\ ,er) \qquad (21)$$

$$\left(ax-by-cz\ ,bz-cy\ ,ay+bx\ ,az+cx\ ,er\right) \qquad (22)$$

$$\left(-by-cz\ ,ax+bz-cy\ ,bx-az\ ,cx+ay\ ,er\right) \qquad (23)$$

$$\left(-bx-cy\ ,ax+cz\ ,ay-bz\ ,az+by-cx\ ,er\right) \qquad (24)$$

$$\left(-bx-cz\ ,ax-cy\ ,ay+cx-bz\ ,az+by\ ,er\right) \qquad (25)$$

$$\left(-by-cz\ ,ax+bz-cy\ ,ay+cx\ ,az-bx\ ,er\right) \qquad (26)$$

$$\left(-ax-by-cz\ ,bz-cy\ ,cx-az\ ,ay-bx\ ,er\right) \qquad (27)$$

هذا يعني أنّه انطلاقاً من رباعيّتين فيثاغوريّتين يمكن توليد خماسيّات فيثاغوريّة بـ16 طريقة مختلفة، جميعها لها الخامس الفيثاغوري ذاته.

نوضّح ذلك من خلال المثال الآتي:

مثال 4:

عند تطبيق العلاقات من (12) إلى (27) على الرباعيتين $(2,6,3,7)$ ، $(8,1,4,9)$ نحصل على الخماسيات:

العلاقة	الخماسيّة	العلاقة	الخماسيّة
(12)	$(-2,50,32,21,63)$	(20)	$(13,60,2,14,63)$
(13)	$(10,38,11,48,63)$	(21)	$(4,45,-22,38,63)$
(14)	$(-8,-10,59,18,63)$	(22)	$(-2,21,50,32,63)$
(15)	$(-26,4,51,26,63)$	(23)	$(-18,37,40,26,63)$
(16)	$(10,62,0,5,63)$	(24)	$(-51,28,-22,-10,63)$
(17)	$(-2,50,-21,32,63)$	(25)	$(-60,13,2,14,63)$
(18)	$(4,26,51,26,63)$	(26)	$(-18,37,26,-40,63)$
(19)	$(-14,40,43,18,63)$	(27)	$(-34,21,16,-46,63)$

2. التوليد من ثلاثيّات فيثاغوريّة

بنفس الطريقة يمكن توليد خماسيّات فيثاغوريّة من ثلاثيّات فيثاغوريّة، فإذا أهملنا إشارة وترتيب المركّبات الأربع الأولى في الخماسيّة، فإنّ الثلاثيّتين $(x,y,r),(a,b,e)$ تولّدان الخماسيّة:

$$(ax\ ,ay\ ,bx\ ,by\ ,er) \qquad (28)$$

مثال 5:

من أجل الثّلاثيّتين $(3,4,5)$، $(5,12,13)$ نحصل بتطبيق (28) على الخماسيّة الفيثاغوريّة:

$$(15\ ,\ 36\ ,\ 20,\ 48\ ,\ 65)$$

3. توليد ثلاثيّات فيثاغوريّة من ثلاثيّات فيثاغوريّة

لدى تطبيق العمليّة * على كلّ الخماسيّات الفيثاغوريّة التي تمّ توليدها من الثّلاثيّتين (a,b,e) ، (x,y,e) فإنّنا نحصل على خماسيّات فيها مركّبات صفريّة، وبالنّتيجة نحصل على ثلاثيّات فيثاغوريّة، وبالتّالي نحصل على توليد لثلاثيّات فيثاغوريّة من ثلاثيّات فيثاغوريّة.

لتوضيح الأمر، نلاحظ أنّ:

$$(0,a,0,b,e)*(x,0,y,0,r)=(0\ ,\ ax-by\ ,0,bx+ay\ ,er)$$

وبالتّالي يمكن تعريف عمليّة مغلقة على الثّلاثيّات الفيثاغوريّة على النّحو:

$$(a,b,e)\square\ (x,y,r)=(ax-by\ \ ,bx+ay\ ,er) \qquad (29)$$

وهذه العلاقة مطابقة تماماً لما توصّل إليه إيكارت [1].

مثال 6:

نلاحظ أنّ:

$$(3,4,5)\square\ (5,12,13)=(-33\ ,56,65)$$

في الحقيقة بالإضافة إلى العلاقة (29) يمكن برصد كلّ نتائج العمليّة * على الخماسيّات الممدّدة من الثّلاثيّتين (a,b,e)، (x,y,e)، أن نعرّف العمليّات المغلقة الآتية على الثّلاثيّات الفيثاغوريّة:

$$(a,b,e)\odot(x,y,r)=(ax+by\ ,bx-ay\ ,er) \qquad (30)$$

$$(a,b,e)\odot(x,y,r)=(-ax-by\ ,bx-ay\ ,er) \qquad (31)$$

$$(a,b,e)\odot(x,y,r)=(ax+by\ ,ay-bx\ ,er) \qquad (32)$$

$$(a,b,e)\odot(x,y,r)=(-ax-by\ ,ay-bx\ ,er) \qquad (33)$$

4. النتائج الأساسية للبحث

1. تمكّن البحث من تحديد ووصف جميع العناصر داخل البنية الجبرية للخماسيات الفيثاغورية التي تمتلك عنصراً مقلوباً فيما يتعلق بالعملية الثنائية المُعرَّفة (*). وُجد أن هناك 16 عنصراً قابلاً للقلب بشكل كامل من بين جميع العناصر في هذه البنية.
2. بالنسبة للعناصر التي لا تمتلك مقلوباً كاملاً، قدم البحث مفهوم "شبه المقلوب" كأداة بديلة. هذا المفهوم أثبت فعاليته في حل أنواع معينة من المعادلات داخل هذه البنية الجبرية، حتى عندما لا يكون العنصر قابلاً للعكس تماماً.
3. طوّر البحث طرائق منهجية لتوليد خماسيات فيثاغورية جديدة انطلاقاً من: رباعيات فيثاغورية موجودة مسبقاً، حيث تم اقتراح 16 طريقة مختلفة لتحويل الرباعيات إلى خماسية وإجراء العمليات عليها لتوليد خماسيات جديدة، جميعها تشترك في نفس القيمة للخامس الفيثاغوري. وكذلك من ثلاثيات فيثاغورية موجودة مسبقاً، مما يوسع نطاق الطرق المتاحة للتوليد.
4. كشف البحث عن أن تطبيق العملية (*) على خماسيات مُولَّدة من ثلاثيات يقود في حالات معينة إلى الحصول على ثلاثيات فيثاغورية جديدة. أدى هذا الاكتشاف إلى تعريف عملية مغلقة جديدة (⊙) على مجموعة الثلاثيات الفيثاغورية نفسها. ومن المثير للاهتمام، أن هذه العملية الجديدة تتطابق مع العملية التي قدمها باحثون سابقون

(إيكيرت)، مما يؤكد صحتها ويعيد إنتاجها من خلال هذا الإطار النظري الأوسع والأكثر عمومية للخماسيات.

5. المقترحات والدراسات اللاحقة

1. يمكن تطوير خوارزميات حسابية فعالة مبنية على هذه الطرائق لتوليد أعداد كبيرة من الخماسيات والرباعيات والثلاثيات الفيثاغورية، ودراسة التوزيع الإحصائي للعناصر المُولَّدة.
2. محاولة تعميم هذا النهج ليشمل "السداسيات الفيثاغورية" وما فوقها، وفحص إمكانية تعريف عمليات ثنائية ذات خواص مماثلة على هذه المجموعات الأكبر.
3. استكشاف الروابط المحتملة بين هذه البنى الجبرية ونظريات أخرى في الرياضيات، مثل نظرية الزمر بمستوى أكثر تجريداً، أو حتى في مجالات تطبيقية.

4.المراجع العلمية

1. Eckert, E. J. (1984). The Group of Primitive Pythagorean Triangles. Mathematics Magazine, 57 (1), 22–27.
2. Zanardo, P., & Zannier, U. (1991). The group of pythagorean triples in number fields. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 159 (1), 81–88.
3. Beauregard, R. A., & Suryanarayan, E. R. (1996). Pythagorean Triples: The Hyperbolic View. The College Mathematics Journal, 27 (3), 170–181.
4. Al-Arnous, B. (2025). Semigroups on the set of Pythagorean quintuples. Homs University Journal, Series of Basic Sciences.

تأثير إشابة النيكل في الخصائص البنيوية لمركب فلوريد السترانسيوم

عمر العبوش[1]، مفيد دياب[2]، أحمد خضرو[3]

الملخص

حُضرت عينات من مسحوق فلوريد السترانسيوم مشابة بتراكيز مختلفة من النيكل باستخدام طريقة تفاعل الحالة الصلبة. وصفت العينات باستخدام جهاز التفاضل الحراري(DTA)، جهاز الانعراج بالأشعة السينية(XRD)، مطيافية الأشعة تحت الحمراء (FT−IR)، التألق الضوئي(PL). تم تلدين العينات عند درجة الحرارة $400℃$ لمدة 6 ساعات. دُرست الخصائص البنيوية لعينات فلوريد السترانسيوم النقية والمشابة. أظهرت تبلور وفق بنية بلورية مكعبية متمركزة الوجوه (FCC) تنتمي إلى المجموعة الفراغية (Fd3m). تم حساب ثابت الشبكة البلورية وحجم وحدة الخلية في مركب SrF_2 النقي والتوجه المفضل له هو (111). تم حساب حجم الحبيبات للعينات مختلفة باستخدام علاقة ديباي−شرر. وجد أن حجم الحبيبات البلورية يزداد مع زيادة نسبة اشابة النيكل. ظهور قمم إضافية عند اشابة النيكل بنسبة (0.5 wt%) تعود لمركب (NiO). أظهرت أطياف الاشعة تحت الحمراء عصابات امتصاص جديدة عند الاشابة بالنيكل بمختلف النسب، لوحظ عند اشابة النيكل بنسبة (0.5 wt%) اختفاء عصابات الامتصاص الدالة على ارتباط النيكل بفلوريد السترانسيوم وظهور عصابة جديدة تدل على تشكل أكسيد النيكل. وجود قمة اصدار عند طول موجة $\lambda_{em} = 470\ nm$ حيث كان الإصدار الأقوى للتألق عند الاشابة بالنيكل بالنسبة (0.45 wt %) من أجل إثارة عند الطول الموجي $\lambda_{exc} = 200\ nm$

[1]طالب دكتوراه: قسم الفيزياء− كلية العلوم − جامعة حمص− حمص− سوريا.
[2]أستاذ فيزياء في قسم الفيزياء − كلية العلوم−جامعة حمص.
[3] أستاذ فيزياء في قسم الفيزياء − كلية العلوم−جامعة اللاذقية.

الكلمات المفتاحية:*بودرة، فلوريد السترانسيوم، تفاعل الحالة الصلبة، الخصائص البنيوية،* **جهاز** *التفاضلي الحراري،* **جهاز** *الانعراج بالأشعة السينية، التألق الضوئي.*

Effect of chromium doping on the structural properties of strontium fluoride compound

O. Alaboush[1], M.Diab[2], A.Khoudro[3]

Abstract

Strontium fluoride powder samples doped with different concentrations of nickel were prepared using a solid−state reaction method. Strontium fluoride powder samples doped with different concentrations of Ni were prepared by solid−state reaction method. The samples were characterized by differential temperature analysis (DTA), X−ray diffraction (XRD), infrared spectroscopy (FT−IR), and photoluminescence (PL). The samples were annealed at 400℃ for 6 h. The structural properties of pure and doped strontium fluoride samples were studied. They showed face−centered cubic (FCC) crystal structure belonging to the (Fd3m) space group. The crystal lattice constant and unit cell volume of pure SrF_2 were calculated and its preferred orientation was (111). The grain size of different samples was calculated using Debye−Scherrer relation. It was found that the crystal grain size increased with

[1] PhD student: Department of physics: Faculty of Science-Al-Baath university, Syria
[2] Prof the physics: Department of physics -Faculty of Science-Al-Baath University, Syria
[3] Prof the physics: Department of physics -Faculty of Science- Tishreen University, Syria

increasing Ni doping ratio. The appearance of additional peaks at (0.5 wt%) Ni doping was attributed to (NiO) compound. The infrared spectra showed new absorption bands when doped with nickel at different ratios. When doped with nickel at a ratio of (0.5 wt%), the absorption bands indicating the association of nickel with strontium fluoride disappeared and a new band appeared indicating the formation of nickel oxide. The presence of an emission peak at a wavelength of $\lambda_{em} = 470\ nm$, where the strongest emission of fluorescence was when doped with nickel at a ratio of (0.45 wt%) for excitation at a wavelength of $\lambda_{exc} = 200\ nm$.

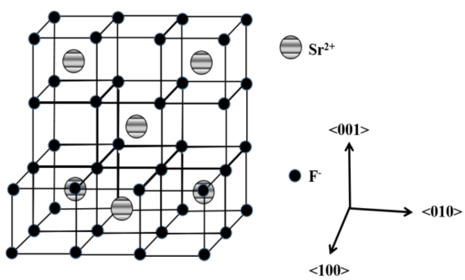
Keywords: *powder, SrF2, solid state reaction, Structural properties, DTA, XRD*

1. مقدمة

تعتبر الفلوريدات القلوية الأرضـية من المواد المهمة التي تشـكل أسـاسـاً مهماً في تطبيقات فيزياء المواد الكثيفة وعلوم المواد [1,2]. لقد جذبت الفلوريدات الأرضـــيـة القلويـة اهتمـامًا كبيرًا من الباحثين نظرًا لخصـــائصـــها المميزة مثل الأيونات العالية والفوتونات منخفضـــة الطاقة والمقاومة العالية والتوصيل الأنيوني بالإضـافة إلى سلوك متقبل الإلكترون [3,4]. يتبلور فلور السترانسيوم (SrF_2) في بنية الفلوريت المكعبية مع مجموعة فضـــــاء Fm3m مكعبة متقاربة من الكاتيونات مع الأنيونات التي تحتل مواقع رباعية السـطوح [5]. تتكون البلورة من شـبكة مكعبة بسـيطة من أنيون F^- مع كاتيونات Sr^{+2} تشغل كل مكعب شبكة F^- ثانية. ينتج عن ذلك ستة مواقع بينية أو مكعبات فارغة تحيط بكل منها أيون Sr^{+2} (الشـكل 1). يوجد مواقع مكعبية شـاغرة مسـاوية لعدد المواقع الكاتيونية المشغولة، يمكّن لبلورة SrF_2 استضافة عدد كبير من أنيون F^- البيني.

يملك SrF_2 مجال محظور واســـع (11ev)، فهو عازل وشـــفاف ضـــوئياً، له فوتون منخفض الطاقة، ومعامل انكسـار منخفض، ومقاومة عالية للإشـعاع وقوة ميكانيكية جيدة. وله بنية مكعبية مركزيـة الوجوه (Fcc)، وكثـافتـه 34.277g/cm. ووزنـه الجزيئي 152.62g/mol ، ودرجـة انصهاره 1477°C، وثابت الشبكة البلورية 5.798A [6].

المكعبات الفارغة المتبقية مهمة جداً لتشـكيل العيوب والانتشـار، ولاحتواء الشـوائب غير المرغوب فيها مثل العناصر الترابية النادرة [7] كما هو موضح في الشكل (1)



الشكل (1) رسم تخطيطي لبنية SrF2 النقي، والذي يوضح أن كل مكعب بسيط من الشكل الفرعي F^- يحتوي على أيون Sr^{+2} (الآخر فارغ).

يعتبر SrF_2 أسرع الوماضات المعروفة اليوم وله معدل انبعاث إشعاعي أقل من جزء من النانو ثانية ويصدر عدة أشعة ضوئية والأسرع في مجال الأشعة فوق البنفسجية في المجال (200−220 نانومتر) وله زمن اضمحلال لأسرع المكونات Ps 800−600. يلعب تعديل خصائص فلورة البلورات المشابة بعناصر منشطة دورًا مهمًا في تطوير أجهزة الكشف الضوئية المعتمدة على الفلوريدات. ولهذا السبب، تم توجيه الأبحاث منذ سنوات على مركبات الفلوريدات الفلورية، وخاصة تلك التي لها فسفرة وتعطي انبعاث فوتون متدفق [8,9].

2. أهداف البحث

يهدف هذا البحث إلى:

1- إشابة مركب فلوريد السترانسيوم بعنصر النيكل بنسب مختلفة
2- دراسة خصائص العينات بنيوياً وضوئياً.

3. مواد وطرق البحث

3 – 1 – الأجهزة والمواد المستخدمة

1- ميزان حساس بدقة 0.0001gr.
2- بوتقات خزفية تتحمل درجات حرارة حتى1200°C.
3- هاون عقيق لطحن العيّنات.
4- فرن لتلدين العيّنات من شركة (Carbolite) يصل أقصى درجة حرارة لـ 1100°C.
5- جهاز التحليل الحراري التفاضلي DTA وهو من نوع Shimadzu.
6- جهاز انعراج الأشعة السينية XRD من طراز Philips−PW−1840 الذي يعمل على مصعد من الكوبالت Co−Kα بطول موجه $\lambda = 1.7889A^{\circ}$.
7- جهاز الأشعة ما تحت الحمراء نموذج FT−IR−4100 من شركة Jasco.
8- جهاز الفلورة photo−Luminance (PLFS20).
9- بودرة فلوريد السترانسيوم ذات حجم حبيبي أقل من 5 ميكرو بنقاوة 99.9% من إنتاج شركة: SIGMA ALDRICH الأميركية و بودرة معدن النيكل ذات نقاوة 99.0% من إنتاج شركة TM MEDID و اسيتون نقي بنسبة 99% من إنتاج شركة: Eroulab.

3-2- تحضير العينات

تم تحضير العينات بطريقة تفاعل الحالة الصلبة. وفقاً لذلك، يتم خلط أوزان المساحيق المطلوبة لكل عينة للحصول على المركبات المطلوبة للدراسة، حيث تم ادخال شائبة النيكل بنسب وزنية محددة من الوزن الكلي للعينة (3g).

SrF_2: Ni_x (x=0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5) wt%

ويبين ذلك وفق الجدول (1).

الجدول (1) كتل المواد المستخدمة في تحضير العينات من أجل النسب الوزنية

X wt%	Ni	SrF_2
0.1	0.003	2.997
0.15	0.0045	2.9955
0.2	0.006	2.994
0.25	0.0075	2.9925
0.3	0.009	2.991
0.35	0.0105	2.9895
0.4	0.012	2.988
0.45	0.0135	2.9865
0.5	0.015	2.985

يتم طحن هذه المواد في هاون العقيق جيداً لتحويلها إلى مساحيق ناعمة جداً.

تم استخدام الأسيتون للمساعدة في خلط المركبات الصلبة أثناء عملية تحضير العينة بكميات صغيرة نسبيًا. تم طحن المواد السابقة وخلطها بهاون العقيق لضمان الحصول على خليط متجانس بعد إضافة كمية من الأسيتون لتحسين عملية الخلط المتجانسة له لمدة 15 دقيقة تقريباً حتى يجف الأسيتون. تكررت هذه العملية ثلاث مرات متتالية لكل عينة. بعد ذلك، يجفف الخليط الناتج بتسخينه إلى درجة حرارة 100°C لمدة كافية لضمان إزالة الرطوبة.

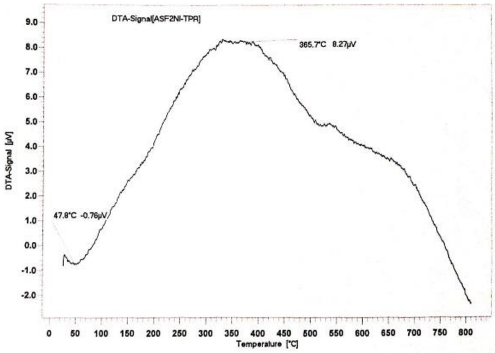
تم تلدين العينات عند درجة حرارة 400 درجة مئوية لمدة 6 ساعات، وبعد ذلك تم تبريد العينات تدريجياً في فرن التسخين إلى درجة حرارة الغرفة بمعدل 1 درجة مئوية / دقيقة.

4 – النتائج والمناقشة

4 –1 – الخصائص البنيوية للعينات المحضرة

4 –1 –1 – دراسة منحني التحليل الحراري التفاضلي DTA

يبين المنحني المبين في الشكل التالي السلوك الحراري للجملة حيث تم المسح ضمن مجال لدرجات الحرارة (0–1000 ºC). حيث تم اختيار النسبة (0.25) لدراسة التغيرات الحرارية.

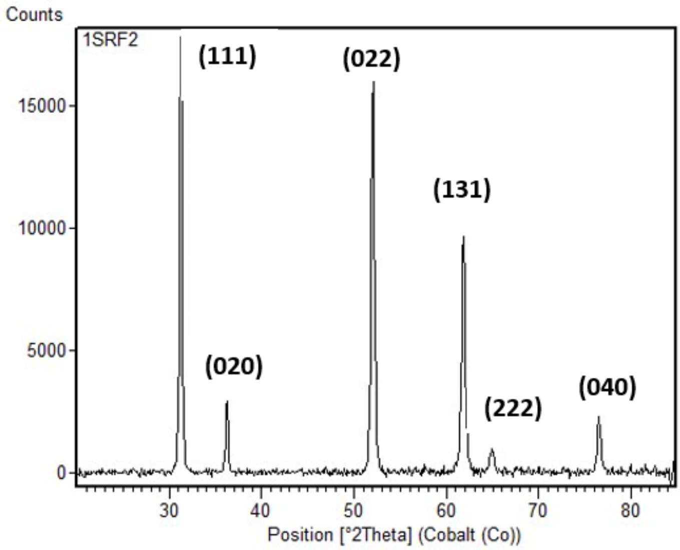


الشكل (1) مخطط (DTA) لجملة فلوريد السترانسيوم المشاب بالنيكل بنسبة (0.25)

يظهر على مخطط التحليل الحراري (DTA) للعينة المحضرة تأثيرات ناشرة للحرارة، يشير التأثير الحراري الأول الناشر للحرارة عند درجة الحرارة (365.7 ºC) إلى دخول النيكل الى داخل البنية البلورية لفلوريد السترانسيوم، ويشير التأثير الثاني الناشر للحرارة عند الدرجة (542.1 ºC) إلى تشكل أكسيد النيكل (NiO)، بينما يشير التأثير الحراري الثالث الناشر للحرارة عند الدرجة (677.3 °C) الى تشكل أكسيد السترانسيوم.

4 –1 –2 – مخططات انعراج الأشعة السينية (XRD) للمركب النقي (SrF_2) والمشاب بنسب مختلفة من النيكل.

تمت دراسة البنية البلورية لمركب فلوريد السترانسيوم النقي والمرمد عند الدرجة (400 °C) ولمدة (6h) وذلك ليطابق العينات المعالجة لاحقاً عند إضافة النيكل.



الشكل (2) طيف انعراج الأشعة السينية لمركب فلوريد السترانسيوم النقي

تم تحديد قرائن ميلر لقمم الانعراج لمركب فلوريد السترانسيوم النقي بالمقارنة مع بنك المعلومات **JCPDS** (Joint Committee on Powder Diffraction Standards) وتبين أن المخطط يتطابق مع البطاقة الرجعية (SrF_2: 96−900−9044).

يتبلور فلوريد السترانسيوم النقي وفق بنية بلورية مكعبية متمركزة الوجوه (FCC).

بالاستفادة من قياسات انعراج الأشعة السينية لمركب فلوريد السترانسيوم النقي تم تعيين القيمة الوسطية لثابت الشبكة البلورية a بعد حساب قيم d (المسافة بين المستويات البلورية) من قانون براغ [10]:

$$n\lambda = 2d.\sin\theta \qquad (1)$$

تم حساب ثابت الشبكة البلورية (a) في حالة البنية البلورية المكعبية وبالاعتماد على العلاقة الآتية [11] [12]:

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2 + k^2 + l^2}{a^2}$$

$$a = d\sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \qquad (2)$$

تم حساب حجم وحدة الخلية أيضاً الذي يعطى بالعلاقة [13]:

$$V = a^3 \qquad (3)$$

تم استنتاج حجم التبلور D للعينات بعد حساب العرض عند منتصف الشدة العظمى لقمم الانعراج باستخدام علاقة ديباي_شيرر:

$$D = \frac{0.94\lambda}{\beta \cos\theta} \qquad (4)$$

تم تقدير انفعال الشبكة البلورية ε وكثافة الانخلاعات δ من المعاملات البنيوية التي تم استخلاصها من طيف الانعراج السابق باستخدام العلاقتين (5) و (6) [14]:

$$\varepsilon = \frac{\beta \cos\theta}{4} \qquad (5)$$

$$\delta = \frac{n}{D^2} \qquad (6)$$

حيث أن:

n: عامل يعطي الحد الأدنى من الانخلاعات عندما يكون مساوياً للواحد.

β: عرض منتصف القمة ويؤخذ بواحدة الراديان عند منتصف الشدة العظمى.

θ: زاوية براغ.

يبين الجدول (2) القيم التي تم حسابها.

الجدول (2) قيم كلٍ من 2θ و d_{hkl} و a و V لمركب SrF2 النقي.

$a(A^\circ)$	$d_{hkl}\ (A^\circ)$	$2\theta(^\circ)$	(hkl)
5.753	3.32134	31.248	**(111)**
5.757	2.87869	36.207	**(020)**
5.769	2.03979	52.020	**(022)**

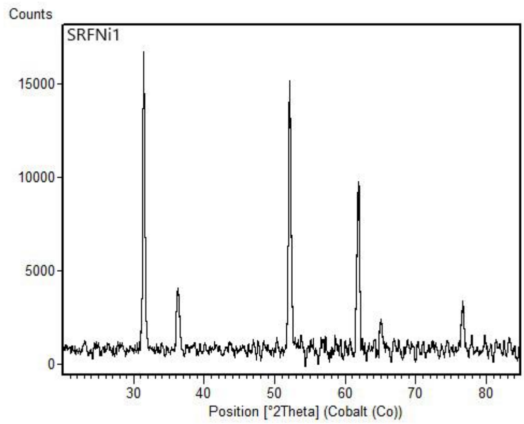
5.774	1.74107	61.830	**(131)**
5.775	1.66715	64.898	**(222)**
5.779	1.44474	76.507	**(040)**
$\boldsymbol{a = 5.768(\mathring{A})}$ $\boldsymbol{V = 191.904(A^{\circ})^3}$			

يوضح الجدول (3) قيم كلٍ من $D, \beta, \varepsilon, \delta$ لمركب فلوريد السترانسيوم النقي:

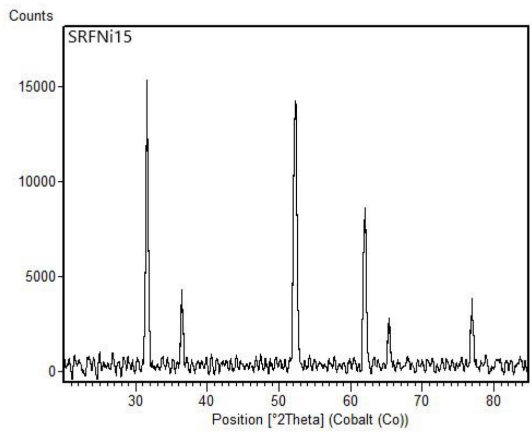
الجدول (3) قيم كلٍ من $\boldsymbol{D, \beta, \varepsilon, \delta}$ لمركب فلوريد السترانسيوم النقي

$\boldsymbol{\delta \times 10^{15}}$	$\boldsymbol{\varepsilon \times 10^{-3}}$	$\boldsymbol{D(nm)}$	$\boldsymbol{\beta(^{\circ})}$	$\boldsymbol{2\theta}$
50.807	94.764	4.436	0.3936	31.248
27.839	70.147	5.993	0.2952	36.207
24.888	66.325	6.339	0.2952	52.020
40.321	84.420	4.980	0.3936	61.830
60.954	103.796	4.050	0.492	64.898
33.781	77.271	5.441	0.3936	76.507
$\boldsymbol{\bar{D} = 5.207nm\ ,\ \delta = 39.765\ ,\ \varepsilon = 82.787}$				

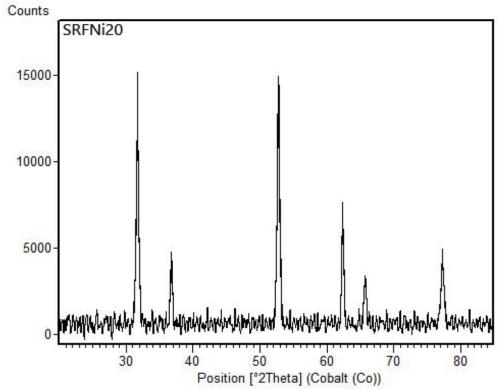
يبين الشكل (2) مخطط انعراج الأشعة السينة لمركب فلوريد السترانسيوم المشاب بالنيكل بنسبة (0.1 %) والمرمد عند الدرجة (400 °C) ولمدة (4h).



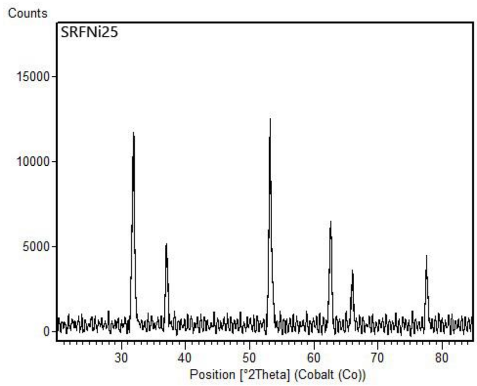
الشكل (3) طيف انعراج الأشعة السينية لجملة (SrF_2:0.1Ni)



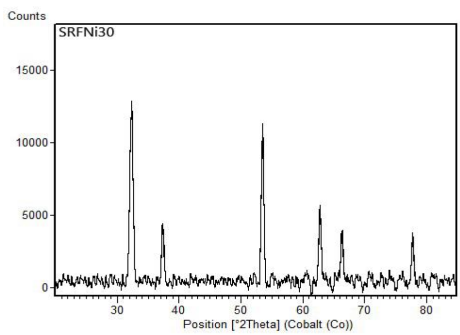
الشكل (4) طيف انعراج الأشعة السينية لجملة (SrF_2:0.15Ni)



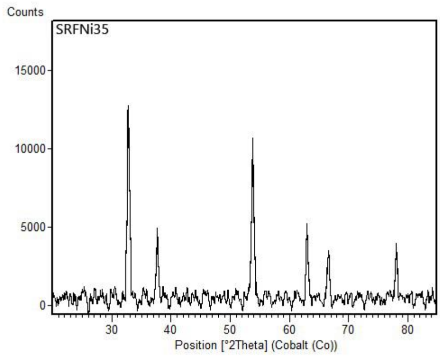
الشكل (5) طيف انعراج الأشعة السينية لجملة (SrF_2:0.2Ni)



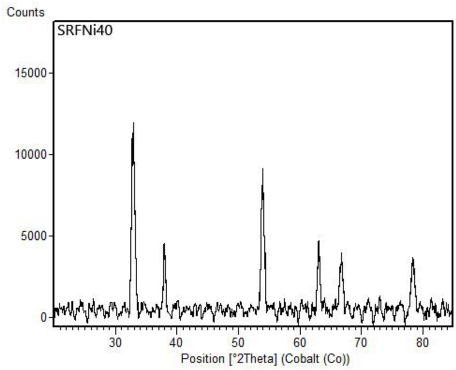
الشكل (6) طيف انعراج الأشعة السينية لجملة (SrF_2:0.25Ni)



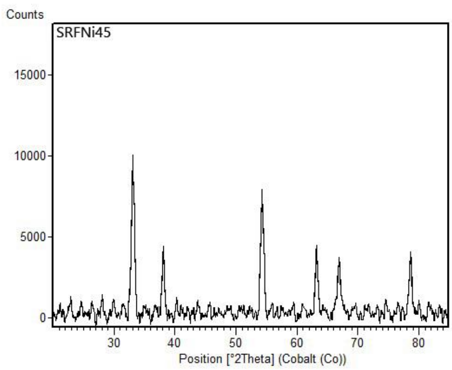
الشكل (7) طيف انعراج الأشعة السينية لجملة (SrF_2:0.3Ni)



الشكل (8) طيف انعراج الأشعة السينية لجملة $(SrF_2:0.35Ni)$



الشكل (9) طيف انعراج الأشعة السينية لجملة $(SrF_2:0.4Ni)$



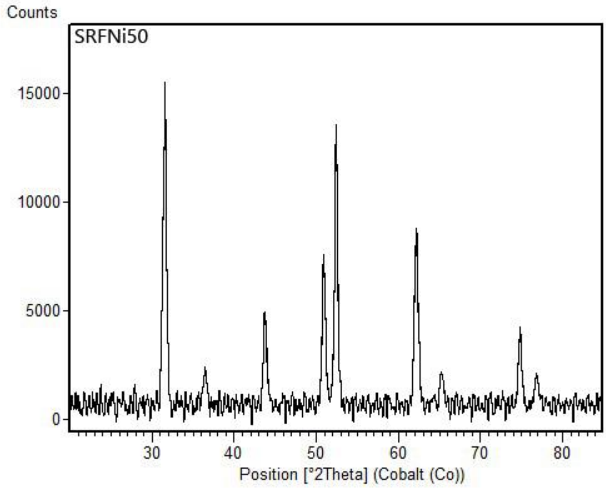
الشكل (10) طيف انعراج الأشعة السينية لجملة $(SrF_2:0.45Ni)$

لم يُلاحظ في الاشكال السابقة تغيير واضح قي القمم سوى انزياحات طفيفة في مواقع القمم نحو زوايا الانعراج الأعلى مما يدل على توسع البلورات، كما أن جميع القمم تعود لمركب فلوريد السترانسيوم النقي[15].

يبين الجدول (4) قيم حجم التبلور وثابت الشبكة لمركب فلوريد السترانسيوم المشاب بنسب محتلفة من النيكل.

الجدول (4) قيم حجم التبلور وثابت الشبكة لمركب فلوريد السترانسيوم

X wt%	$a(A^\circ)$	$V(A^\circ)^3$	$\bar{D}(nm)$
0.1	5.765	191.559	6.374
0.15	5.744	189.498	6.999
0.2	5.716	186.764	7.767
0.25	5.690	184.265	7.776
0.3	5.655	180.928	8.381
0.35	5.630	178.492	8.644
0.4	5.612	176.810	9.074
0.45	5.584	174.244	9.672



الشكل (11) طيف انعراج الأشعة السينية لجملة (SrF_2:0.5Ni)

يلاحظ من المخطط الناتج ظهور قمم إضافية وذلك عند اشابة النيكل بنسبة 0.5% مما يدل على وجود طور آخر وبالبحث ضمن المركبات المحتمل تشكلها تبين أن قرائن ميلر للقمم (022) (020) (111) المقابلة للزوايا (74.748) ,(50.837,)(43.643) على التوالي الإضافية تعود لمركب (NiO) بما يتطابق مع البطاقة المرجعية (NiO: 96−101−0094) مع بقاء القمم الأساسية العائدة لفلوريد السترانسيوم بما يتوافق مع البطاقة المرجعية (SrF2: 96−900−9044). وبناء عليه تم دراسة كل طور لوحده

يبين الجدول (5) قيم كلٍ من 2θ و d_{hkl} و a و V لجملة *(SrF_2:0.5Ni)*.

الجدول (5) قيم كلٍ من 2θ و d_{hkl} و a و V لجملة (SrF2:0.5Ni)

(hkl)	$2\theta(°)$	$d_{hkl}\ (A°)$	$a(A°)$
(111)	31.447	3.301	5.717
(020)	36.328	2.869	5.739
(022)	52.311	2.029	5.740
(131)	62.117	1.734	5.750

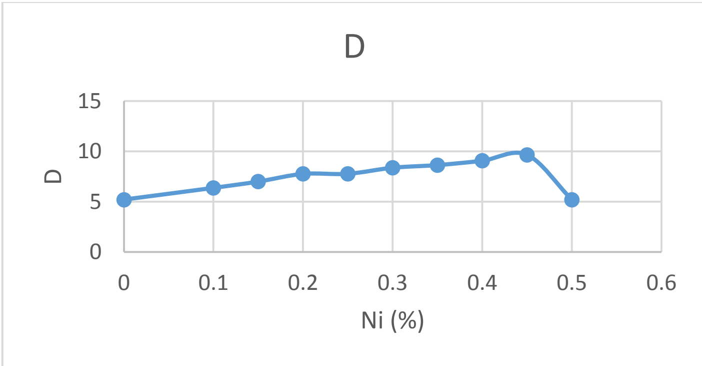
5.756	1.662	65.140	**(222)**
5.766	1.441	76.717	**(040)**
$\boldsymbol{a = 5.745(\mathring{A})}$ $\boldsymbol{V = 189.578(A^{\circ})^3}$			

يوضح الجدول (6) قيم كلٍ من $D, \beta, \varepsilon, \delta$ لجملة *(SrF_2:0.5Ni)*.

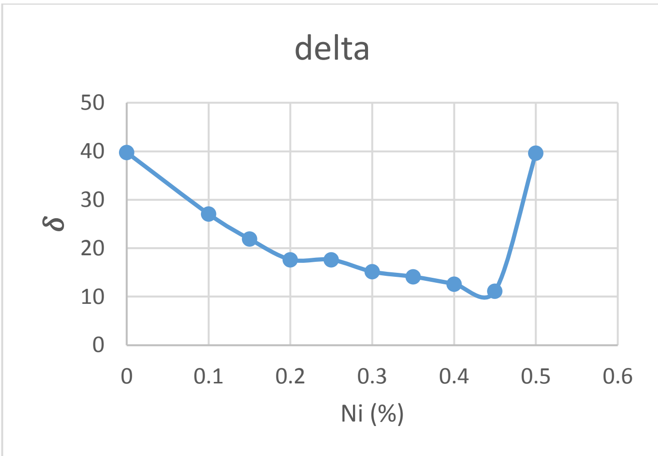
الجدول (6) قيم كلٍ من $D, \beta, \varepsilon, \delta$ لجملة (SrF2:0.5Ni)

$\boldsymbol{\delta \times 10^{15}}$	$\boldsymbol{\varepsilon \times 10^{-3}}$	$\boldsymbol{D(nm)}$	$\boldsymbol{\beta(^{\circ})}$	$\boldsymbol{2\theta}$
50.758	94.718	4.439	0.394	31.447
27.820	70.122	5.995	0.295	36.328
24.827	66.243	6.347	0.295	52.311
40.200	84.294	4.988	0.394	62.117
60.789	103.656	4.056	0.492	65.140
33.684	77.160	5.449	0.394	76.717
$\boldsymbol{\bar{D} = 5.212nm \;,\; \delta = 39.680 \;,\; \varepsilon = 82.699}$				

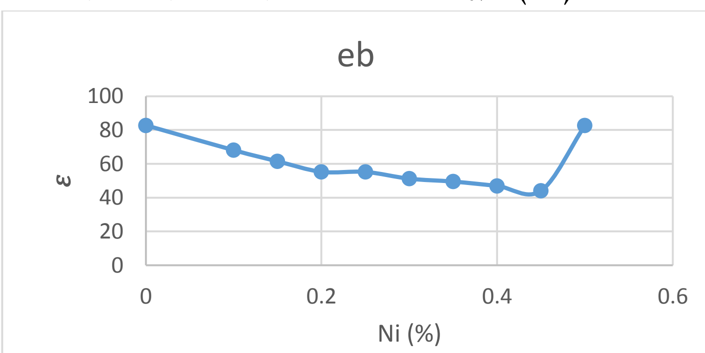
وبرسم تغير كل من حجم التبلور وكثافة الانخلاعات والانفعال الداخلي بدلالة نسبة الاشابة تظهر لدينا المخططات التالية:



الشكل (12) تغير حجم التبلور بدلالة نسبة الاشابة



الشكل (13) تغير كثافة الانخلاعات بدلالة نسبة الاشابة



الشكل (14) تغير الانفعال الداخلي بدلالة نسبة الاشابة

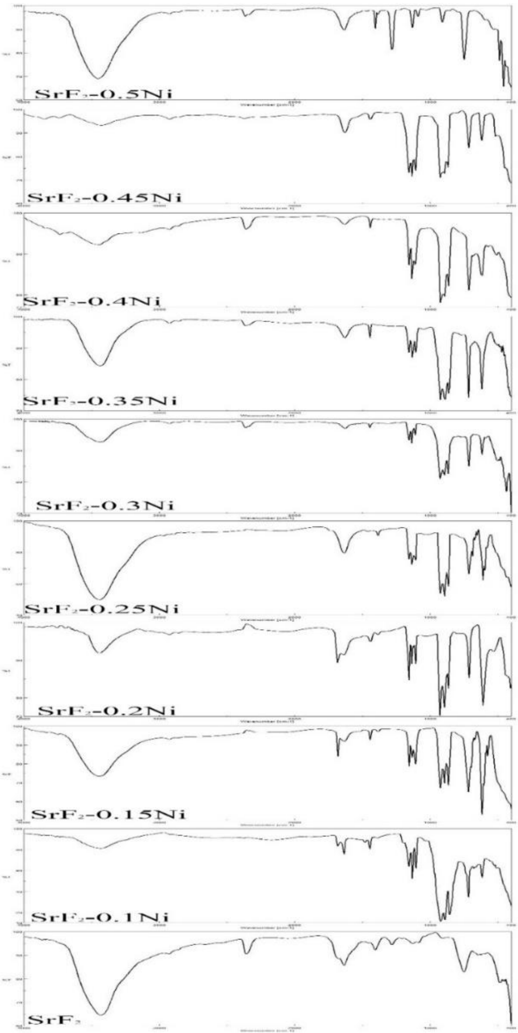
يلاحظ من المخططات السابقة تزايد في حجم التبلور بزيادة نسبة الاشابة بسبب حدوث انزياحات طفيفة في قيم (2θ) نحو القيم الأعلى مما يؤدي الى تناقص قيمة المقدار ($\text{Cos}\theta$) وبالتالي ازدياد قيمة حجم التبلور، حتى الوصول الى النسبة (0.45%) لتوافق أعلى نسبة ممكنة للإشابة وبعدها عند زيادة نسبة النيكل يتشكل طور جديد لأكسيد النيكل. إضافة لطور نقي من فلوريد السترانسيوم.

كذلك يلاحظ انخفاض في قيمة (كثافة الانخلاعات) بما يتناسب مع نسبة الاشابة ويعود السبب في ذلك إلى وجود العلاقة العكسية بين حجم التبلور وكثافة الانخلاعات.

أما بالنسبة للإجهاد الداخلي فيلاحظ انخفاضه أيضاً بزيادة نسبة الاشابة حتى القيمة (0.45%) بسبب انخفاض قيمة المقدار ($\cos\theta$) بزيادة نسبة الاشابة كما وضحنا سابقاً.

4 –2 – دراسة مطيافية الأشعة تحت الحمراء (FT–IR) لمركب فلوريد السترانسيوم النقي والمشاب بنسب مختلفة من النيكل

يبين الشكل التالي أطياف الأشعة تحت الحمراء للمركبات المحضرة وبنسب اشابة مختلفة.



الشكل (12) أطياف الأشعة تحت الحمراء لمركب فلوريد السترانسيوم النقي والمشاب بالنيكل بنسب مختلفة

بمقارنة هذه الأطياف مع بعضها يتبين لدينا ظهور عصابات امتصاص جديدة عند الاشابة بالنيكل بمختلف النسب وهذه العصابات تدل على تشكل روابط جديدة بين النيكل وفلوريد السترانسيوم، حيث تعتمد مواقع الحزم والقمم الامتصاصية على البنية البلورية للمادة والتركيب الكيميائي وأيضاً

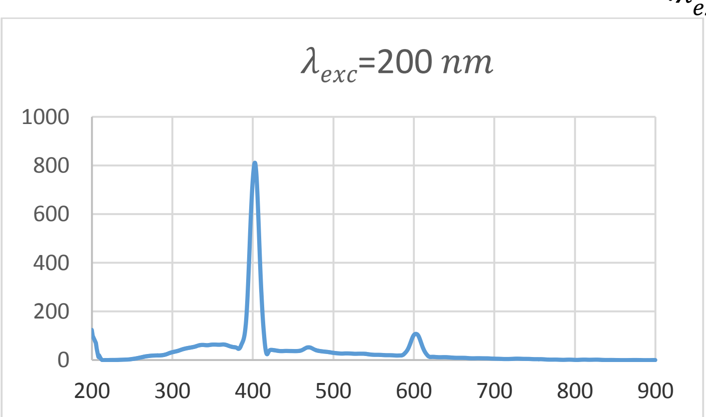
على مورفولوجيا المادة [16]. وعند الاشابة بالنسبة (0.5) يلاحظ تغير الطيف واختفاء عصابات الامتصاص الدالة على ارتباط النيكل بفلوريد السترانسيوم وظهور عصابة جديدة تدل على تشكل أكسيد النيكل وهذا ما تطابق مع نتائج انعراج الأشعة السينية السابقة الذكر[15].

4 -3 – دراسة التألق الضوئي(PL) لمركب فلوريد السترانسيوم النقي والمشاب بنسب مختلفة من النيكل

قيست طيوف الفلورة للعينات المحضرة باستخدام جهاز الفلورة الضوئية PL ضمن الأطوال الموجية 200−900nm.

حيث تم اثارة العينات بأطوال موجية مختلفة تتراوح ضمن المجال $\lambda_{exc} = 200 -$ $500\ nm$ بإضافة $50\ nm$ في كل إثارة وسجل طيف الإصدار لهذه العينات.

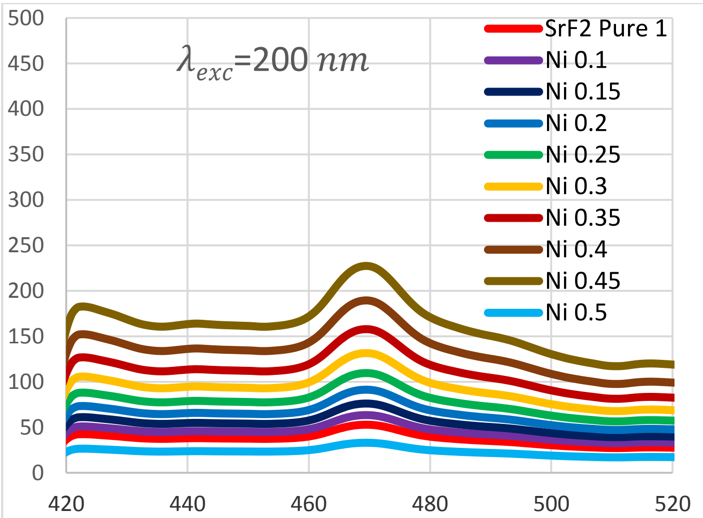
يبين الشكل التالي طيف التألق لمادة فلوريد السترانسيوم النقية والمثارة عند طول موجة $\lambda_{exc} = 200\ nm$.



الشكل (13) طيف الفلورة لمركب فلوريد السترانسيوم النقي

من أجل إثارة عند الطول الموجي $\lambda_{exc} = 200\ nm$ كان الإصدار عند عدة أطوال موجية أهمها 358nm و 400nm؛ القمة الأولى للإصدار تعود إلى تألق الزجاج حيث أن العينة وضعت ضمن خلية حاملة ذات نافذة زجاجية، أما القمة الثانية فتعود لفلورة فلوريد السترانسيوم الطبيعية.

بينما يظهر الشكل التالي أطياف التألق للعينات المحضرة بنسب اشابة مختلفة من النيكل وذلك عند تكبير المجال (420−520 nm) لتوضيح تفاصيل قمة الفلورة لكل عينة فنلاحظ وجود قمة اصدار عند طول موجة $\lambda_{em} = 470\ nm$ حيث كان الإصدار الأقوى للتألق عند الاشابة بالنيكل بالنسبة (0.45 wt %).



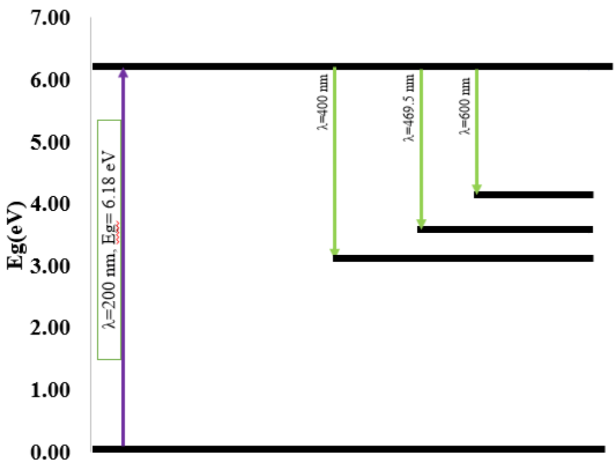
الشكل (14) طيف الفلورة لمركب فلوريد السترانسيوم المشاب بنسب مختلفة من النيكل

ولحساب الفجوة الطاقية يتم تحديد طول موجة الامتصاص والاصدار كما يلي:

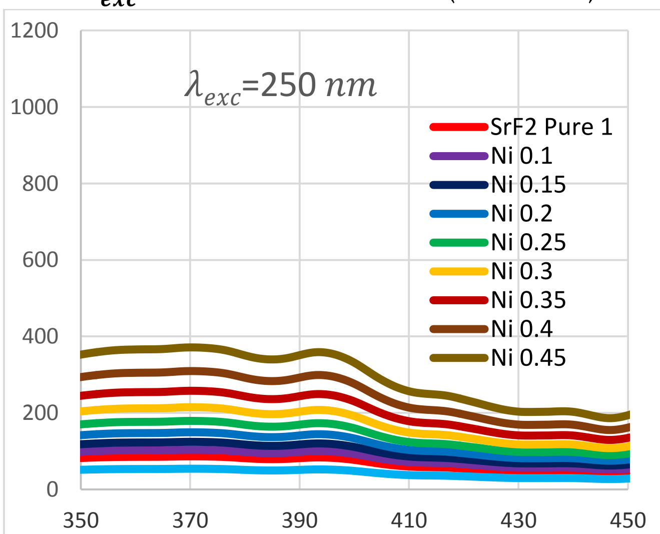
الجدول (7) قيم الفجوة الطاقية

	طول الموجة (nm)	الفجوة الطاقية (ev)
اثارة	200	6.18
اصدار	400	3.10
اصدار	469.5	2.63
اصدار	600	2.06

يمكن تمثيل هذه الانتقالات الالكترونية بالمخطط التالي:



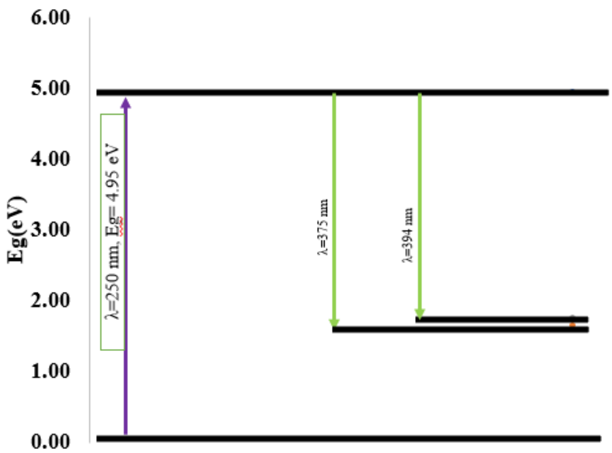
الشكل (15) مخطط الانتقالات الالكترونية لمركب فلوريد السترانسيوم المشاب بالنيكل (0.45 wt%) من أجل إثارة $\lambda_{exc} = 200\ nm$



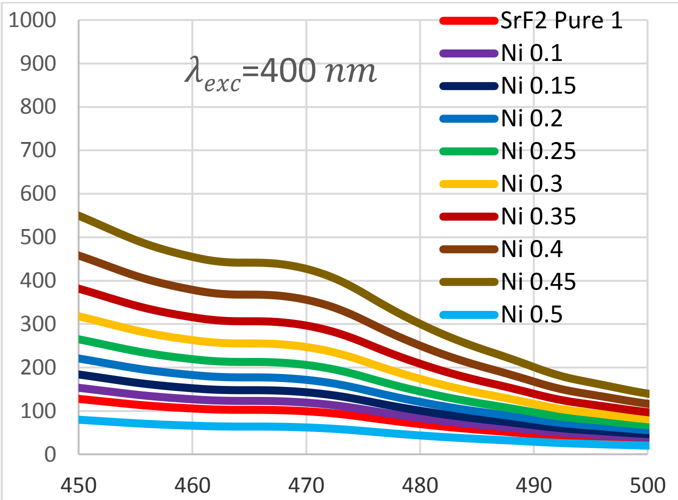
الشكل (16) طيف الفلورة لمركب فلوريد السترانسيوم المشاب بنسب مختلفة من النيكل

الجدول (8) قيم الفجوة الطاقية

	طول الموجة (nm)	الفجوة الطاقية (ev)
اثارة	250	4.95
اصدار	375	3.31
اصدار	394	3.19



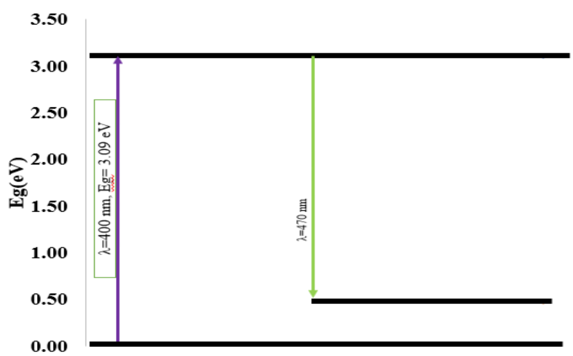
الشكل (17) مخطط الانتقالات الالكترونية لمركب فلوريد السترانسيوم المشاب بالنيكل (0.45 wt%) من أجل إثارة $\lambda_{exc} = 250\ nm$



الشكل (18) طيف الفلورة لمركب فلوريد السترانسيوم المشاب بنسب مختلفة من النيكل

الجدول (9) قيم الفجوة الطاقية

	طول الموجة (nm)	الفجوة الطاقية (ev)
اثارة	400	3.10
اصدار	470	2.64



الشكل (19) مخطط الانتقالات الالكترونية لمركب فلوريد السترانسيوم المشاب بالنيكل

$\lambda_{exc} = 400\ nm$ من أجل إثارة (0.45 wt%)

الاستنتاجات

1. تم تلدين العينات عند درجة حرارة 400 درجة مئوية اعتماداً على مخطط التحليل الحراري (DTA) لمدة 6 ساعات.
2. يشير التأثير الحراري من مخطط (DTA) الناشر للحرارة عند درجة الحرارة (365.7 ºC) إلى دخول النيكل الى داخل البنية البلورية لفلوريد السترانسيوم.
3. يشير التأثير الثاني الناشر للحرارة عند الدرجة (542.1 ºC) إلى تشكل أكسيد النيكل (NiO)، بينما يشير التأثير الحراري الثالث الناشر للحرارة عند الدرجة (677.3 °C) الى تشكل أكسيد السترانسيوم.
4. أظهرت نتائج XRD أن فلوريد السترانسيوم النقي يتبلور وفق بنية بلورية مكعبية متمركزة الوجوه (FCC).
5. لم يُلاحظ من نتائج XRD تغيير واضح في القمم عند جميع الاشابات بالنيكل (0.1− 0.45 wt%) سوى انزياحات طفيفة في مواقع القمم نحو زوايا الانعراج الأعلى مما يدل على توسع البلورات.
6. ظهور قمم إضافية وذلك عند اشابة النيكل بنسبة (0.5 wt%) مما يدل على وجود طور آخر تعود لمركب (NiO).
7. انخفاض في قيمة (كثافة الانخلاعات) بما يتناسب مع نسبة الاشابة.
8. انخفاض الإجهاد الداخلي بزيادة نسبة الاشابة حتى القيمة (0.45 wt%).
9. تبين من مطيافية الأشعة تحت الحمراء (FT−IR) ظهور عصابات امتصاص جديدة عند الاشابة بالنيكل بمختلف النسب وهذه العصابات تدل على تشكل روابط جديدة بين النيكل وفلوريد السترانسيوم.
10. يلاحظ من مطيافية (FT−IR) تغير الطيف واختفاء عصابات الامتصاص الدالة على ارتباط النيكل بفلوريد السترانسيوم وظهور عصابة جديدة عند الاشابة بالنسبة (0.5 wt%).

11. أظهر طيف التألق الضوئي (PL) لمركب SrF_2 النقي من أجل إثارة $\lambda_{exc} = 200\ nm$ إصدار عند عدة أطوال موجية أهمها 358nm و 400nm؛ القمة الأولى للإصدار تعود إلى تألق الزجاج أما القمة الثانية فتعود لفلورة فلوريد السترانسيوم الطبيعية
12. بين طيف التألق من أجل إثارة $\lambda_{exc} = 200\ nm$ وجود قمة اصدار عند طول موجة $\lambda_{em} = 470\ nm$ حيث كان الإصدار الأقوى للتألق عند الاشابة بالنيكل بالنسبة (0.45 wt %)

التوصيات

1. استبدال الشائبة بأحد العناصر الأرضية النادرة.
2. دراسة التألق بجهاز ذو طاقة أعلى.

المراجع:

[1] S.M. Dorfman, F. Jiang, Z. Mao, A. Kubo, Y. Meng, V.B. Prakapenka, T.S. Duffy, (**2010**) Phys. Rev. B 81 174121.

[2] A. Bensalaha, M. Mortiera, G. Patriarcheb, P. Gredinc, D. Vivien, J. (**2006**) Solid. State. Chem. 179 2636–2644.

[3] C. Feldmann, M. Roming, K. Trampert, (**2006**) Small 2 1248–1250.

[4] Z.W. Quan, D.M. Yang, P.P. Yang, X.M. Zhang, H.Z. Lian, X.M. Liu, J.Lin, (**2008**)Inorg.Chem. 47 9509–9517.

[5] X. Wu, S. Qin, Z.Y. Wu, (**2006**) Phys. Rev. B 73 134103.

[6] Thomas, M. E. (**1997**) Strontium Fluoride (SrF_2). Handbook of Optical ConstantsofSolids,883–897.doi:10.1016/b978-012544415-.50138-2.

[7] Faraji, S., Ghasemi, S. A., Parsaeifard, B., & Goedecker, S. (**2019**). Surface reconstructions and premelting of the (100) CaF_2 surface. Physical Chemistry Chemical Physics.

[8] Zahedifar, M., Sadeghi, E., Kashefi biroon, M., Harooni, S., & Almasifard,F. (**2015**)Thermoluminescence dosimetry features of DY and Cu dopedSrF_2nanoparticlesundergammairradiation. Applied Radiation and Isotopes, 105, 176–181.

[9] Sh.Karabasannavar; et al, (**2014**) Synthesis, Characterization and Antimicrobial Activity of some Metal Complexes Derived from Thiazole Schiff Bases with In-vitro Cytotoxicity and DNA Cleavage Studies, *Asian Journal of Pharmaceutical and Medicinal Chemistry*, 2(4), 214-229.

[10] Antonyak. O. T, Vistovskyy. V. V. (**2015**)Defect Luminescence in CaF_2nanoparticles.Journalofluminescence.;167:249–253.

[11] Turgut. G, Keskenler. E. F, Aydin. S, Sonmez. E, Dogan. S,Duzgun. B & Ertugrul. M.(**2013**) Effect Of Nb Doping On Structural Electrical And Optical Properties Of Spray Deposited SnO_2 Thin Films. Super lattices and Microstructures. ; 56: 107-116.

[12] الصالح. محمود، اسماعيل. ابراهيم; (**2019**)، تحضير الجملة Ag_2SnO_3 بطريقة Sol-gel، مجلة جامعة البعث، المجلد 43 العدد 8.

[13] Cullity B.D., Stock, S.R. (**2001**). Elements of XRay diffraction (3rd ed.), Prentice Hall.

[14] Mariappan. R., Ponnuswamy. V, & Suresh. P.(**2012**) Effect Of Doping Concentration On The Structural And Optical Properties Of PureAndTinDopedZincOxideThinFilmsByNebulizerSprayPyrolysis(NSP)Technique.SuperlatticesandMicrostructures.;52:500−513.

[15] Cuimiao Zhang, Zhiyao Hou. (**2010**). Mesoporous SrF2 and SrF2:Ln3+
(Ln)Ce,Tb,Yb,Er)HierarchicalMicrospheres:HydrothermalSynthesis,Growing Mechanism, and Luminescent Properties.J.Phys.Chem,114,6928–6936.

[16] خضرو. أحمد، نجار. عبير; (**2019**)، دراسة مطيافية الأشعة تحت الحمراء لمركبات أوكسيد القصدير النقي والمشاب بالحديد، مجلة جامعة البعث، المجلد 43 العدد 8.

تحليل خصائص التيار والجهد كتابع لدرجة الحرارة واستخراج المقاومة المتسلسلة لديود شوتكي $Cu/ZnO/Al$

زينب الحسن[1] أ.د. عبد الرزاق الصوفي[2] أ.د عبد الله رستناوي[3]

الملخص

في هذا البحث تم تحليل قياسات الجهد–التيار $(I-V)$ التي أجريت على ديودات شوتكي من النمط $Cu/ZnO/Al$ عند درجات حرارة $(27-200-400°C)$، اعتماداً على نظرية الانبعاث بالتأين الحراري (TE). تم تحليل الميزة الأمامية $I-V$ لاستخراج ثوابت ديود شوتكي $Cu/ZnO/Al$. لوحظ أن ارتفاع حاجز الكمون ازداد مع زيادة درجة الحرارة حتى الدرجة $200°C$ ثم بدأ بالتناقص، كما وجد أنه على علاقة عكسية مع تيار الإشباع، بينما عامل المثالية ازداد. وبالمقارنة مع طريقة Cheung و Cheung لاستخراج المقاومة التسلسلية، وُجد أنه مع زيادة درجة الحرارة، انخفضت المقاومة المتسلسلة وارتفاع حاجز الكمون، وايضا ازداد عامل المثالية. يعود سبب ذلك إلى وجود عدم تجانس في ارتفاع الحاجز. تمت دراسة تغيرات المقاومة المتسلسلة وارتفاع حاجز الكمون حسب نظرية (TE) وكانت النتائج متطابقة مع نتائج نظرية Cheungو Cheung . اضافة لذلك، تم إجراء الدراسة بالاعتماد على نظرية Norde وتم الحصول على قيم المقاومة المتسلسلة وارتفاع حاجز الكمون والتي كانت أصغر بكثير من القيم في نظرية Cheung و Cheung وتوافق نظرية (TE) إلى حد كبير في قيم عامل المثالية.

الكلمات المفتاحية: ديود شوتكي، أوكسيد الزنك، نظرية Cheung، نظرية Norde، نظرية الانبعاث الحراري (TE)، عامل المثالية، المقاومة المتسلسلة، ارتفاع حاجز الكمون، الميزة $I-V$.

[1] طالبة دكتوراه [2] دكتور في فيزياء البلورات والأشعة السينية [3] دكتور في الفيزياء النووية.

Analysis of temperature dependent current and voltage characteristics and extraction of series resistance in $Cu/ZnO/Al$ Schottky diodes

Abstract

In this research, we analyze the current−voltage (I−V) measurements performed on $Cu/ZnO/Al$ Schottky diodes at temperatures of $(27-200-400℃)$. Based on the TE theory, the forward bias $I-V$ characteristic was analyzed to extract the Schottky diode constants for the $Cu/ZnO/Al$ Schottky diode. It was observed that the potential barrier increased with increasing temperature up to $200℃$. and then started to decrease. It was also found to be inversely related to the saturation current, while the ideality factor increased. Compared with Cheung and Cheung's method for extracting the series resistance, it was observed that the series resistance and potential barrier decreased with increasing temperature, and the ideality factor increased. This is attributed to the presence of inhomogeneity in the barrier height. The variations of the series resistance and potential barrier height were studied according to the TE theory, and the results were consistent with those of Cheung and Cheung. The study was carried out based on Norde's theory and the values of series resistance and potential barrier were obtained which were much smaller than the values in Cheung and Cheung's theory and in good agreement with TE theory in ideality factor values.

Keywords: Schottky diode, zinc oxide, Cheung's theorem, Norde's theorem, thermionic emission (TE) theory, ideality factor, series resistance, potential barrier, $(\mathrm{I}-\mathrm{V})$ characteristic.

1. مقدمة

1.1. أهمية أوكسيد الزنك في التطبيقات الإلكترونية:

يعد ZnO مادة مهمة للبحث عن التيار نظراً للأهمية الإلكترونية الضوئية والإلكترونية النانوية، مما يجعله مرشحاً مثالياً للديودات الباعثة للضوء فوق البنفسجي، لتحقيق هذه الأجهزة للتطبيقات يجب أن تكون مناسبة. ولكن يصعب تصنيع وصلات شوتكي جيدة من المواد نصف الناقلة بسبب وجود حالات الوجه البيني بين الفيلم والمعدن والتي يمكن أن تؤدي إلى انحراف كبير عن السلوك المثالي، حيث استخدم الباحثون معادن مختلفة مثل $\mathrm{Al}, \mathrm{Au}, \mathrm{Ag}, \mathrm{Pt}$ و Pd لتحقيق وصلات شوتكي موثوقة. تحتوي وصلات شوتكي هذه على ارتفاعات حاجز كمون تتراوح بين $0.6\ \mathrm{eV}$ إلى $0.8\ \mathrm{eV}$ مما يشير إلى التأثير غير المهم لحالات عيوب الوجه البيني (interface) (السطح البيني). علاوة على ذلك، تعتمد حالات الوجه البيني هذه بشدة على الخلل في كثافة الفيلم المزروع وبالتالي على تقنية النمو المستخدمة [1].

يعتبر أكسيد الزنك ZnO من أنجح أنصاف–النواقل لأكسيد المعدن في شكل بنيته النانوية نظراً لتطبيقاته العديدة في الأجهزة الإلكترونية الضوئية. ترجع العديد من هذه التطبيقات المحتملة لأكسيد الزنك إلى الأسباب التي تجعله يتمتع طاقة الفجوة العصابية (طاقة المجال المحظور) واسعة تبلغ $3.37\ \mathrm{eV}$ وميزة بارزة تتمثل في وجود طاقة إكسيتون عالية تبلغ $60\ \mathrm{meV}$. تكون وصلة شوتكي

أمراً حيوياً بين المعدن وأنصاف النواقل، والتي تنشأ بسبب (I) التباين بين الألفة الإلكترونية لأنصاف–النواقل وتابع عمل المعادن، وكذلك (II) تثبيت مستوى فيرمي لأنصاف – النواقل. فيتشكل بين المعدن ونصف الناقل حاجز شوتكي هو حاجز طاقة يمكن ضبطه عن طريق التحكم بعرض منطقة النضوب ونقل الشحنات عبر الوصلة. عند جهد تحييز ثابت، يُظهر ارتفاع التيار والحاجز علاقة أسية، مما يجعل حاجز شوتكي حاسماً لتشغيل أي وصلة من وصلات أنصاف النواقل [2].

1–2 تحديد ثوابت ديودات شوتكي:

في تحقيق الأجهزة القائمة على أنصاف–النواقل، هناك العديد من الثوابت التي يجب أخذها في الاعتبار: عملية تحضير السطح، تكوين ارتفاع الحاجز بين المعدن وأنصاف–النواقل وتجانسه، كثافة حالات الوجه البيني والخلع، الجهد المطبق والمقاومة التسلسلية (R_S). وتعتبر من بين كل هذه معامل هام يتسبب في أن تكون الميزة الكهربائية للأجهزة غير مثالية. هناك تقنيات مختلفة لتقييم الثوابت الكهربائية الرئيسية من قياسات $I-V$ للتحيز الأمامي مثل طريقة Cheung وCheung وقانون أوم. تقدم طريقة Cheung وCheung وطريقة Norde نهجاً بديلاً من قانون أوم لتحديد ارتفاع الحاجز وعامل المثالية و (R_S)من قياسات $I-V$ الأمامية، والتي تعد الثوابت الكهربائية الرئيسية في توصيف وتوفر معلومات مفيدة بشأن طبيعة الديودات وتحديد ارتفاع حاجز الكمون.

لا يعطي تحليل الميزة $I-V$ الأمامية والعكسية لهذه الديودات عند درجة حرارة الغرفة فقط وصفاً تفصيلياً لآلية نقل التيار، بل تعطى الميزة $I-V$ في مجال واسع من درجات الحرارة فهماً واضحاً لجوانب آلية نقل التيار وتكوين الحاجز. بشكل عام، تنحرف الميزة $I-V$ الأمامية لهذه الأجهزة عن نظرية TE المثالية وفقاً لطريقة Cheungو Cheung. لا تزال هناك بعض الصعوبة في التنبؤ بظاهرة النقل الدقيقة. يوفر التحليل الدقيق للميزة $I-V$ للديودات عند درجات

حرارة مختلفة معلومات مفصلة عن عملية النقل وطبيعة تكوين الحاجز عند واجهة أنصاف–النواقل المعدنية. ومع ذلك، في حالة وجود جهد حاجز غير متجانس بين المعدن وأنصاف–النواقل، فإن كمون حاجز يشبه حاجزاً يتكون من بقع أعلى وأسفل يمر التيار من خلالها. وبالتالي، من الممكن تفسير ذلك من خلال نظرية TE مع التوزيع الغاوسي لجهد حاجز الكمون.

في هذه التحليل، تمت دراسة الميزة $I-V$ الأمامية والعكسية كتابع لدرجة الحرارة لديود شوتكي $Cu/ZnO/Al$ عند درجات حرارة $(27-200-400\ ^{\circ}C)$. تم حساب المقاومة المتسلسلة وارتفاع حاجز شوتكي وعوامل المثالية باستخدام الطرق التقليدية وكذلك الطرق البديلة. تم الحصول على ارتباط عادل مع الطرق البديلة والطرق التقليدية في مناطق معينة من المخططات. كان الانحراف عن آلية نقل TE المثالية مشكلة مع مواد ZnO [3].

2. هدف البحث

- دراسة الميزة جهد– تيار $I-V$ لديود شوتكي عند درجات حرارة مختلفة.
- دراسة تأثير درجة الحرارة على الميزة جهد – تيار.
- حساب ارتفاع كمون الحاجز وعامل المثالية وتيار الإشباع وفقاً لنظرية الانبعاث الحراري.
- حساب كمون الحاجز وعامل المثالية وتيار الإشباع وفقاً لنظرية Cheunge و Cheunge
- حساب كمون الحاجز وعامل المثالية وتيار الإشباع وفقاً لنظرية Norde.
- مقارنة النتائج التي حصلنا عليها من النظريات الثلاثة.
- تحديد الطريقة المناسبة والأفضل لدراستنا كديودات شوتكي.
-

3. مواد وطرق البحث

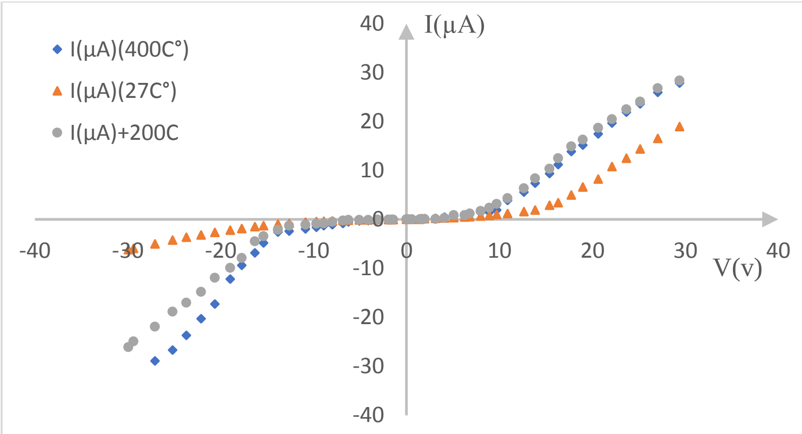
استعمل ZnO (99.5٪ من Honeywell Riedel–de Haën®) كعينة أساسية، تم ترسيب فيلم ZnO على Cu لتحقيق الوصلة الأومي بواسطة طريقة الطلاء بالبخ (وهي طريقة تتم باستخدام ضغط الغاز يتم بخ المادة المراد التصاقها على المعدن). حيث أولاً حضرت الأقراص النحاسية بنصف قطر متماثل من أجل جميع العينات 1.0cm، غسلت بالماء المقطر وجففت لمدة 24 ساعة عند درجة حرارة المخبر. ثم جرى ترسيب الأكسيد بسماكة 50µm على القرص باستعمال طريقة الطلاء بالبخ بمساعدة الغاز المضغوط (غاز النتروجين) [4.5]. حضرت وصلة شوتكي Al ذات سماكة 1µm تقريباً التي تم بخها على الوجه العلوي من ZnO ، باستعمال طريقة البخ الحرارية.

تم الحصول على الميزة $I-V$ الأمامية والعكسية باستخدام دارة إلكترونية مؤلفة من مقياس أمبير – مقياس فولت ومغذية كهربائية ومجموعة من المقاومات (تم شرح أليات التوصيل للدارة الإلكترونية كما في الشكل (6) واخذت القيم من الملحق (1) المذكور في نهاية المقال.

4. القسم العملي:

4.1دراسة تأثير درجة الحرارة على الميزة $I-V$ في ديود شوتكي Cu/ZnO/Al:

يوضح الشكل (1) الميزة $I-V$ لديودات شوتكي من النمط Cu/ZnO/Al عند درجات حرارة ($27-200-400\ ^{\circ}C$).



الشكل (1) الميزة $I - V$ لديودات شوتكي من النمط $Cu/ZnO/Al$ عند درجات حرارة $(27 - 200 - 400\ K^{\circ})$

تم رسم الميزة $(I - V)$لديودات شوتكي من النمط $Cu/ZnO/Al$عند درجات حرارة $(27 - 200 - 400°C)$. يُظهر سلوك المنحنيات اعتماداً قوياً على درجة الحرارة وانحرافاً عن ديودات شوتكي المثالية، حيث تبدي الديودات سلوكاً تقويمياً غير خطي.

إن الانحناء المقعر للأسفل لمخطط الميزة الأمامية $I - V$ (كما هو موضح في الشكل (1) عند الفولتية الكبيرة يرجع بشكل رئيسي إلى المقاومة المتسلسلة R_s الناتجة بشكل رئيسي عن المادة الأساسية (الركيزة) للديود. وبالتالي، من أجل تقدير الثوابت الكهربائية لديود شوتكي $Cu/ZnO/Al$ بدقة، عند قياس $I - V$ يجب تحليل الميزة من خلال أخذ تأثير المقاومة المتسلسلة [1]، [3]، [4]. يمكن أن تهيمن حالات الوجه البيني[2]،[5] في المنطقة بين نصف الناقل والمعدن. وُجِد أن منطقة التحيز الأمامي تخضع لتأثير حالات الوجه البيني، بينما تظهر تأثيرات R_s في منطقة التحيز الأمامي العالية. من خلال الشكل (1) نلاحظ تناقص جهد التشغيل الذي يعزى إلى انخفاض ارتفاع حاجز الكمون مع ازدياد درجة الحرارة، حيث الطاقة الحرارية المكتسبة تساعد حوامل الشحنة (إلكترونات–ثقوب) على تجاوز ارتفاع حاجز الكمون بسهولة أكبر، هذا يعني أن

التيار نفسه يمكن تحقيقه بجهد أقل لأن الطاقة الحرارية تساعد على تنشيط حوامل الشحنة وبالتالي زيادة عددهم مما يحسن في الناقلية الكهربائية للطبقة نصف الناقلة، وتقلل درجات الحرارة المرتفعة من مقاومة النقل داخل المادة مما يقلل من الجهد المطلوب.

وجهد الانهيار عند تعرض الديودات للحرارة، كما أن الحرارة قد عملت على تدهور الديودات بشكل أكبر وهذا ما بينه تناقص جهد الانهيار مع ازدياد درجة الحرارة.

4.2دراسة تأثير درجة الحرارة على ارتفاع حاجز الكمون اعتماداً على نظرية الانبعاث الحراري:

بالاعتماد على نظرية الانبعاث بالتأين الحراري (TE) [6]، [7].

$$I = I_s\, exp\left(\frac{q(V-IR_s)}{nkT}\right)$$

$$I_s = AA^*T^2 exp\left(-\frac{q\emptyset_B}{kT}\right) \qquad (1)$$

إلى المعادلة التالية:

$$I \approx I_s\left\{exp\left(\frac{q\,V}{nkT}\right)-1\right\} \approx I_s\left\{exp\left(\frac{q\,V}{nkT}\right)\right\} \qquad (2)$$

من أجل $V > \frac{3\,kT}{q}$

حيث q شحنة الإلكترون، V الجهد المطبق، n عامل المثالية، k ثابت بولتزمان، R_s المقاومة المتسلسلة، A مساحة الديود، A^* ثابت ريتشاردسون المقدر $32\ A\ cm^{-2}\ K^{-2}$ لـ n – ZnO.

، T درجة الحرارة المطلقة، I_s تيار الإشباع و $\emptyset_{(B)}$ ارتفاع الحاجز (بالفولت)، ويعطى $\emptyset_{(B)}$ بالعلاقة:

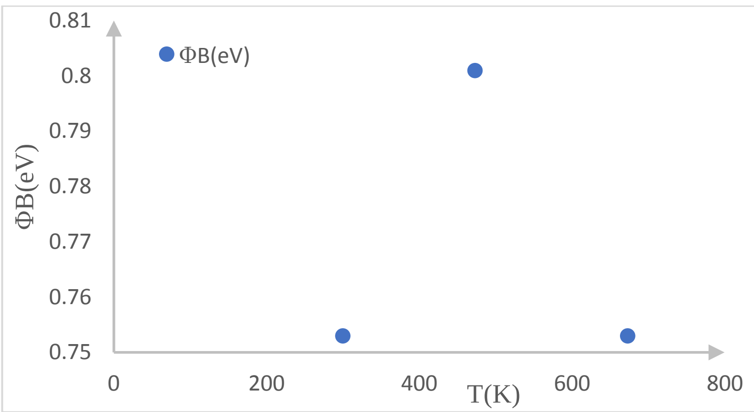
$$\emptyset_{(B)} = \frac{(\mathrm{kT})}{\mathrm{q}} \frac{\ln(AA^* T^2)}{I_s} \qquad (3)$$

تعطى قيم حاجز الكمون وفقاً للجدول التالي (1):

673	473	300	T(K)
0.753	0.801	0.7756	$\emptyset_B(eV)$

الجدول (1) قيم حاجز الكمون بدلالة درجة الحرارة.

يبين الشكل (2)ارتفاع حاجز الكمون بدلالة درجات الحرارة المختلفة.



الشكل (2) ارتفاع حاجز الكمون بدلالة درجات الحرارة المختلفة.

يوضح الشكل (3) مخطط ارتفاع الحاجز $\emptyset_{B(I-V)}$ مقابل درجة الحرارة، عند درجات حرارة $(27 - 200 - 400\ ^\circ C)$ ، نلاحظ أن حاجز الكمون يزداد بازدياد درجة الحرارة حتى الدرجة $200^\circ C$ ثم يبدأ بالتناقص. في الظروف المثالية حاجز الكمون يميل للانخفاض أو أن يبقى ثابتاً مع زيادة درجة الحرارة بسبب الطاقة الحرارية. ولكن في الطبقات السميكة عند التسخين حتى الدرجة

200°C غالباً ما يحدث تحسن في جودة التماس بين الألمنيوم وطبقة أوكسيد الزنك باعتبار أن التسخين يزيل الرطوبة والملوثات أو الغازات المحبوسة في التماس ويعزز الارتباط بين الذرات، مما يؤدي إلى تقليل العيوب والتداخلات عند التماس. هذا يؤدي إلى زيادة حاجز الكمون حيث قد تظهر ظاهرة ارتفاع حاجز الكمون الظاهري بسبب إعادة الشحنات المحاصرة (مثل العيوب والمصائد) التي قد تتحرر أو تتوزع مما يؤدي إلى تغيير في ارتفاع الحاجز الظاهري، حيث يتحسن التبلور الجزئي أو إعادة ترتيب الذرات في التماس الذي يمكن أن يزيد من حاجز الكمون وبالتالي يؤدي ذلك إلى زيادة حوامل الشحنة المتاحة عبر الحاجز هو السبب المحتمل لزيادة ارتفاع الحاجز مع درجة الحرارة. عند درجة الحرارة الأعلى 400°C قد تبدأ بعض الظواهر السلبية مثل انتشار (Diffusion) ذرات الألمنيوم داخل أوكسيد الزنك، مما يؤدي إلى تغير تركيب التماس فتتكون مناطق غير متجانسة أو تتشكل طبقات أوكسيد جديدة أو تحدث تفاعلات كيميائية غير مرغوبة فزيادة العيوب أو حدوث هذه التفاعلات تعمل على زيادة ارتفاع حاجز الكمون. أيضاً قد يؤدي التسخين العالي إلى تدهور البنية البلورية أو زيادة المصائد مما يقلل ارتفاع الحاجز [8].

4.3دراسة تأثير درجة الحرارة على تيار الإشباع:

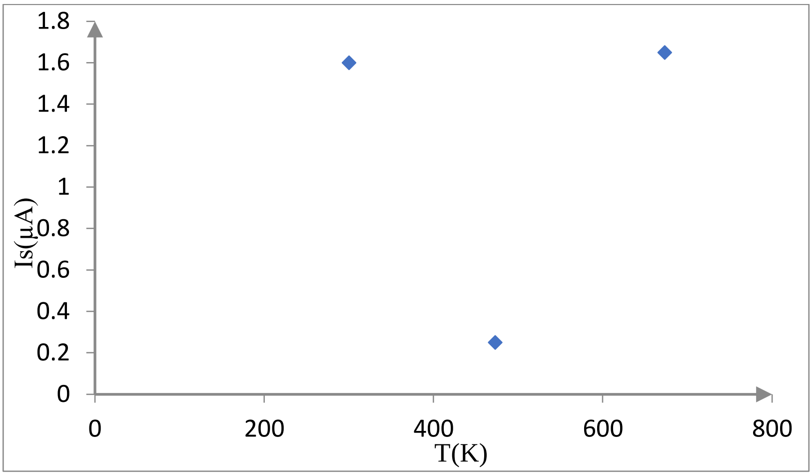
يتم حساب تيار الإشباع لمعرفة مدى التغيرات الحاصلة عليه بتغير درجة الحرارة باستخدام المعادلة (1)، يمكن حساب قيمة تيار الإشباع I_s من مخطط $\ln I$ مع V . من الميزة المقاسة $I-V$ الموضحة في الشكل (1).

يبين الجدول التالي (2) قيم تيار الإشباع المتعلقة عند درجات حرارة مختلفة:

$T(K)$	300	473	673
$I_s(\mu A)$	1.6	0.249	1.649

الجدول (2) قيم تيار الإشباع المتعلقة عند درجات حرارة مختلفة.

يوضح الشكل (3) تغيرات تيار الإشباع لديود شوتكي Cu/ZnO/Al بتغير درجة الحرارة.



الشكل(3) تيار الإشباع لديود شوتكي Cu/ZnO/Al عند درجات حرارة مختلفة.

نلاحظ من خلال الشكل (3) نلاحظ أن ارتفاع حاجز الكمون يرتبط ارتباطاً مباشراً بتيار الإشباع حسب العلاقة (1)، فكلما ازداد تيار الإشباع تناقص ارتفاع حاجز الكمون، فهو يتناسب معه عكساً وهذا ما يفسر أن عند كل قيمة عظمى لتيار الإشباع. تمتلك الكواشف أصغر قيمة لارتفاع حاجز الكمون وبالعكس. كما لاحظنا تغير تيار الاشباع بتغير درجة الحرارة حيث تتناقص قيمته مع ازدياد درجة الحرارة ويتصف بعدم الخطية، وعند الدرجة 400°C يزداد قليلاً مع تناقص ارتفاع حاجز الكمون عند هذه القيم. إن تيار الإشباع العكسي I_s في هذه الدراسة هو في حدود $10^{-6}A$، مما يشير إلى أنه حتى عند إيقاف تشغيل الديود، يستمر تيار صغير في التدفق عبر الديود مرة أخرى. كلما كان التيار العكسي أكبر، كلما ظهرت مشاكل أكثر في بعض التطبيقات حيث يجب مراقبة كميات صغيرة من التيار [8].

4.4مقارنة تغير تيار الإشباع وعامل المثالية لديود شوتكي Cu/ZnO/Al عند درجات حرارة المختلفة:

يمكن الحصول على قيم عامل المثالية من خلال حساب ميل الخط البياني للميزة جهد – تيار وذلك باستخدام العلاقة [9]، [10]:

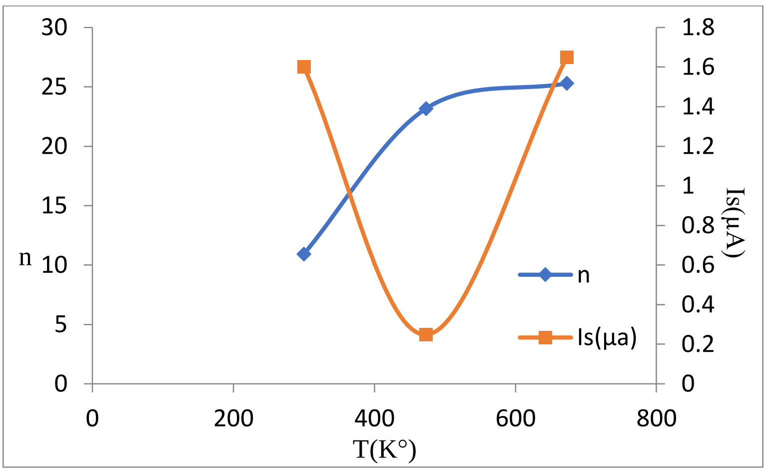
$$n = \frac{q}{(KT \times \text{slope})} \qquad (4)$$

يوضح الجدول (3) التالي التغيرات الحاصلة لعامل المثالية مع تغيرات تيار الإشباع عند درجات حرارة مختلفة.

673	473	300	T(K)
25.3	23.17	10.93	n

الجدول (3)

يوضح الشكل (4) تغيرات تيار الإشباع وعامل المثالية لديود شوتكي Cu/ZnO/Al عند درجات الحرارة مختلفة.



الشكل (4) تغيرات تيار الإشباع وعامل المثالية لديود شوتكي Cu/ZnO/Al عند درجات حرارة مختلفة.

نلاحظ ارتباط عامل المثالية وتيار الإشباع وفق العلاقة (2)، من المتوقع أن يكون n صغيرة وقريبة من الواحد؛ ومع ذلك، يمكن ملاحظتها أكبر من هذه القيمة اعتماداً على التأثيرات المحتملة حتى لو كانت الانبعاث بالتأين الحراري TE (انبعاث إلكترونات بالحرارة) (thermionic emission)مهيمن في تدفق التيار. بالإضافة إلى ذلك، يمكن أن يُعزى الانحراف عن افتراض TE إلى مجموعة متنوعة من التأثيرات المهيمنة لآلية التوصيل اعتماداً على تيار التوليد وإعادة الاتحاد في منطقة الوصلة، وتدفق تيار النفق بسبب الطبقة البينية. وبالتالي، فإن قيم n تعتمد على درجة الحرارة وهي في اتجاه تصاعدي مع زيادة درجة الحرارة [8]. ويمكن أيضاً أن تُعزى القيم العالية لـ n إلى عدم تجانس ارتفاع الحاجز عند الوجه البيني(interface) (السطح البيني) (وهو الوجه بين الطبقة نصف الناقلة والمعدن)، والنقل عبر حوامل الشحنة الأقلية، وإلى تيارات التسرب العالية. وبما أن قيمة $(n > 20)$ فترجع على الأرجح إلى وجود عيوب في شبكة ZnOو/أو وجود مصائد عند الوجه البيني. من ناحية أخرى، تُظهر هذه الاختلافات في ارتفاع الحاجز وعامل المثالية مع درجات الحرارة $(27 - 200 - 400°C)$ أن نقل التيار عبر واجهة ZnO/Al هو عملية نشطة بدرجة الحرارة، نظراً لأن ارتفاع الحاجز يتم توزيعه بشكل عشوائي بسبب ظاهرة عدم تجانس الحاجز، بالإضافة إلى مساهمة أليات نقل أخرى غير الانبعاث الحراري هذا يؤدي إلى سلوك أكثر تعقيداً وقيم عامل مثالية أكبر.

كما نستنتج أن ارتفاع حاجز الكمون المقاس يكون أكبر وعامل المثالية أقل عند درجات الحرارة المنخفضة. ولكن مع ارتفاع درجة حرارة الكاشف، تكتسب الإلكترونات طاقة حركية أكبر للتغلب على ارتفاعات حاجز الكمون العالية مما يؤدي إلى قيم أصغر لارتفاعات الحاجز المقاسة وقيم أعلى لعامل المثالية عند ازدياد درجة الحرارة بما يتوافق مع المرجع [4]،[11]، [12] .

4.5تحديد حاجز الكمون والمقاومة المتسلسلة لديود شوتكي $Cu/ZnO/Al$ عند درجات الحرارة المختلفة اعتماداً على نظريةTEو Cheung وCheung:

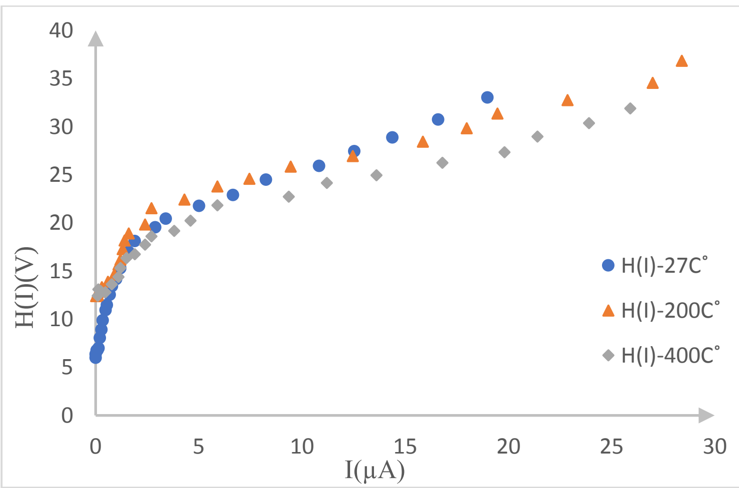
إن دراسة الميزة الكهربائية لديودات شوتكي وتحديد الثوابت الكهربائية اعتماداً على نظرية الانبعاث بالتأين الحراري غير كافي حيث لم تُظهر النظرية مدى تأثير المقاومة المتسلسلة على تغير ارتفاع حاجز الكمون وعامل المثالية، لذلك لابد من دراستهم عن طريق نظرية الانبعاث بالتأين الحراري ونظرية Cheung و Cheungبإضافة المقاومة المتسلسلة اللتان تبينان التغيرات الحاصلة في الثوابت عند وجود المقاومة المتسلسلة. لتحديد n , $\emptyset_{(B)}$ تم قياس R_s من الميزة الأمامية $\mathrm{I}-\mathrm{V}$ باستخدام العلاقات التالية[10]، [13]:

$$\frac{(dV)}{d(lnI)} = \frac{(nkT)}{q} + IR_s \tag{4}$$

$$H(I) = V - \left(\frac{(nkT)}{q}\right) \ln\left(\frac{I}{AA^*T^2}\right) \tag{5}$$

$$H(I) = n\emptyset_{(Beff)} + IR_s \tag{6}$$

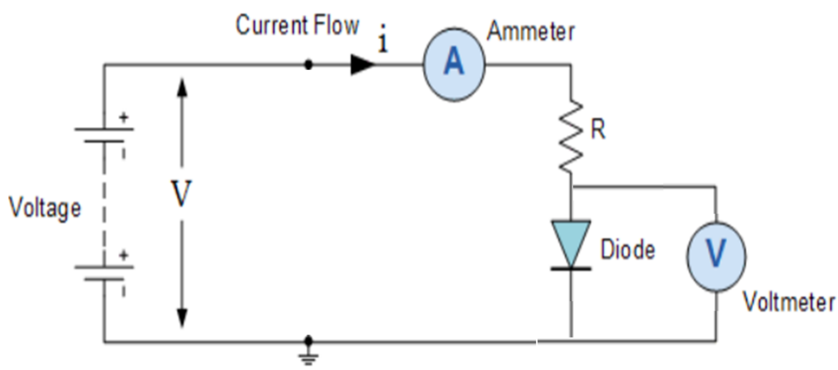
يبين الشكل(5) ارتفاع حاجز الكمون لديود شوتكي عند درجات حرارة مختلفة.



الشكل (5) ارتفاع حاجز الكمون لديود شوتكي عند درجات حرارة مختلفة.

باستخدام العلاقة (6) تم الحصول على الشكل (5) الذي يبين ارتفاع حاجز الكمون لديودات شوتكي عند درجات حرارة مختلفة حسب نظرية الانبعاث بالتأين الحراري بعد إضافة المقاومة المتسلسلة، ومن خلالها استطعنا تحديد المقاومة التسلسلية وحساب ارتفاع حاجز الكمون لديودات شوتكي وذلك من ميل الخطوط البيانية السابقة ونقطة التقاطع.

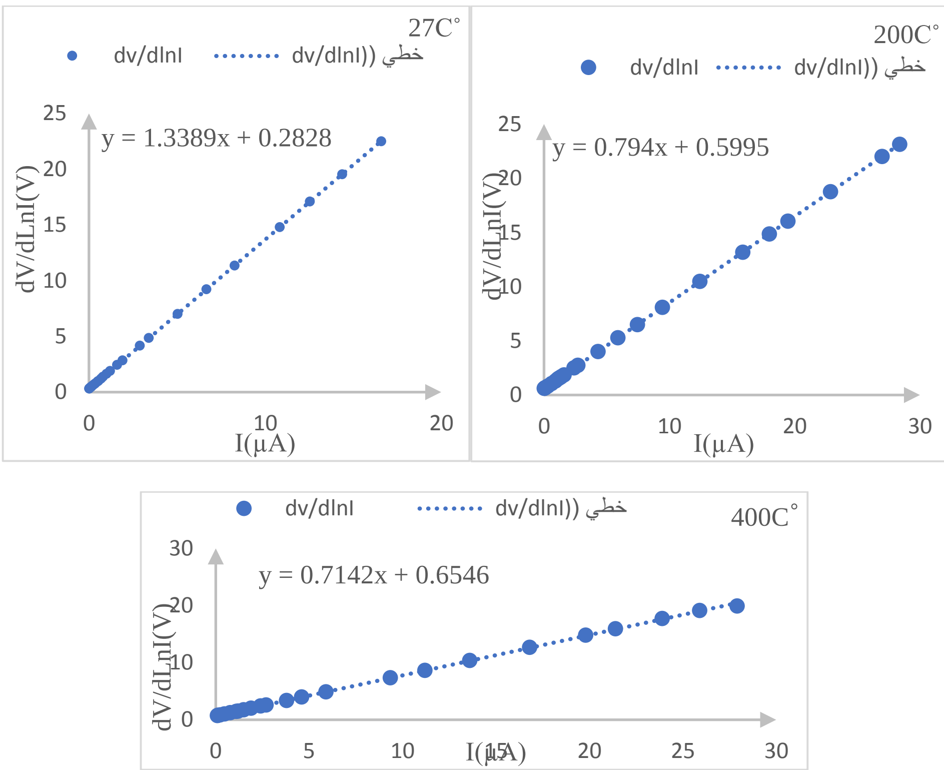
من الشكل (5) وبمقارنة القيم التي حصلنا عليها سابقاً لارتفاع حاجز الكمون وهذه القيم سوف نجد اختلاف، من الواضح وجود تأثير للمقاومة المتسلسلة R_S على الثوابت المقدرة $\emptyset_{(B)}$, n , I_S. حيث أدى وجودها إلى انخفاض قيم ارتفاع كمون الحاجز مع ارتفاع درجة الحرارة. كما نلاحظ أن عامل المثالية قد حافظ على قيم ثابتة بعد إضافة المقاومة المتسلسلة. وبالتالي، لا يمكن إهمال انخفاض جهد الـ R_S فيما يتعلق بالجهد المطبق. وفقاً ل Tung (1992)، تكون الميزة $I-V$ لوصلة شوتكي خطية عند جهد تحييز أمامي منخفض ولكنها تصبح غير خطية بشكل ملحوظ بطبيعتها عند جهد تحييز أمامي أعلى بسبب المقاومة المتسلسلة R_S الناتجة من المادة الأساسية (الركيزة). من الواضح أن R_S لها تأثير صغير جداً في منطقة التحيز الأمامي المنخفض، إلا أن لها تأثيراً كبيراً في منطقة التيار الأعلى بسبب الانخفاض الكبير في الجهد IR_S، وتكون الدارة الإلكترونية المكافئة لديودات شوتكي ذات المقاومة التسلسلية R_S في الشكل (6) [14]، [15] .



الشكل (6) الدائرة المكافئة لديودات شوتكي ذات المقاومة التسلسلية

بالاعتماد على نظرية Cheung و Cheung وذلك برسم $\frac{(dV)}{d(\ln I)}$ مقابل I الموضح في الشكل (7) يعطي قيمة للمقاومة المتسلسلة عند درجات الحرارة المختلفة. وذلك من المعادلة (4) بوصلة المخطط عند محور التيار الصفري بـ $\frac{\eta kT}{q}$ ، يتم تحديد قيمة n. تمثل الدوائر الممتلئة البيانات التجريبية بينما يمثل الخط المنقط (خط الاتجاه) مطابقتها. إن وجود المقاومة المتسلسلة R_sفي طبقات أوكسيد الزنك Cu/ZnO/Al يجعل أداء الديودات غير مثالي بطبيعته.

يبين الشكل (7) مخطط $\frac{(dV)}{d(\ln I)}$مقابل الديودات شوتكي Al/ZnO عند درجات حرارة مختلفة.



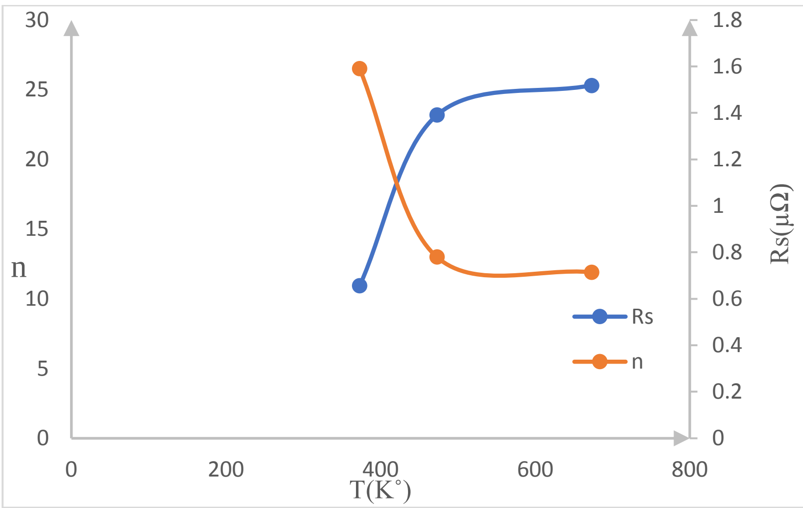
الشكل (7)مخطط dV/d ln (I) مقابل الديودات شوتكي Cu/ZnO/Al عند درجات حرارة مختلفة.

يبين الجدول (4) قيم ارتفاع حاجز الكمون والمقاومة المتسلسلة وعامل المثالية بالاعتماد على نظرية الانبعاث بالتأين الحراري ونظرية Cheung و Cheung.

673	473	300	T(K)
0.58	0.67	0.993	$\emptyset_{(Beff)}(eV)$
0.7142	0.794	1.338	$R_s\ (\mu\Omega)$
25.3	23.17	10.93	n

الجدول (4)

يبين الشكل (8) تغيرات المقاومة المتسلسلة وعامل المثالية لديودات شوتكي Cu/ZnO/Al عند درجات حرارة مختلفة.



الشكل (8) تغيرات المقاومة المتسلسلة وعامل المثالية لديودات شوتكي Cu/ZnO/Al عند درجات حرارة مختلفة.

يوضح الشكل (8) تغير المقاومة المتسلسلة وعامل المثالية لديودات شوتكي Cu/ZnO/Al عند درجات حرارة مختلفة. يظهر من الشكل (8) اعتماد المقاومة المتسلسلة بشكل كبير على درجة الحرارة، حيث نلاحظ تناقص قيمتها مع ازدياد درجة الحرارة، بينما يزداد عامل المثالية وهذا يدل على زيادة العيوب داخل بنية نصف الناقل وكذلك العيوب المتشكلة عند الوجه البيني بين نصف الناقل والمعدن [16]، [17]، [18] ،[15]. وبالمقارنة مع القيم المحسوبة في الجدول (4) حسب نظرية الانبعاث بالتأين الحراري بعد إضافة المقاومة المتسلسلة نلاحظ تطابق في القيم مع نظرية Cheung و Cheung وهذا يدل على دقة النتائج.

4.6تحديد حاجز الكمون والمقاومة المتسلسلة لديود شوتكي Cu/ZnO/Al عند درجات حرارة مختلفة اعتماداً على نظرية Norde:

سنحدد قيمة المقاومة المتسلسلة باستخدام دالة نورد [4]، [11]الموصوفة بالعلاقة التالية

$$F(V) = \frac{V}{\gamma} - \frac{kT}{q} ln\left(\frac{I(V)}{AA^{*}T^{2}}\right) \qquad (7)$$

حيث $\gamma\ (> n\ )$ هو أصغر عدد صحيح (بدون أبعاد) مقاساً بالطريقة التقليدية.

باستخدام القيم المقاسة الميزة $I - V$، يظهر اختلاف $F(V)$ كدالة لجهد التحيز المطبق V في الشكل (9) وفقاً لطريقة نورد، يتم تحديد قيمة ارتفاع الحاجز بواسطة

$$\emptyset_{(Beff)} = \mathrm{F}(\mathrm{V}_0) + \frac{\mathrm{V}_0}{\gamma} - \frac{\mathrm{kT}}{\mathrm{q}} \qquad (8)$$

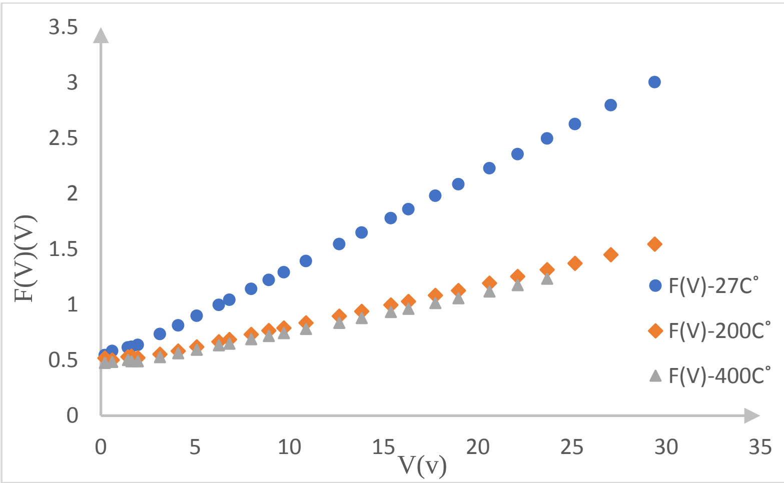
حيث $\mathrm{F}(\mathrm{V}_0)$ هي النقطة الدنيا لـ $\mathrm{F}(\mathrm{V})$ التي تحدث عند $\mathrm{V} = \mathrm{V}_0$.

تم تحديد قيمة R_s لديودات Cu/ZnO/Al باستخدام العلاقة التالية:

$$R_s = \left(\frac{kT(\gamma - \eta)}{q\ I_{min}}\right) \qquad (9)$$

حيث I_{min} هو الحد الأدنى للتيار المطابق للجهد V_0 حيث تمتلك $F(V)$ أدنى قيمة لها كما هو موضح أيضاً في الشكل (9).

يبين الشكل (9) ارتفاع حاجز الكمون لديودات شوتكي Cu/ZnO/Al عند درجات حرارة مختلفة.



الشكل (9) ارتفاع حاجز الكمون لديودات شوتكي Cu/ZnO/Al عند درجات حرارة مختلفة.

يبين الجدول (5) الكمون الأصغري وقيمة ارتفاع حاجز الكمون والتيار الأصغري وعامل المثالية والمقاومة المتسلسلة عند درجات حرارة مختلفة

R_s (μΩ)	$(\emptyset_{(Beff)})$(eV)	n	$F(V_0)$(V)	I_{min} (μA)	V_0 (V)	T(K)
0.181	0.53	10.93	0.54	0.01	0.2	300
0.306	0.507	23.17	0.502	0.07	0.2	473
0.181	0.45	25.3	0.47	0.1	0.2	673

من خلال الجدول (5) كانت جميع قيم ارتفاع حاجز الكمون المقاسة أقل من قيمة شوتكي–موت المتوقعة البالغة 1.0 eV، مما يشير إلى أن بنية الوجه البيني وحالاته المرتبطة به تؤثر على

حاجز شوتكي [19]. وخصوصاً وفق لنظرية نورد، ولكن لا نستطيع في هذه النظرية حساب قيمة عامل المثالية دون نظريتي الانبعاث بالتأين الحراري ونظرية Cheung و Cheung، على الرغم من أن قيمة ارتفاع حاجز الكمون هنا تعتبر الأفضل حسب نورد من باقي القيم المحسوبة وفق النظريات السابقة، كم ورد في الجدول (4). كما لاحظنا أن قيم ارتفاع حاجز الكمون والمقاومة المتسلسلة متناقصة مع ازدياد درجة الحرارة حسب نورد. يمكن أن يعزى الأداء الضعيف لديودات شوتكي المصنعة إلى عدة عوامل، مثل عدم التساوي على سطحها العلوي، والمقاومة العالية على التوالي، والتوزيع غير المتساوي للشحنات في الوجه البيني، انخفاض الجهد عبر وصلة M/S ووجود عيوب وتيارات تسرب ناتجة عن مستويات عالية من إعادة التركيب. علاوة على ذلك وبالتالي، قد تكون شواغر الأكسجين موجودة على سطح ZnO ، تعمل كمراكز تشبه الجهات المانحة، مما يؤدي إلى تسرب كبير في نفق التيار من Al إلى بنية ZnO المودع [8].

علاوة على ذلك، فقد تبين أن الطبقات المحضرة باستخدام الطرق الكيميائية في الهواء تنتج طبقة عازلة تؤثر على ارتفاع الحاجز، لذلك كانت قيم n التي تم الحصول عليها لجميع العينات أعلى بكثير من الوحدة ويشير هذا إلى أن سلوك ديود شوتكي غير مثالي ويمكن أن يعزى إلى المقاومة المتسلسلة وتوزيعات الشحنة البينية وانخفاض الجهد عبر الوصلة المعدنية/أنصاف–النواقل [20].

قمنا بتلخيص قيم جميع الثوابت مثل ارتفاع الحاجز، وعامل المثالية والمقاومة المتسلسلة التي تم الحصول عليها بالطريقة التقليدية، وطريقة Cheung وطريقة Norde إن تحليل الانبعاثات الحرارية التقليدية وطريقة Cheung يعطي ارتفاع في الحاجز وعامل المثالية والمقاومة المتسلسلة أكبر من طريقة Norde.

5. النتائج و مناقشتها

- ❖ تمت دراسة الميزة $I-V$ عند تعريض الديودات للحرارة، لاحظنا تأثير واضح لدرجة الحرارة على الميزة.

- استنتجنا أن الانحناء المقعر في الميزة يعود إلى المقاومة المتسلسلة لذلك اقترحنا أن تتم الدراسة بأكثر من طريقة.
- طريقة الانبعاث التأين الحراري غير كافية لديودات شوتكي حيث لم تعطي تصور كامل عن تغيرات في ارتفاع حاجز الكمون وعامل المثالية.
- يزداد ارتفاع حاجز الكمون مع ازدياد درجة الحرارة ثم ينخفض وبالتالي يُظهر سلوك غير خطي مع تغير درجة الحرارة عند $(27 - 200 - 400\ ℃)$
- تيار الإشباع لأغلب الديودات هو من رتبة $10^{-6}A$ ويتناقص مع بازدياد درجة الحرارة ويتصف بعدم الخطية.
- توصلنا إلى وجود علاقة ارتباط بين عامل المثالية وتيار الإشباع حيث لاحظنا زيادة في عامل المثالية يقابلها تناقص في تيار الإشباع مع ازدياد درجة الحرارة.
- تبين أن نظرية الانبعاث بالتأين الحراري غير كافي لمثل الديودات المحضرة، لم تظهر تأثير المقاومة المتسلسلة على تغير ارتفاع حاجز الكمون وعامل المثالية لذلك كان لابدا من تطبيق نظرية الانبعاث وذلك بعد إضافة المقاومة المتسلسلة.
- بدراسة نظرية Cheunge و Cheungeونظرية الانبعاث بالتأين الحراري بإدخال تأثير المقاومة المتسلسلة لاحظنا تناقص قيم ارتفاع حاجز الكمون والمقاومة المتسلسلة عند ازدياد درجة الحرارة.
- وجدنا تطابق في القيم المحسوبة بنظرية الانبعاث بالتأين الحراري ونظرية Cheungeو Cheung .
- حسبنا المقاومة المتسلسلة وارتفاع حاجز الكمون باستخدام طريقة Norde، فلاحظنا تناقص في قيم كل من ارتفاع كمون الحاجز والمقاومة المتسلسلة.

- توصلنا إلى أن أفضل القيم هي التي حصلنا عليها من نظرية Norde ولكن بسبب عدم القدرة على حساب عامل المثالية ووجود العامل الذي يسبب انحراف عن القيم المطلوبة تم الاعتماد على نظريتي الانبعاث ونظرية Cheung.
- توصلنا إلى أن طريقة Cheung ونظرية الانبعاث بالتأين الحراري هي الطريقة المثلى لدراسة ديودات شوتكي بحالة التي يكون فيها عامل المثالية كبير، أما طريقة نورد فهي متبعة بالحالة التي يكون فيها عامل المثالية مساوي أو أصغر من1.

المراجع

[1]. ASGHAR, M. (2013)- **Growth and interface properties of Au Schottky contact on ZnO grown by molecular beam epitaxy**. In: *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing, p012031.

[2].A. Lord et al، (2020)- **Schottky Contacts on Polarity-Controlled Vertical ZnO Nanorods**، *ACS Appl Mater Interfaces*، vol 2020، no 11، pp 13217–13228.

[3] Mayimele, M. A, van Rensburg, J. P. J, Auret, F. D, Diale, M, (2016)- **Analysis of temperature-dependant current–voltage characteristics and extraction of series resistance in Pd/ZnO Schottky barrier diodes**. Physical B: Condensed Matter Vol 480, Pp 58-62.

[4]. SOMVANSHI, Divya; JIT, Satyabrata. (2014)- **Effects of Sn and Zn seed layers on the electrical characteristics of Pd/ZnO thin-film Schottky diodes grown on n-Si substrates**. *IEEE Electron Device Letters*, Vol 35. No 9, Pp 945-947.

[5].CHENG, Ke, et al, (2007)-**Surface states dominative Au Schottky contact on vertical aligned ZnO nanorod arrays synthesized by low-temperature growth**. *New Journal of Physics*, Vol 9, No 7, pp 214.

[6] ASGHAR, M. (2013)-**Electrical characterization of Au/ZnO/Si Schottky contact**. In: *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing, Pp 012030.

[7]. RAJAN, Lintu; PERIASAMY, C.; SAHULA, Vineet. (2016)-**Electrical characterization of Au/ZnO thin film Schottky diode on silicon substrate**. Perspectives in Science. Vol 8, Pp66-68.

[8]Gullu, H. H, Bayraklı Sürücü, Ö, Terlemezoglu, M. A. K, B. U. L. E, Yildiz, D. E, & Parlak, M. (2019)- **Investigation of electrical characteristics of Ag/ZnO/Si sandwich structure**. *Journal of Materials Science: Materials in Electronics*, *30*, 15371-15378.

[9]I. Hussain, M. Y. Soomro, N. Bano, O. Nur, (2012) - **Interface trap characterization and electrical properties of Au-ZnO nanorod Schottky diodes by conductance and capacitance methods**. JOURNAL OF APPLIED PHYSICS. Vol 112, No 064506, Pp1-6

[10]KESKENLER، E. F.; HAIDAR، M، (2020)-**Schottky diode fabrication via cold substrate evaporated ag on sol-gel derived ZnO ultra-thin films for semiconductor devices**. *Journal of Ovonic Research*، Vol 16، no5، pp 309-321.

[11]Varma, T, (2017)-**Design and Development of Zinc Oxide thin film based Schottky Diodes and TFTs and their application as UV**

Detectors. (Doctoral dissertation, MNIT Jaipur) Vol 2, No 5, PP1-23.
vonic Research Vol, 2020, 16.5: 309-321.

[12]MWANKEMWA, Benard S, (2023)- **Synthesis of Template-free Flower-like ZnO Nanorods using a Simple Chemical Bath Technique.** *Tanzania Journal of Science*, Vol 49, no 5, pp 1138-1150.

[13]Coppa, B. J., Davis, R. F., & Nemanich, R. J, (2003). **Gold Schottky contacts on oxygen plasma-treated, n-type ZnO (0001).** *Applied Physics Letters*, *82*(3), 400-402.

[14] M. Özer, D. E. Yildiz, Ş. Altindal, and M. M. Bülbül, (2007)- **Temperature dependence of characteristic parameters of the Au/SnO2/n-Si (MIS) Schottky diodes**, Solid *State Electron*, vol. 51, no 6, pp 941–949.

[15]Faraz, S. M., Khranovskyy, V., Yakimova, R., Ulyashin, A., & Wahab, Q, (2011)-**Temperature dependent current transport in Schottky diodes of nano structured ZnO grown on Si by magnetron sputtering**. *Regional Symposium on Micro and Nano Electronics*, Vol 978, No1, pp. 48-51

[16] BRILLSON, Leonard J.; LU, Yicheng, (2011)-**ZnO Schottky barriers and Ohmic contacts**. *Journal of Applied Physics*, Vol 109, no12.

[17]ASGHAR، M، et al، (2013)-**Electrical characterization of Au/ZnO/Si Schottky contact**. *In: Journal of Physics: Conference Series*. pp 012030.

[18]MIRANDA, Enrique; MILANO, Gianluca; RICCIARDI, Carlo, (2020)-**Compact modeling of the IV characteristics of ZnO nanowires including nonlinear series resistance effects**. *IEEE Transactions on Nanotechnology, vol* 19, pp 297-300.

[19] COPPA, B. J. (2005)-**Structural, microstructural, and electrical properties of gold films and Schottky contacts on remote plasma-cleaned, n-type ZnO {0001} surfaces**. *Journal of applied physics*, Vol,97, No 10.

[20]AZHAR, Ebraheem Ali, et al. (2018)-**ZnO-based Schottky and oxide multilayer devices for visibly transparent photovoltaic applications**. *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol 65, no8, pp 3291-3299.

دراسة في المجموعات المولدة الصغرى لزمرة تبديلية

هيفاء صويص[1] د. إيمان الخوجة[2] د. عدنان الطيباني[3]

الملخص

يعدُّ البحث عن مجموعاتٍ مولدة لزمرة تبديلية، وارتباط مفهوم التوليد بمفهوم الاستقلال وتعدد أنواع الاستقلال من القضايا الهامة في نظرية الزمر، حيث تكتسب الزمرة التبديلية التي تملك مجموعة مولدة خصائصاً هامة تميزها عن الزمر التي لا تماثلها. في هذه الورقة قمنا بدراسة مفهوم المجموعات المولدة الصغرى لزمرة تبديلية ومفهوم $S-$استقلال وذلك في زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس n وفي الزمر الدوارة المنتهية، كما قمنا بإيجاد مجموعات مولدة صغرى للزمر التبديلية الحرة حيث إن هذه المجموعات لا تشكل أساساً حراً لها، فضلاً عن إيجاد مجموعات مولدة صغرى لزمرة الأعداد الصحيحة.

الكلمات المفتاحية. مجموعة مولدة صغرى، مجموعة مستقلة، مجموعة مستقلة خطياً، مجموعة $S-$مستقلة، الأساس، الأساس الحر.

---

[1] طالبة دراسات عليا في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة حمص.
[2] أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة حمص.
[3] مدرس في قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية – جامعة حمص.

دراسة في المجموعات المولدة الصغرى لزمرة تبديلية

A Study of Minimal Generating Sets of an Abelian Group

Haifaa Swies [1] Dr. Eaman Al-Khouja [2] Dr. Adnan Al-Taybani [3]

Abstract

The aim of this paper is to study minimal generating sets of an abelian group and $S-$independent sets, in addition to examining the effect of the concept of independence, in its various forms, on the generating set of the abelian group, since an abelian group that has a generating set has important properties that distinguish it from non-isomorphic ones. We also studied minimal generating sets of $(\square_n,+)$ and finite cyclic groups. Additionally, we found minimal generating sets of free abelian groups; however, these sets don't form a free basis. Finally, we determine minimal generating sets of $(\square,+)$.

Key Words: Minimal generating set, Independent set, linearly Independent set, Basis, Free Basis.

[1] Graduate Student , Department of Mathematics Homs University

[2] Assistant Professor, Department of Mathematics Homs University.

[3] .Department of Basic Sciences, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering Homs University.

مقدمـــة.

تعد مسألة التعبير عن عناصر بنية جبرية بدلالة عناصر مجموعة جزئية غير خالية منها من المسائل الهامة وذات أثر كبير في الرياضيات عموماً وفي الجبر على وجه الخصوص، ويعد البحث عن أصغر المجموعات المولدة لمختلف البنى الجبرية كالزمرة والحلقة وغيرها من البنى الجبرية، والتي درست من قبل M. Hrbek و P. Ruzicka في [1] و[2] و[3] و[4]، من أبرز الدراسات وأحدثها في هذا المجال، ففي عام 2015 قام M. Hrbek و P. Ruzicka في [4] بدراسة المجموعات المولدة الصغرى لأنواع من الزمر التبديلية كزمر الفتل والزمر عديمة الفتل وذلك من خلال طرح مفهوم S–استقلال، حيث تجدر الإشارة إلى أن مفهوم الاستقلال بأنواعه وتعميماته وحالاته الخاصة تلعب دوراً هاماً في توصيف المجموعات المولدة للبنى الجبرية المختلفة، وبشكل خاص في الزمر التبديلية، وقد قمنا في هذه المقالة بدراسة ثلاثة أنواع من المجموعات وهي المجموعة المستقلة والمجموعة المستقلة خطياً بالإضافة إلى المجموعة الـ S–مستقلة، حيث بينا العلاقة بين هذه المجموعات كما قمنا بدراسة المجموعات المولدة ضمن حالات الاستقلال السابقة وبشكل خاص المجموعة المولدة الصغرى والتي تكون حسب تعريفها S–مستقلة، حيث قمنا بتوصيف طبيعة العلاقة بين عناصر مجموعة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس n لتكون مجموعة مولدة صغرى لهذه الزمرة، فضلاً عن تحديد قدرة أكبر مجموعة مولدة صغرى لها، بالإضافة إلى تعين المجموعات المولدة الصغرى للزمرة الدوارة المنتهية والتي مرتبتها n بناءً على التماثل بين هذه الزمرة وزمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس n، فضلاً عن ذلك قمنا بإيجاد مجموعات مولدة صغرى للزمرة التبديلية الحرة انطلاقاً من أساس حر لها وذلك بطريقتين مختلفتين حيث إنَّ المجموعة المولدة الصغرى في هذه الحالة لا تشكل أساساً حراً للزمرة، فضلاً عن العديد من المبرهنات والنتائج الهامة المرتبطة بمفهوم المجموعة المولدة لزمرة والمجموعات المستقلة بأنواعها.

1- تعاريف ومبرهنات أساسية.

نعرض في هذه الفقرة بعض المفاهيم الأســاســية المتعلقة بالزمر والمجموعات المولدة لزمرة، والبداية مع التعريف الآتي:

تعريف. [3].

لتكن $(G,+)$ زمرة ولنفرض أنَّ S مجموعـة جزئيـة غير خـاليـة من G، عنـدئـذ نقول عن المجموعة S إنها مولدة للزمرة G إذا كانت أصـغر زمرة جزئية من G تحوي S هي G نفسـها. إذا كانت المجموعة S مولدة للزمرة G فإننا نعبر ذلك بالشكل $G=\langle S\rangle$.

تعريف. [3].

لتكن $(G,+)$ زمرة، عنـدئـذ نقول عن الزمرة G إنهـا منتهيـة التوليـد إذا وجـدت في G مجموعة جزئية غير خالية منتهية مولدة لها، وإلّا فإن الزمرة G غير منتهية التوليد.

مبرهنة.1.1. [3].

لتكن $(G,+)$ زمرة ولنفرض أنَّ S مجموعـة جزئيـة غير خـاليـة من G، عنـدئـذ فـإنَّ $G=\langle S\rangle$ إذا وفقط إذا كان كل عنصـر $x\in G$ يكتب بدلالة عناصـر مجموعة جزئية منتهية من عناصر المجموعة S.

تعريف. [3].

لتكن $(G,+)$ زمرة، عندئذ نقول عن الزمرة G إنها دوارة إذا وجد عنصر $a\in G$ يحقق أنَّ $G=\langle\{a\}\rangle$، ونقول في هذه الحالة إنَّ G زمرة دوارة مولدة بالعنصـــر a ونكتب اختصـــاراً $G=\langle a\rangle$.

مبرهنة.1.2. [3].

لتكن $(G,+)$ زمرة دوارة مرتبتها n ومولدة بالعنصـــر a ولنفرض أنَّ $k\in \mathbb{Z}^+$، عندئذ فإنَّ $G=\langle a^k\rangle$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(n,k)=1$.

مبرهنة.1.3. [6].

لتكن G زمرة و $a \in G$ عنصـــر مرتبتـه n، ولنفرض أنَّ $k, r, s \in \mathbb{Z}^+$ عندئذ فإنَّ القضايا الآتية صحيحة:

1- $\langle a^k \rangle = \langle a^{gcd(n,k)} \rangle$.

2- $o(a^k) = \dfrac{n}{\gcd(n,k)}$.

3- $\langle a^r \rangle = \langle a^s \rangle$ عندما وفقط عندما $\gcd(n,r) = \gcd(n,s)$.

مبرهنة.1.4. [6,3].

لتكن $\{G_i\}_{i=1}^{n}$ أسرة من الزمر الدوارة المنتهية، عندئذ فإنَّ الشرط الازم والكافي لتكون زمرة الجداء المباشر $G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$ دوارة هو أن تكون $(G_i :1)$ و $(G_j :1)$ أعداداً أولية فيما بينها وذلك لأجل كل $i \neq j$ حيث إنَّ $1 \leq i, j \leq n$.

مبرهنة.1.5. [3].

لتكن $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة الأعداد الصحيحة ولنفرض أنَّ $n_1, n_2, ..., n_k$ أعداداً صحيحة موجبة وأنَّ $\gcd(n_1, n_2, ..., n_k) = d$ عندئذ فإنَّ $\langle n_1, n_2, ..., n_k \rangle = \langle d \rangle$.

مبرهنة.1.6. [6,3].

لتكن G زمرة دوارة، ولنفرض أنَّ $G = \langle a \rangle$، عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1- إذا كانت G غير منتهية فإن $G \cong \mathbf{Z}$.

2- إذا كانت G منتهية من المرتبة n فإن $G \cong Z_n$.

مبرهنة.1.7. [6,4,3].

لتكن $(G, +)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أنَّ $\xi(G) = \{x \in G; o(x) \in \mathbb{N}^+\}$، عندئذ فإنَّ المجموعة $\xi(G)$ تشكل زمرة جزئية من الزمرة G.

تعريف. [6,4,3].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، عندئذ تدعى الزمرة الجزئية $\xi(G)$ بزمرة الفتل الجزئية من الزمرة G، وإذا كانت $\xi(G)=G$ عندئذ نقول إنَّ G زمرة فتل، وإذا كان $\xi(G)=\langle e\rangle$ نقول عن الزمرة G أنها زمرة فتل حرة (عديمة الفتل).

تعريف. [6,3].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن $X=\{x_i\}_{i=1}^{n}$ مجموعة جزئية من الزمرة G عناصرها مغايرة للصفر، عندئذ نقول عن المجموعة X إنها **مستقلة** إذا كان لأجل أي مجموعة جزئية $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}\subset\mathbb{Z}$ وتحقق $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=0$ ينتج أن $\alpha_i x_i=0$ لأجل كل $1\leq i\leq n$.
ونقول عن المجموعة X إنها **مرتبطة** إذا لم تكن مستقلة.

تعريف. [6,3].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من الزمرة G عناصرها مغايرة للصفر، عندئذ نقول عن المجموعة X إنها مستقلة إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية منها مستقلة. ونقول عن المجموعة X إنها مرتبطة إذا لم تكن مستقلة.

مبرهنة.1.8. [3].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ تكون المجموعة X مستقلة إذا وفقط إذا كانت $\langle X\rangle=\sum_{x\in X}\langle x\rangle$.

تعريف. [3].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية من G عناصرها مغايرة للصفر، عندئذ نقول إنَّ X أساساً للزمرة G إذا كان $G=\langle X\rangle$ وكانت المجموعة X مستقلة.

تعريف.[3].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبـديليـة، لنفرض أن $X=\{x_i\}_{i=1}^n$ مجموعـة جزئيـة من الزمرة G عندئذ نقول إنَّ المجموعة X مسـتقلة خطياً إذا كان لأجل أي مجموعة جزئية $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{Z}$ وتحقق $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$ ينتج أن $\alpha_i = 0$ لأجل كل $1 \le i \le n$. ونقول عن المجموعة X إنها مرتبطة خطياً إذا لم تكن مستقلة خطياً.

تعريف.[3].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ نقول عن المجموعة X إنـها مسـتقلة خطياً إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية منـها مستقلة خطياً. ونقول عن المجموعة X إنها مرتبطة خطياً إذا لم تكن مستقلة خطياً.

مبرهنة.1.9.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية عديمة الفتل، ولنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G عناصـرها مغايرة للصـفر، عندئذ تكون المجموعة X مسـتقلة إذا وفقط إذا كانت مسـتقلة خطياً.

البرهان. واضح.

مبرهنة.1.10.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1- إذا كان $0 \in X$ فإنَّ المجموعة X تكون مرتبطة خطياً.

2- إذا كانت X مستقلة خطياً فإنها تكون مستقلة.

3- تكون X مرتبطة إذا وفقط إذا حوت مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية مرتبطة.

4- تكون X مرتبطـة خطياً إذا وفقط إذا حوت مجموعـة جزئيـة غير خـاليـة ومنتهيـة مرتبطـة خطياً.

5- إذا كانت X مرتبطة فإنها تكون مرتبطة خطياً.

البرهان.

1- واضح.

2- لنفرض أنَّ المجموعة X مستقلة خطياً عندئذ فإنَّ عناصر المجموعة X مغايرة للصفر، من جهة أخرى أياً كانت العناصر $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbf{Z}, \{x_i\}_{i=1}^{n} \subset X$ والتي تحقق أنَّ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ فإنَّ $\alpha_i = 0$ لأجل كل $1 \le i \le n$ وبالتالي فإنَّ $\alpha_i v_i = 0$ لأجل كل $1 \le i \le n$، وهذا يبين أنَّ المجموعة X مستقلة.

3- 4- واضح.

5- لنفرض أنَّ المجموعة X مرتبطة عندئذ توجد في X مجموعة جزئية منتهية ولتكن $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subset X$ مرتبطة، وبالتالي توجد العناصر $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbf{Z}$ تحقق أنَّ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ عندئذ يوجد $1 \le i \le n$ يحقق أنَّ $\alpha_i v_i \ne 0$ وبالتالي فإنَّ $\alpha_i \ne 0$، وهذا يبين أنَّ المجموعة $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ مرتبطة خطياً، وبالتالي فإنَّ X مرتبطة خطياً.

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية من G عناصرها مغايرة للصفر، عندئذ إذا كانت المجموعة X مستقلة فليس بالضرورة أن تكون مستقلة خطياً، وإذا كانت المجموعة X مرتبطة خطياً فليس بالضرورة أن تكون مرتبطة.

تعريف. [6,4,3].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، عندئذ نقول عن الزمرة G إنها حرة إذا وجد في G مجموعة جزئية غير خالية X مستقلة خطياً ومولدة لها، وندعو المجموعة X في هذه الحالة أساساً حراً للزمرة G.

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة حرة، عندئذ إذا كان X أساساً حراً للزمرة G فهو أساس لها، لكن العكس غير صحيح بالضرورة.

مبرهنة.$\mathbf{1.11}$. $\mathbf{[6,3]}$.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ تشكل المجموعة X أساساً حراً للزمرة G إذا وفقط إذا كان كل عنصر $x \in G$ يكتب بدلالة عناصر مجموعة جزئية منتهية من عناصر المجموعة X وبطريقة وحيدة.

مبرهنة.$\mathbf{1.12}$. $\mathbf{[6,3]}$.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، عندئذ تكون الزمرة G حرة إذا وفقط إذا كانت مجموعاً مباشراً لزمرٍ جزئية دوارة غير منتهية منها.

مبرهنة.$\mathbf{1.13}$. $\mathbf{[6,3]}$.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة، ولنفرض أنَّ X ,Y أساسين حرين مختلفين لها، عندئذ فإنَّ $card(X)=card(Y)$.

ملاحظة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أنَّ X ,Y أساسين مختلفين لها، عندئذ ليس بالضرورة أن يكون $card(X)=card(Y)$، فضلاً عن ذلك إذا كان X أساساً للزمرة G، عندئذ أياً كان $x \in G$ فإنَّ x يكتب بدلالة عناصر مجموعة جزئية منتهية من عناصر المجموعة X لكن ليس بالضرورة أن تكون هذه الكتابة وحيدة.

مبرهنة.$\mathbf{1.14}$.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة، ولنفرض أنَّ X أساساً حراً للزمرة G، عندئذ أياً كان العنصرين $x ,y \in X$ فإنَّ $x \notin \langle y \rangle, y \notin \langle x \rangle$.

البرهان. واضح.

2- المجموعة المولدة الصغرى لزمرة تبديلية.

نعرض في هذه الفقرة مفهوم المجموعة المولدة الصغرى لزمرة تبديلية وأهم المبرهنات المتعلقة بهذا المفهوم، فضلاً عن النتائج التي تم التوصل لها، والبداية مع التعريف الآتي:

تعريف. [5,1].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ نقول عن X إنها S–مستقلة إذا كان $x \notin \langle X \setminus \{x\} \rangle$ وذلك أياً كان $x \in X$.

مبرهنة.2.1.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ فإنَّ X تكون S–مستقلة إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية منها S–مستقلة.

البرهان. واضح.

مبرهنة.2.2.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ تكون القضيتان الآتيتان متكافئتين:

1- المجموعة X هي S–مستقلة.

2- أياً كانت $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subseteq X$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbf{Z}$ والتي تحقق أنَّ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ فإنَّ $\alpha_i \neq \pm 1$ لأجل كل $1 \leq i \leq n$.

البرهان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أنَّ X هي S–مستقلة وأنَّ $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subseteq X$، لتكن $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbf{Z}$ تحقق أنَّ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ ولنفرض جدلاً أنه يوجد دليل $1 \leq j \leq n$ بحيث إنَّ $\alpha_j = \pm 1$،

عندئذ نجد أنَّ $x_j \in \langle X \setminus \{x_j\} \rangle$ وهذا يناقض كون المجموعة X هي $S-$مستقلة، ومنه الفرض الجدلي خاطئ وبالتالي $\alpha_i \neq \pm 1$ لأجل كل $1 \le i \le n$.

$(2) \Leftarrow (1)$.

لنفرض أنَّ (2) محققة، ولنفرض جدلاً أنَّ X ليست $S-$مستقلة وبالتالي يوجد عنصر $x \in X$ بحيث إنَّ $x \in \langle X \setminus \{x\} \rangle$ ومنه يوجد $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbf{Z}, \{x_i\}_{i=1}^{n} \subseteq X$ بحيث أنَّ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = x$ وبالتالي:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + (-x) = \sum_{i=1}^{n} (-\alpha_i) x_i + x = 0$$

وهذا يناقض الفرض (2). ومنه الفرض الجدلي خاطئ وبالتالي المجموعة X هي $S-$مستقلة.

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أنَّ X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ فإنَّ X تكون $S-$مستقلة إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

أياً كان $x \in X$ وكانت العناصر $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbf{Z}, \{x_i\}_{i=1}^{n} \subseteq X$ التي تحقق أنَّ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = x$ فإنَّ $x \in \{x_i\}_{i=1}^{n}$.

مبرهنة.2.3.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ إذا كانت المجموعة X مستقلة فإنها تكون $S-$مستقلة.

البرهان.

لنفرض أنَّ المجموعة X مستقلة وبالتالي فإن جميع عناصرها مغايرة للصفر، لنفرض جدلاً أنَّ المجموعة X ليست $S-$مستقلة وبالتالي يوجد $x \in X$ بحيث إنَّ $x \in \langle X \setminus \{x\} \rangle$ ومنه

يـوجـد $\{x\}$ $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbf{Z}, \{x_i\}_{i=1}^{n} \subset X \setminus \{x\}$ بـحـيـث إنَّ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = x$ وبـالـتـالـي $-x + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$، بما إنَّ المجموعة X مســتقلة فإنَّ $\alpha_j x_j = 0$ لكل $1 \le j \le n$ و $-x = 0$ ومنه $x = 0$ وهذا تناقض. ومنه الفرض الجدلي خاطئ وبالتالي المجموعة X هي S–مستقلة.

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ فإنَّ:

1- إذا كانت المجموعة X مستقلة خطياً فإنها تكون S–مستقلة.

2- إذا كانت المجموعة X هي S–مستقلة فليس بالضرورة أن تكون مستقلة.

3- إذا كان $0 \in X$ فإنَّ المجموعة X ليست S–مستقلة.

4- أياً كان $g \in G$ فإن المجموعة $\{g\}$ هي S–مستقلة.

تعريف. [3,2,1].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ نقول إنَّ X **مجموعة مولدة صغرى** للزمرة G إذا كانت S–مستقلة وكان $G = \langle X \rangle$.

مبرهنة.2.4.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية (حرة)، لنفرض أن X أساساً (أساساً حراً) للزمرة G، عندئذ فإن X مجموعة مولدة صغرى للزمرة G.

البرهان. ينتج مباشرة عن المبرهنة. 2.3. والنتيجة الأخيرة.

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية (حرة)، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ فإنَّ:

1- إذا كانت X أساساً (أساساً حراً) للزمرة G فإنها تكون مولدة صغرى للزمرة G.

2− إذا كانت X مجموعة مولدة صغرى للزمرة Gفليس بالضرورة أن تكون أساساً (أساساً حراً) للزمرة G.

مثال.1.

إنَّ $(\mathbb{Z},+)$ زمرة حرة، وإنَّ المجموعة $\{1\}$ تشــكل أســاســاً حراً لها وبالتالي فهي مجموعة مولدة صـغرى، من جهة أخرى نلاحظ أنَّ المجموعة $\{6,10,15\}$ تشكل مجموعة مولدة صـغرى ولا تشكل أساساً حراً لها، فضلاً عن ذلك نلاحظ أنه أياً كان $x\in\mathbb{Z}$ فإنَّ:

$$x=(x)10+(x)15+(-4x)6$$

$$x=(x)10+(-x)15+(x)6$$

مثال.2.

نعلم أنَّ الزمرة $(U_{15},\cdot)$ هي زمرة تبديلية غير دوارة، إنَّ $\{7,8\}$ مجموعة مولدة صغرى للزمرة U_{15} لكنها ليست أساساً لها، من جهة أخرى إنَّ $\{7,11\}$ تشكل أساساً للزمرة وبالتالي هي مجموعة مولدة صغرى لها.

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة مولدة صـــــغرى للزمرة G، عندئذ أياً كان $x\in G$ فإنَّ x يكتب بدلالة عناصـر مجموعة جزئية منتهية من عناصـر المجموعة X لكن ليس بالضرورة أن تكون هذه الكتابة وحيدة.

مبرهنة.2.5.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ الشـرط اللازم والكافي حتى تكون المجوعة X مجموعة مولدة صــغرى للزمرة G هو أن تكون X مجموعة مولدة للزمرة G وأن لا تحوي مجموعة جزئية فعلية مولدة للزمرة G.

البرهان.

$(\Leftarrow)$ لتكن X مجموعة جزئية غير خالية من G، ولنفرض أنَّ X مجموعة مولدة صــــغرى للزمرة G. لنفرض جدلاً أنـه توجد مجموعـة جزئيـة $X_1\subset X$ تحقق أنَّ $\langle X_1\rangle=G$، عندئذ

يوجد عنصر $x \in X$ بحيث إنَّ $x \notin X_1$، عندئذ $\langle X \setminus \{x\} \rangle \subseteq \langle X_1 \rangle \in x$، أي إنَّ $x \in \langle X \setminus \{x\} \rangle$ وهذا يبين أنَّ المجموعة X ليست مولدة صغرى للزمرة G، لأنها ليست S–مستقلة وهذا تناقض، وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ، أي إنَّ X_1 ليست مولدة للزمرة G، وبالتالي المجموعة X لا تحوي أي مجموعة جزئية فعلية مولدة للزمرة G.

$(\Rightarrow)$ لتكن X مجموعة جزئية غير خالية من G، ولنفرض أنَّ X مجموعة مولدة للزمرة G ولا تحوي أي مجموعة جزئية فعلية تولد الزمرة G، وبالتالي أياً كان $x \in X$ فإنَّ $x \notin \langle X \setminus \{x\} \rangle$ وبالتالي المجموعة X هي S–مستقلة، وبالتالي المجموعة X مولدة صغرى للزمرة G.

مبرهنة.2.6.
لتكن $(G,+),(\overline{G},\cdot)$ زمرتين تبديليتين، ولنفرض أنَّ $f: G \to \overline{G}$ تماثلاً زمرياً، عندئذ إذا كانت X مجموعة مولدة صغرى للزمرة G فإن $f(X)$ هي مجموعة مولدة صغرى للزمرة $\overline{G}$.

البرهان.
ليكن $f: G \to \overline{G}$ تماثلاً زمرياً من الزمرة G إلى الزمرة $\overline{G}$ ولنفرض أنَّ X مجموعة مولدة صغرى للزمرة G، عندئذ بما أنَّ $G = \langle X \rangle$ فإنَّ $\overline{G} = \langle f(X) \rangle$.

لنفرض جدلاً أنَّ المجموعة $f(X)$ ليست S–مستقلة عندئذ فإنه يوجد عنصر $y \in f(X)$ يحقق أنَّ $y \in \langle f(X)/\{y\} \rangle$ وبالتالي توجد عناصر $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbf{Z}, \{y_i\}_{i=1}^{n} \subseteq f(X)/\{y\}$ حيث إنَّ $y = \prod_{i=1}^{n} (y_i)^{\alpha_i}$، كما أنه يوجد $x \in X, \{x_i\}_{i=1}^{n} \subseteq X$ تحقق أنَّ $y_i = f(x_i)$ وذلك لأجل كل $1 \le i \le n$ وأنَّ $y = f(x)$، وبالتالي فإنَّ:

$$y = f(x) = \prod_{i=1}^{n} (y_i)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{n} (f(x_i))^{\alpha_i} = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$$

وهذا يكافئ أنَّ:

$$f\left(-x+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)=0$$

وبما أنَّ f تماثلاً زمرياً فإنَّ $-x+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=0$ وبالتالي $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ وبما أنَّ X هي $S-$مستقلة فإنَّ $x\in\{x_i\}_{i=1}^{n}$ وبالتالي فإنَّ $y\in\{y_i\}_{i=1}^{n}$ وهذا تناقض وبالتالي فإنَّ الفرض الجدلي خاطئ والمجموعة $f\left(X\right)$ هي $S-$مستقلة، أي إنَّ $f\left(X\right)$ مجموعة مولدة صغرى للزمرة $\overline{G}$.

مبرهنة.2.7.

لتكن $(G,+),(\overline{G},\cdot)$ زمرتين تبديليتين، ولنفرض أنَّ X مجموعة مولدة صغرى للزمرة G وأنَّ Y مجموعة مولدة صغرى للزمرة $\overline{G}$، عندئذ فإن المجموعة $Z=\left(X\times\{0\}\right)\bigcup\left(\{0\}\times Y\right)$ مولدة صغرى لزمرة الجداء المباشر $G\times\overline{G}$.

البرهان.

واضح أنَّ المجموعة Z مولدة للزمرة $G\times\overline{G}$. ليكن $(x,y)\in Z$ حيث إنَّ $x\in X, y\in Y$ عندئذ طالما أنَّ X,Y مجموعات $S-$مستقلة فإنَّ $x\notin\langle X\setminus\{x\}\rangle, y\notin\langle Y\setminus\{y\}\rangle$، وبالتالي:

$$(x,0)\notin\left\langle\left(X\times\{0\}\right)\setminus\{(x,0)\}\right\rangle,(0,y)\notin\left\langle\left(\{0\}\times Y\right)\setminus\{(0,y)\}\right\rangle$$

ومنه فإنَّ $(x,y)\notin\langle Z\setminus\{(x,y)\}\rangle$، وبالتالي Z هي مجموعة $S-$مستقلة.

3- المجموعات المولدة الصغرى لبعض الزمر التبديلية الشهيرة.

في هذه الفقرة سنقوم بدراسة وجود المجموعات المولدة الصغرى لزمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس n ضمن عدة حالات، فضلاً عن دراسة وجود مجموعات مولدة صغرى للزمر التبديلية الحرة بحيث لا تشكل أساسا حراً لها، بالإضافة لعدد من المبرهنات والنتائج الهامة، والبداية مع المبرهنة الآتية:

مبرهنة.3.1.

ليكن p عدداً أولياً و n عدداً صحيحاً موجباً، ولنفرض أنَّ $(Z_{p^n},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس p^n، ولنفرض أنَّ X مجموعة مولدة صغرى للزمرة Z_{p^n} عندئذ فإنَّ $Card(X)=1$.

البرهان.

ليكن $x \in Z_{p^n}$ عنصراً مغايراً للصفر وأولي مع p، عندئذ فإنَّ $Z_{p^n}=\langle\{x\}\rangle$، فضلاً عن ذلك المجموعة $\{x\}$ هي S-مستقلة وبالتالي فإنَّ $\{x\}$ مجموعة مولدة صغرى للزمرة Z_{p^n}.

لنفرض جدلاً أنَّ X مجموعة مولدة صغرى للزمرة Z_{p^n} وأنَّ $Card(X)>1$ عندئذ فإنَّ $0\notin X$، ونميز حالتين:

الحالة الأولى: إذا كان أحد عناصر المجموعة X أولي مع p وليكن x_0 عندئذ فإنَّ $\{x_0\}$ مجموعة مولدة صغرى للزمرة Z_{p^n} وهذا يناقض كون المجموعة X مولدة صغرى للزمرة Z_{p^n} .

الحالة الثانية: كل عناصر المجموعة X ليست أولية مع p ولنفرض أنَّ d هو القاسم المشترك الأكبر لعناصر المجموعة X، وبالتالي فإنَّ $\langle X\rangle=\langle d\rangle=Z_{p^n}$، من جهة أخرى إنَّ p يقسم d وبالتالي $\langle X\rangle=\langle d\rangle\neq Z_{p^n}$، وهذا يتناقض مع كون المجموعة X مجموعة مولدة صغرى للزمرة Z_{p^n}.

مما سبق نجد أنَّه إذا كانت X مجموعة مولدة صغرى للزمرة Z_p فإنَّ $Card(X)=1$.

نتيجة.

ليكن p عدداً أولياً و n عدداً صحيحاً صحيحاً موجباً، ولنفرض أنَّ $(Z_{p^n},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس p^n، عندئذ تكون المجموعة $\{a\}$ مولدة صغرى للزمرة Z_{p^n} إذا وفقط إذا كان $a\in Z_{p^n}$ أولياً مع p.

مبرهنة.3.2.

ليكن p,q عددان أوليان و n,m عددان صحيحان موجبان، ولنفرض أنَّ $(Z_{p^nq^m},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس p^nq^m، ولنفرض أنَّ X مجموعة مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^nq^m}$ عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1- $Card(X)\le 2$.

2- لتكن $a,b\in Z_{p^nq^m}$، عندئذ تكون المجموعة $\{a,b\}$ مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^nq^m}$ إذا وفقط إذا كان a,b ليسا أوليان مع pq و $d=\gcd(a,b)$ أولي مع pq.

3- لتكن $a,b\in Z_{p^nq^m}$، ولنفرض أنَّ $o(a)=p^n, o(b)=q^m$ عندئذ تكون المجموعة $X=\{a,b\}$ مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^nq^m}$.

البرهان.

1- ليكن $x\in Z_{p^nq^m}$ عنصراً أولياً مع pq، عندئذ فإنَّ $Z_{p^nq^m}=\langle\{x\}\rangle$، فضلاً عن ذلك المجموعة $\{x\}$ هي S–مستقلة وبالتالي فإنَّ $\{x\}$ مجموعة مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^nq^m}$.

نعلم أنَّ $Z_{p^nq^m}\cong Z_{p^n}\times Z_{q^m}$ وبالتالي يوجد $f:Z_{p^n}\times Z_{q^m}\to Z_{p^nq^m}$ تماثلاً زمرياً من الزمرة $Z_{p^n}\times Z_{q^m}$ إلى الزمرة $Z_{p^nq^m}$، ولنفرض أنَّ X,Y مجموعات مولدة صغرى للزمر Z_{p^n},Z_{q^m} على الترتيب، عندئذ $Card(X)=Card(Y)=1$ وذلك حسب المبرهنة. 3.1، كما أنَّ $Z=(X\times\{0\})\cup(\{0\}\times Y)$ مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^n}\times Z_{q^m}$ وذلك حسب المبرهنة

2.6، ونلاحظ أنَّ $Card\,(Z)=2$، ومنه حسب المبرهنة 2.5 فإنَّ المجموعة $f\,(Z)$ مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^nq^m}$، وإنَّ $Card\,(f\,(Z))=2$.

لنفرض جدلاً أنَّ الزمرة $Z_{p^nq^m}$ تملك مجموعة مولدة صغرى X_1 تحقق أنَّ $Card\,(X_1)>2$ وبالتالي فإنَّ الزمرة $Z_{p^n}\oplus Z_{q^m}$ تملك مجموعة مولدة صغرى Z_1 تحقق أنَّ $Card\,(Z_1)>2$ وذلك لأنَّ $Z_{p^nq^m}\cong Z_{p^n}\oplus Z_{q^m}$، وهذا غير ممكن وبالتالي إذا كانت X_1 مجموعة مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^nq^m}$ فإنَّ $Card\,(X_1)\leq 2$.

2- $(\Leftarrow)$ لنفرض أن المجموعة $\{a,b\}$ مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^nq^m}$، عندئذ تكون المجموعة $\{a,b\}$مولدة للزمرة $Z_{p^nq^m}$ وبالتالي فإنَّ $d=\gcd(a,b)$أولي مع pq، لنفرض جدلاً أن واحد على الأقل من a,b أولي مع pq وليكن a عندئذ $\langle b\rangle\subseteq\langle a\rangle=Z_{p^nq^m}$ وبالتالي المجموعة $\{a,b\}$ ليست $S-$مستقلة، وبالتالي a,b أوليان مع pq.

$(\Rightarrow)$ ليكن $a,b\in Z_{p^nq^m}$ ولنفرض أنَّ a,b ليسا أوليان مع pq و $d=\gcd(a,b)$ أولي pq، عندئذ $Z_{p^nq^m}=\langle\{a,b\}\rangle=\langle d\rangle$، لنفرض جدلاً أنَّ المجموعة $\{a,b\}$ ليست $S-$مستقلة ولنفرض أنَّ $a\in\langle\{b\}\rangle$ ومنه فإنَّ:

$$\langle\{a\}\rangle\subseteq\langle\{b\}\rangle=\langle\{a,b\}\rangle=Z_{p^nq^m}$$

وهذا يعني أنَّ b أولي مع pq وهذا تناقض، ومنه فإنَّ المجموعة $\{a,b\}$ هي $S-$مستقلة، وهذا يبين أنَّ المجموعة $\{a,b\}$ مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^nq^m}$.

3- لنفرض أنَّ $o(a)=p^n, o(b)=q^m$. بما أنَّ $(\langle\{a,b\}\rangle:1)$ تقبل القسـمة على كل من p^n,q^m فـإنَّ $Z_{p^nq^m}=\langle\{a,b\}\rangle$. من جهـة أخرى بمـا أنَّ $\gcd(o(a),o(b))=1$ فـإنَّ $\langle\{a\}\rangle\cap\langle\{b\}\rangle=\{0\}$، وهذا يبين أنَّ $Z_{p^nq^m}=\langle\{a\}\rangle\times\langle\{b\}\rangle$ ومنـه فإنَّ المجموعة $\{a,b\}$ مسـتقلة، وحسـب المبرهنة.2.3، فإن المجموعة $\{a,b\}$ هي $S-$مسـتقلة، مما سـبق نجد أنَّ المجموعة $\{a,b\}$ مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^nq^m}$.

مبرهنة.3.3.

لتكن p,q,r أعداداً أولية مختلفة و n,m,t أعداداً صحيحة موجبة، ولنفرض أنَّ $(Z_{p^nq^mr^t},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس $p^nq^m r^t$، ولنفرض أنَّ X مجموعة مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^nq^mr^t}$ عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1- $Card(X) \leq 3$.

2- ليكن $a,b \in Z_{p^nq^mr^t}$، عندئذ تكون المجموعة $\{a,b\}$ مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^nq^mr^t}$ إذا وفقط إذا كان a,b ليسا أوليان مع pqr و $d=\gcd(a,b)$ أولي pqr.

3- ليكن $a,b,c \in Z_{p^nq^mr^t}$، عندئذ إذا كان $o(a)=p^n, o(b)=q^m, o(c)=r^t$ فإن المجموعة $X=\{a,b,c\}$ مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^nq^mr^t}$.

البرهان.

1- نعلم أنَّ $Z_{p^nq^mr^t} \cong Z_{p^nq^m} \times Z_{r^t}$ وبالتالي يوجد $f: Z_{p^nq^m} \times Z_{r^t} \to Z_{p^nq^mr^t}$ تماثلاً زمرياً من الزمرة $Z_{p^nq^m} \times Z_{r^t}$ إلى الزمرة $Z_{p^nq^mr^t}$، ولنفرض أنَّ X,Y مجموعات مولدة صغرى للزمر $Z_{p^nq^m}, Z_{r^t}$ على الترتيب، عندئذ $Card(Y)=1$ وذلك حسب المبرهنة 3.1، و $Card(X) \leq 2$ وذلك حسب المبرهنة 3.2، وبالتالي فإنَّ $Card(X_1) \leq 3$.

2- $(\Leftarrow)$ لنفرض أن المجموعة $\{a,b\}$ مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^nq^mr^t}$، عندئذ تكون المجموعة $\{a,b\}$ مولدة للزمرة $Z_{p^nq^mr^t}$ وبالتالي فإن $d=\gcd(a,b)$ أولي pqr، لنفرض جدلاً أنَّ واحد على الأقل من a,b أولي مع pqr وليكن a عندئذ $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle = Z_{p^nq^mr^t}$ وبالتالي المجموعة a,b ليست S–مستقلة، وبالتالي a,b أوليان مع pqr.

$(\Rightarrow)$ ليكن $a,b \in Z_{p^nq^mr^t}$ ولنفرض أنَّ a,b ليسا أوليان مع pqr و $d=\gcd(a,b)$ أولي pqr، عندئذ $Z_{p^nq^mr^t} = \langle \{a,b\} \rangle = \langle d \rangle$، لنفرض جدلاً أنَّ المجموعة $\{a,b\}$ ليست S–مستقلة ولنفرض أنَّ $a \in \langle \{b\} \rangle$ ومنه فإنَّ:

$$\langle\{a\}\rangle \subseteq \langle\{b\}\rangle = \langle\{a,b\}\rangle = Z_{p^n q^m r^t}$$

وهذا يعني أنَّ b أولي مع pqr وهذا تناقض، ومنه فإنَّ المجموعة $\{a,b\}$ هي $S-$مستقلة، وبالتالي تكون المجموعة $\{a,b\}$ مجموعة مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^n q^m r^t}$.

3- لنفرض أنّ $o(a)=p^n, o(b)=q^m, o(c)=r^t$. بما أنَّ $\left(\langle\{a,b,c\}\rangle:1\right)$ تقبل القسمة على كل من p^n, q^m, r^t فإنَّ $Z_{p^n q^m r^t} = \langle\{a,b,c\}\rangle$. من جهة أخرى بما أنَّ $\gcd\left(o(a),o(b),o(c)\right)=1$ فإنَّ $\langle\{a\}\rangle \bigcap \langle\{b\}\rangle \bigcap \langle\{c\}\rangle = \{0\}$، وهذا يبين أنَّ $Z_{p^n q^m r^t} = \langle\{a\}\rangle \times \langle\{b\}\rangle \times \langle\{c\}\rangle$ ومنه فإنَّ المجموعة $\{a,b,c\}$ مستقلة، وحسب المبرهنة.2.3، فإن المجموعة $\{a,b,c\}$ هي $S-$مستقلة، مما سبق نجد أنَّ المجموعة $\{a,b,c\}$ مولدة صغرى للزمرة $Z_{p^n q^m r^t}$.

مبرهنة.3.4.

لتكن $(Z_n,+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس n حيث إنَّ n يقبل القسمة على عددين أوليين مختلفين على الأقل، ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية من الزمرة Z_n. عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1- إذا كانت $X=\{x_1,x_2\}$ عندئذ تكون المجموعة X مولدة صغرى إذا وفقط إذا كان $\gcd(x_1,x_2)=d$ أولي مع n و x_1,x_2 ليست أولية مع n.

2- إذا كانت $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}$ حيث إنَّ $m>2$، ولنفرض أنَّ $x_i \in X$ حيث إنَّ $1\le i\le n$، وأن $\gcd(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_m)=d_i$، عندئذ تكون المجموعة X مولدة صغرى إذا وفقط إذا كان $\gcd(x_1,x_2,...,x_m)=d$ أولي مع n و $x_1,x_2,...,x_m$ ليست أولية مع n وكان d_i لا يقسم x_i لكل $1\le i\le n$.

البرهان.

1- $(\Leftarrow)$ لنفرض أن المجموعة X مولدة صغرى للزمرة Z_n، عندئذ تكون المجموعة $\{x_1,x_2\}$ مولدة للزمرة Z_n وبالتالي فإن $d=\gcd(x_1,x_2)$ أولي n، لنفرض جدلاً أنَّ واحد على الأقل

من x_1,x_2 أولي مع n وليكن x_1 عندئذ $\langle x_1\rangle \subseteq \langle x_2\rangle = Z_n$ وبالتالي المجموعة $\{a,b\}$ ليست $S-$مستقلة، وبالتالي x_1,x_2 أوليان مع n.

$(\Rightarrow)$ ليكن $x_1,x_2 \in Z_n$ ولنفرض أنَّ x_1,x_2 ليسا أوليان مع n و $d=\gcd(x_1,x_2)$ أولي مع n، عندئذٍ $Z_n=\langle d\rangle$، لنفرض جدلاً أنَّ المجموعة $\{x_1,x_2\}$ ليست $S-$مستقلة ولنفرض أنَّ $x_1 \in \langle \{x_2\}\rangle$ ومنه فإنَّ $\langle\{x_1\}\rangle \subseteq \langle\{x_2\}\rangle = \langle\{x_1,x_2\}\rangle = Z_n$ وهذا يعني أنَّ x_2 أولي مع n وهذا تناقض، ومنه فإنَّ x_1,x_2 هي $S-$مستقلة، وبالتالي تكون المجموعة $\{x_1,x_2\}$ مولدة صغرى للزمرة Z_n.

2- $(\Leftarrow)$ لنفرض أن المجموعة X مولدة صغرى للزمرة Z_n، ولنفرض جدلاً أنَّ d ليس أولي مع n و بما أنَّ $Z_n=\langle X\rangle=\langle d\rangle$ وهذا غير ممكن ومنه d أولي مع n، من جهة أخرى إذا كان أحد عناصر المجموعة X وليكن x_i أولياً مع n فإن $Z_n=\langle x_i\rangle$ وهذا يناقض كون المجموعة Xهي $S-$مستقلة.
لنفرض جدلاً أنَّ d_i يقسم x_i ومنه $x_i \in \langle d_i\rangle$ وبالتالي $x_i \in \langle X/\{x_i\}\rangle$ وهذا يناقض كون المجموعة X هي $S-$مستقلة و d_i لا يقسم x_i لكل $1 \le i \le n$.

$(\Rightarrow)$ بما أنَّ d أولي مع n، فإنَّ $\langle X\rangle = \langle d\rangle = Z_n$، من جهة أخرى بما أنَّ كل عناصر المجموعة X ليست أولية مع n فإنَّ X لا تحوي عنصراً مولد للزمرة Z_n، لنفرض جدلاً أنَّ المجموعة X ليست $S-$مستقلة أي إنه يوجد $x_i \in X$بحيث إنَّ $x_i \in \langle X/\{x_i\}\rangle$ ومنه فإنَّ $x_i \in \langle d_i\rangle$، عندئذ يوجد $\alpha \in \mathbf{Z}$ بحيث $x_i=\alpha d_i$ وهذا يناقض كون d_i لا يقسم x_i، وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ، أي إنَّ المجموعة X هي $S-$مستقلة وبالتالي المجموعة X مجموعة مولدة صغرى للزمرة Z_n.

من المبرهنات السابقة، نلاحظ أنَّ المجموعات المولدة الصغرى للزمرة Z_n في حالة كان $n \ge 2$ ليست متساوية القدرة، في المبرهنة الآتية نبين أكبر قدرة ممكنة لمجموعة مولدة الصغرى للزمرة Z_n حيث $n \ge 2$:

مبرهنة.3.5.

لتكن الزمرة $(Z_n,+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس n و X مجموعة جزئية من الزمرة Z_n. ولنفرض أن $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_t^{\alpha_t}$ حيث إنَّ $p_1,p_2,...,p_t$ أعداد أولية مختلفة و $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_t$ أعداد صحيحة موجبة تماماً، عندئذ إذا كانت المجموعة X مولدة صغرى للزمرة Z_n فإن $card(X)\le t$.

البرهان.

لنفرض أن المجموعة X مولدة صغرى للزمرة Z_n وإنَّ $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_t^{\alpha_t}$ حيث إنَّ $p_1,p_2,...,p_t$ أعداد أولية مختلفة و $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_t$ أعداد صحيحة موجبة تماماً، سنورد البرهان بالاستقراء حسب t:

حسب المبرهنات 3.1، 3.2، 3.3 نجد أنَّ المبرهنة صحيحة لأجل $t\in\{1,2,3\}$.

– لنفرض أن المبرهنة صحيحة لأجل $t-1$، أي لنفرض أنه لأجل $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_{t-1}^{\alpha_{t-1}}$ فإنه إذا كانت المجموعة X مولدة صغرى للزمرة Z_n فإنَّ:

$$card(X)\le t-1$$

– لأجل $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_t^{\alpha_t}$، نعلم أنَّ:

$$Z_n\cong Z_{p^{\alpha_1}{}_1...p^{\alpha_{t-1}}{}_{t-1}}\times Z_{p_t^{\alpha_t}}$$

وبالتالي يوجد:

$$f:Z_{p^{\alpha_1}{}_1...p^{\alpha_{t-1}}{}_{t-1}}\times Z_{p_t^{\alpha_t}}\to Z_n$$

تماثلاً زمرياً من الزمرة $Z_{p^{\alpha_1}{}_1...p^{\alpha_{t-1}}{}_{t-1}}\times Z_{p_t^{\alpha_t}}$ إلى الزمرة Z_n، ولنفرض أنَّ X_1,Y مجموعات مولدة صغرى للزمر $Z_{p^{\alpha_1}{}_1...p^{\alpha_{t-1}}{}_{t-1}},Z_{p_t^{\alpha_t}}$ على الترتيب، عندئذ $Card(Y)=1$ وذلك حسب المبرهنة 3.1، و $Card(X_1)\le t-1$ وذلك حسب الفرض الاستقرائي، وبالتالي فإنَّ $Card(X)\le t$.

مثال.3.

لتكن $(\mathrm{Z}_{16},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس $16=2^4$، وبالتالي أي مجموعة مولدة صغرى للزمرة Z_{16} تكون مؤلفة فقط من عنصر واحد.

مثال.4.

لتكن $(\mathrm{Z}_{210},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس $210=2\times3\times5\times7$ ، وبالتالي أي مجموعة مولدة صغرى للزمرة Z_{210} تكون مؤلفة فقط من أربع عناصر على الأكثر، فعلى سبيل المثال، كل مجموعة من المجموعات الآتية:

$$X=\{70,42,30,105\} \qquad Y=\{10,21,35\}$$

$$Z_1=\{105,2\} \quad Z_2=\{22,33\} \quad E=\{13\}$$

تكون مجموعة مولدة صغرى للزمرة $(\mathrm{Z}_{210},+)$، ونلاحظ أنه لأجل المجموعة X أنَّ:

$$o(70)=3,o(42)=5,o(30)=7,o(105)=2$$

أما المجموعة $\{35,21,15,45\}$ فهي مولدة لكنها ليست مولدة صغرى لأن $\gcd(21,15,35)=1$ يقسم 45 .

مثال.5.

لتكن $(\mathrm{Z}_{60},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس $60=2^2\times3\times5$. إنَّ كل مجموعة من المجموعات:

$$Z=\{35,21\} \text{ ، } Y=\{12,5\} \text{ ، } X=\{15,20,12\}$$

هي مجموعة مولدة صغرى للزمرة Z_{60} ، ونلاحظ أنه لأجل المجموعة X أنَّ:

$$o(15)=4,o(20)=3,o(12)=5$$

مبرهنة.3.6.

لتكن G زمرة دوارة منتهية مرتبتها $n \geq 2$ مولدة بالعنصر $a \in G$، ولنفرض أنَّ:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$$

مجموعة مولدة صغرى للزمرة Z_n، عندئذٍ فإنَّ المجموعة $\{a^{x_1}, a^{x_2}, ..., a^{x_m}\}$ مولدة صغرى للزمرة G.

البرهان.

بما أنَّ $(G:1) = (Z_n:1)$ فإنه يوجد $f: Z_n \to G$ تماثلاً زمرياً من الزمرة Z_n إلى الزمرة G، معرفاً بالشكل $f(r) = a^r$: وذلك لكل $r \in Z_n$، ولنفرض أنّ $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ مجموعة مولدة صغرى للزمرة Z_n، وبما أنَّ $f(\langle X \rangle) = \langle f(X) \rangle$ يكون $f(\langle x_1, x_2, ..., x_m \rangle) = \langle a^{x_1}, a^{x_2}, ..., a^{x_m} \rangle$، ولما كانت المجموعة X مجموعة مولدة صغرى للزمرة Z_n فإن المجموعة $\{a^{x_1}, a^{x_2}, ..., a^{x_m}\}$ مولدة صغرى للزمرة G و ذلك حسب المبرهنة 2.5.

مبرهنة.3.7.

لتكن $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة الأعداد الصحيحة، ولتكن $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ مجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً، ولنفرض أنَّ $\gcd(x_1, x_2, ..., x_m) = 1$ وأنَّ $\gcd(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_m) = d_i \neq 1$ لأجل $x_i \in X$ حيث إنَّ $1 \leq i \leq m$، عندئذٍ تكون المجموعة $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ مولدة صغرى للزمرة $(\mathbb{Z}, +)$.

البرهان.

بما أنّ $\gcd(x_1, x_2, ..., x_m) = 1$ فإنَّ $\mathbf{Z} = \langle X \rangle$ ، ولنفرض جدلاً أنَّ المجموعة X ليست $S-$مستقلة عندئذٍ يوجد $x_i \in X$يحقق أنّ $x_i \in \langle X / \{x_i\} \rangle$ حيث إنَّ $1 \leq i \leq m$، ومنه فإنَّ $x_i \in \langle d_i \rangle$، عندئذ يوجد $\alpha \in \mathbf{Z}$ بحيث $x_i = \alpha d_i$ بالتالي $\gcd(x_1, x_2, ..., x_m) = d_i = 1$ هذا يناقض كون $d_i \neq 1$، وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ أي

إن X هي مجموعة $S-$مستقلة، مما سبق نجد أن المجموعة X مجموعة مولدة صغرى للزمرة $\mathbf{Z}$.

مبرهنة.3.7.

لتكن G زمرة تبديلية حرة على المجموعة X وليكن p,q عددين أوليين مختلفين. عندئذ فإنّ $Z = pX \bigcup qX$ مجموعة مولدة صغرى للزمرة G.

البرهان.

بما أنَّ p,q عددين أوليين مختلفين فإنه يوجد عددين $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ بحيث إنَّ $\alpha p + \beta q = 1$، وبالتالي أياً كان $x \in X$ فإنَّ $x = \alpha(px) + \beta(qx)$، ومنه نجد أنَّ المجموعة Z مولدة للزمرة G.

أياً كان $x_1, x_2 \in X$ فإنَّ $px_1 \neq qx_2$ و $qx_1 \neq px_2$ وذلك لأنَّ المجموعة X مستقلة خطياً، لنفرض جدلاً أنَّ المجموعة Z ليست $S-$مستقلة عندئذ فإنه يوجد عنصر $z \in Z$ يحقق أنَّ $z \in \langle Z / \{z\} \rangle$ وبالتالي توجد مجموعات جزئية منتهية من العناصر:

$$\{\alpha_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{Z}, \{z_i\}_{i \in I} \subseteq Z$$

حيث إنَّ $z = \sum_{i \in I} \alpha_i z_i$ و $z \notin \{z_i\}_{i \in I}$، كما أنه يوجد $x \in X, x_i \in X$ بحيث إنَّ:

$$z = \lambda x, z_i = \beta_i x_i ; \forall i \in I$$

وإنَّ $\lambda, \beta_i \in \{p,q\} ; \forall i \in I$، بما أنَّ $z \in \langle Z / \{z\} \rangle$ فإنَّ $x \notin \{x_i\}_{i \in I}$، وبالتالي:

$$-\lambda x + \sum_{i \in I} (\alpha_i \beta_i) x_i = 0$$

وبما أنَّ X مستقلة خطياً، فإنَّ $\lambda = 0, \alpha_i \beta_i = 0 ; \forall i \in I$ وهذا يكافئ أنَّ $p = 0$ أو $q = 0$ وهذا غير ممكن، وبالتالي فإنَّ الفرض الجدلي خاطئ أي إنَّ $z \notin \langle Z / \{z\} \rangle$ والمجموعة Z هي $S-$مستقلة. ومما سبق نجد أنَّ المجموعة Z مجموعة مولدة صغرى للزمرة G.

مثال.6.

لأجل الزمرة $(2\mathbb{Z},+)$ نعلم أنَّ المجموعة $\{2\}$ تتشكل أساساً حراً لها، لأجل العددين $2,3$ فإنَّ $\{4,6\}$ هي مجموعة مولدة صغرى.

مبرهنة.3.8.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة على المجموعة X. ولتكن $p_1,p_2,...,p_k$ أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى. ولنفرض أن $n=\prod_{i=1}^{k}p_i$ فإن المجموعة:

$$M=\bigcup_{i=1}^{k}\left\{\frac{n}{p_i}x \quad ;x\in X\right\}$$

هي مجموعة مولدة صغرى للزمرة G.

البرهان.

لنفرض أنَّ $n=\prod_{i=1}^{k}p_i$ ولنعرف المجموعة N بالشكل:

$$N=\left\{n_i=\frac{n}{p_i}\right\}_{i=1}^{k}$$

من الواضح أن $\gcd(n_1,n_2,...,n_k)=1$ بالتالي يوجد $\alpha_1,...,\alpha_k\in\mathbf{Z}$ بحيث $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i n_i=1$.

من جهة أخرى فإنه لأجل كل $y\in G$ توجد عناصر $\{x_J\}_{j\in J}\subseteq X$ ، $\{\beta_j\}_{j\in J}\subseteq\mathbb{Z}$ تحقق أنَّ $y=\sum_{j\in J}\beta_j x_j$ ، وبالتالي:

$$y=1\cdot y=\left[\sum_{i=1}^{k}\alpha_i n_i\right]y=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j\in J}\alpha_i\beta_j n_i x_J$$

ومنه فإنّ $y\in\langle M\rangle$ ، وهذا يبين أنَّ المجموعة M مولدة للزمرة التبديلية الحرة G.

لنفرض جدلاً أنَّ المجموعة M ليست $S-$مستقلة، عندئذ ودون المساس بعمومية المسألة لنفرض أنه لأجل $n_1 \in N$ يوجد عنصر $z \in X$ بحيث إنَّ $n_1 z \in \langle M \setminus \{n_1 z\} \rangle$، وبالتالي توجد مجموعات جزئية منتهية:

$$\{n_i x_j\}_{j \in J}^{1 \le i \le k} \subseteq M \setminus \{n_1 z\}, \{\alpha_{ij}\}_{j \in J}^{1 \le i \le k} \subset \square$$

تحقق أنَّ:

$$n_1 z = \sum_{j \in J, 1 \le i \le k} \alpha_{ij} (n_i x_j)$$

وهنا نميز الحالتين:

أولاً. إذا كان $z \notin \{x_j\}_{j \in J}$، عندئذ فإنَّ $0 = \sum_{j \in J, 1 \le i \le k} \alpha_{ij} (n_i x_j) + z - n_1$، وبما أن المجموعة X مستقلة خطياً فإنَّ $n_1 = 0$ وهذا تناقض.

ثانياً. إذا كان $z \in \{x_j\}_{j \in J}$، عندئذ فإنَّ $n_1 z = \sum_{j \in J, 1 \le i \le k} \alpha_{ij} (n_i x_j)$ تكتب بالشكل:

$$\sum_{\substack{j \in J, 1 \le i \le k \\ x_j \ne z}} \alpha_{ij} (n_i x_j) + \sum_{j \in J, 1 < i \le k} \alpha_{ij} (n_i z) - n_1 z = 0$$

وبالتالي:

$$\sum_{\substack{j \in J, 1 \le i \le k \\ x_j \ne z}} \alpha_{ij} (n_i x_j) + \left(\sum_{j \in J, 1 < i \le k} [\alpha_{ij} n_i] - n_1 \right) z = 0$$

وبما أن المجموعة X مستقلة خطياً فإنَّ:

$$\sum_{j \in J, 1 < i \le k} [\alpha_{ij} n_i] - n_1 = 0$$

وبالتالي فإنَّ:

$$n_1 = \sum_{j \in J, 1 < i \le k} \alpha_{ij} n_i$$

ولما كان $\gcd(n_1,...,n_k)=1$ فإن $\gcd(n_2,n_3,...,n_k)=1=p_1$ ، وهذا تناقض لأنَّ p_1 عدد أولي.

مما سبق نجد أنَّ الفرض الجدلي خاطئ وبالتالي المجموعة M هي $S-$مستقلة. ومما سبق نجد أن M هي مجموعة مولدة صغرى للزمرة G.

المراجع العلمية:

[1]- M. Herbk and P. Ruzicka, "Characterization of Abelian Group With Minimal generating Set," *Quaestiones Mathematicae*, Vol. 38, no. 1, pp. 103-120, 2015.

[2]- P. Ruzicka, "Abelian groups with a minimal generating set," *Quaestiones Mathematicae*, Vol. 33, no. 2, pp. 147-153, 2010.

[3]- J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, 4th ed., Springer- Verlag , New York, 1995.

[4]- L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, Vol. I, *Pure and Applied Mathematics*, Vol. 36, Academic Press, New York, 1970.

[5]- G. Gratzer, *Universal Algebra*, D. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, 1968.

[6]- A. G. Kurosh, *The Theory of Groups*, Vols. I, II, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 1960.